振动理论与工程应用

Zhendong Lilun yu Gongcheng Yingyong

李惠彬 编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

振动理论与工程应用

李惠彬　编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书系统地论述了线性振动、非线性振动、随机振动等振动理论基础和分析方法、工程结构系统的分析方法、复杂的流固耦合振动问题分析及振动测试与控制的基本原理与技术，并通过对若干工程振动问题的分析，说明振动理论在工程中的应用。本书取材广泛、内容新颖，既阐明基本概念，又注重理论在工程中的应用。

本书可作为机械、车辆交通、土木水利、能源、航空航天和力学等专业的研究生、本科生教材也可供相关工程领域的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

振动理论与工程应用/李惠彬编著 .—北京：北京理工大学出版社，2006.9
ISBN 7-5640-0680-3

Ⅰ. 振… Ⅱ. 李… Ⅲ. 振动理论 Ⅳ. O32

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 057585 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京国马印刷厂
开　　本 / 787 毫米 × 1092 毫米　1/16
印　　张 / 16.25
字　　数 / 373 千字
版　　次 / 2006 年 9 月第 1 版　2006 年 9 月第 1 次印刷
印　　数 / 1 ~ 3000 册　　　　责任校对 / 陈玉梅
定　　价 / 26.00 元　　　　责任印制 / 吴皓云

图书出现印装质量问题，本社负责调换

前　　言

振动理论是研究机械系统和工程结构的动力特性及其在动态激励下振动响应分析方法的一门科学。研究这门科学的目的在于探究振动的产生原因、分析它们的运动规律，了解振动对机器、工程结构及人体的影响，寻求控制、消除振动或利用振动的方法，最后达到机械系统与工程结构能够可靠地工作。本书介绍了线性和非线性系统振动的理论和方法、振动测试与振动控制的基本原理与技术，以及振动理论在实际工程问题中的应用。

本书是作者在总结多年研究生和工程硕士振动理论课程教学经验，融合了作者参与国家攀登项目、国家博士后基金项目、清华大学基础研究基金项目及与许多企业科研合作项目的科研成果，并注意吸收国内外振动领域研究的新成果的基础上编写完成的。

本书共分 10 章。

第 1 章介绍振动理论研究的基本内容和基本方法。

第 2 章阐述单自由度线性系统振动，包括自由振动、定常强迫振动、任意激振下的动力响应及冲击响应谱等内容。这章内容是线性振动理论的基础。

第 3 章介绍多自由度线性系统振动，包括建模的分析力学方法、解题的矩阵分析方法，重点介绍实模态与复模态分析技术、具有刚体模态和重特征值的系统分析、特征灵敏度分析、用传递矩阵法建立轴系（或梁系）振动方程、振动特征值问题的数值解法及 Collatz 包含定理。

第 4 章介绍弹性体（或连续体、分布参数系统）振动的理论和方法，重点介绍弦、杆、轴、梁、圆环、薄膜、板、壳等常见弹性体的建模技能和分析方法。

第 5 章介绍工程结构系统分析的实用方法，包括集中质量法、有限元单元法、里兹（Ritz）法、子空间迭代法、动态子结构的模态综合法。本章也对结构计算模型修正作了介绍。

第 6 章介绍线性和非线性随机振动理论，并介绍工程上常见的随机振动问题。

第 7 章系统地介绍非线性系统自由振动和强迫振动的理论和方法，分析方法包括解析法和数值解法。本章对非线性的物理特性、稳定性、分岔与混沌进行了介绍。

第 8 章介绍工程上比较复杂的流固耦合振动问题及解题思路。

第 9 章介绍振动测试与振动控制的有关原理和技术，包括传感器测试原理、模态试验技术、基于振动的在线监测与故障诊断技术、隔振与减振原理和主动与半主动振动控制技术。

第 10 章通过齿轮振动分析、重型载货汽车振动数值模拟、发动机涡轮增压器转子振动、大跨度桥梁的模态参数识别和振动筛有限元振动特性分析等五个工程实例，介绍振动理论的应用。

本书在编写过程中，参阅了国内外同行专家许多宝贵的研究成果与资料，在此谨向他们致以衷心的感谢。

郑慕侨教授仔细审阅了全部书稿，并提出了十分有益的修改意见。在本书的编写过程中，得到了顾亮教授和王国丽副教授的帮助。本书的出版得到了北京理工大学出版社的热忱支持。作者对他们表示诚挚的敬意和衷心的感谢。

本书的出版也得到了北京理工大学研究生院教育改革项目基金的部分资助，在此作者表

示衷心的感谢。

本书可作为机械、车辆交通、土木水利、能源、航空航天、力学等专业的研究生和本科生教材,也可供相关工程领域的科技人员参考。

由于作者水平所限,本书的错误和不妥之处在所难免,敬请广大读者提出宝贵意见。

作　者

目　　录

第1章　绪　论

1.1　振动理论研究的目的和内容

1.1.1　振动理论研究的目的

振动是指一个物体围绕它的平衡位置所作的往复运动或一个系统的物理量在其平均值(或平衡值)附近的来回变动的物理现象。

人类许多的重要活动都是与振动密切相关的。例如,我们能听见声音,是由于声的传播和耳膜发生了振动;我们能看到远处的东西,是由于光波发生了振动;再如,我们能够说话,是由于喉咙和舌头产生了周期运动。在早期,振动领域的学者们把主要工作放在理解振动的自然现象和研究描述振动系统的数学模型上。近几十年来随着科学技术的进步和工业的快速发展,一方面各种工业产品设计得愈加微型化、精巧和复杂化,如能清洗血管的微型机器人,具有通信、遥感、电子侦察等功能的微型卫星等;另一方面工程结构也愈加巨型化,如已建成的具有蓄水、发电功能的三峡大坝,已建成的和将要修建的超高摩天大楼及跨江、跨海悬索桥与斜拉桥等。随着人们生活水平的不断提高,越来越多的家庭拥有了交通工具——汽车;随着交通运输、旅游业的迅猛发展,城际之间及城市与旅游胜地之间开通了越来越多的高速列车。为了保证它们能够可靠地工作和具有良好的动态性能,振动问题已成为工程技术领域里普遍需要认真研究和解决的课题。

振动在大多数情况下是有害的,如1940年风致振动引起美国Tacoma大桥垮塌,1976年24万同胞死于唐山大地震;还有路面不平度和发动机等振动影响车辆乘员的乘坐舒适性,滑动轴承因油膜振荡导致转子失效,飞机因颤振而坠落,卫星由于零部件的振动导致卫星姿态失稳而翻滚等。由于振动,降低了机械的动态精度、可靠性和其他使用性能,甚至产生公害、污染环境,如车床振动会降低车削零件的精度,运输交通工具因振动使包装不当的产品受损、失效,建筑施工单位的打桩机作业时导致的地面振动产生高分贝的噪声及引发周围房屋的开裂等。但振动也有有益的一面,如建筑行业在夯实地基时用的蛤蟆夯,煤矿企业用振动筛筛选煤,桥梁检测人员利用索的振动测量计算出斜拉索的拉力等。

对于任一机械系统或工程结构,无论是在设计阶段还是在使用过程中,常常需要工程技术领域的研究人员准确而迅速地计算、分析、测试并预测它们的振动特性。研究机械系统或工程结构在动态激励下所表现出来的振动特性,是振动理论的基本任务。振动理论研究的目的在于探究这些振动的产生原因、分析其运动规律,了解振动对机器、工程结构及对人体的影响,寻求控制、消除振动或利用振动的方法,最后达到机械系统或工程结构能够可靠地工作,并具有良好的动态性能。

1.1.2　振动系统的三元素

机械系统或工程结构之所以会产生振动,是由于系统本身具有质量和弹性,而阻尼则使振

动受到抑制。从能量关系看,质量可存储动能,弹性可存储势能,而阻尼则消耗能量(动能和势能)。当外界对系统作功时,系统质量吸收动能因而具有运动速度,弹性元件存储变形能而具有使质量恢复原来状态的能力。这样,能量不断地变换,导致系统质量围绕它的平衡位置作往复运动。如果没有外界源源不断地输入能量,那么由于阻尼的消耗,振动现象将逐渐停息。由此可见,质量、弹性和阻尼是振动系统的三元素。此外,如果质量离开平衡位置时具有重力势能,也具有恢复力,如单摆可以把这种情况看作是具有等效弹性元件的系统。下面将振动系统的三元素的特性予以说明。

(1) 弹性元素(或元件)

线性弹性元件在力学模型中被抽象为无质量和阻尼的元件。当弹性元件两端存在相对位移 x 时,产生弹性恢复力,用公式表示为

$$F = -kx \tag{1.1.1}$$

式中 k 是弹性元件刚度,单位为 N/m。

当应力超过材料屈服点或力 - 变形关系不满足公式(1.1.1)时,弹性元件刚度就不再是线性的,而是非线性的,这时弹性元件刚度可按式(1.1.2)计算。

$$k = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.1.2}$$

(2) 阻尼元素(或元件)

线性阻尼元件在力学模型中被抽象为无质量和弹性的元件。当阻尼元件两端存在相对速度 $\dot{x}$ 时,产生阻尼力,用公式表示为

$$F = -c\dot{x} \tag{1.1.3}$$

式中 c 是阻尼系数,单位为 $\mathrm{N/(m \cdot s^{-1})}$。

阻尼可分为黏性阻尼、库仑阻尼或干摩擦阻尼、材料阻尼、固体阻尼或相位滞后阻尼,其中黏性阻尼是线性阻尼,是工程上常见的一种阻尼,给数学解题带来了很大的方便。其他类型阻尼是非线性阻尼,在力学模型中可以等效成线性阻尼,以方便解题。

(3) 质量元素(或元件)

质量元素在力学模型中被抽象为刚体。根据牛顿第二定律,当质量元素上作用一外载荷时,力与加速度存在如下关系

$$F = m\ddot{x} \tag{1.1.4}$$

式中 m 是刚体的质量,单位为 kg。

1.1.3 振动理论研究的基本内容

振动问题所涉及的对象,无论是工程结构、机械或零部件等,都可以看作是系统。外界对于系统的输入,包括初始干扰、外部激励力等统称为激励。系统在输入作用下产生的输出统称为系统的响应。任何振动问题都可以用图 1.1.1 来表述。其中,输入的变化规律可以是确定的,也可以是随机的;系统可以是线性的,也可以是非线性的;输出是系统在输入作用下的响应,它的变化规律包括:简弦运动——响应为时间的正弦或余弦函数;周期性运动——响应为时间的周期函数,可展开为一系列简弦振动的叠加;瞬态振动——响应通常只在一定的时间内存在和随

图 1.1.1 振动问题研究框图

机振动，响应不是时间的确定性函数，因而不能预测，而只能用概率统计的方法来研究。

振动理论所研究的基本内容包括下列几种情形。

① 振动分析或称响应预测：已知输入和系统特性，求输出或响应。响应包括位移、速度、加速度和力。本书作者研究的大部分振动问题都属此类。

② 振动环境预测又称载荷识别：已知输出和系统特性，求输入。

③ 系统识别：已知输出和输入，求系统特征参数。如常用的模态参数识别。

④ 参数识别：已知输出，求系统动力参数。对于大型工程结构（如大桥、大楼和大坝等），在无法获取输入的情况下，只能根据系统的响应（即输出），用时域法或频域法识别系统的动力参数，如固有频率、振型和阻尼比等。对于机械设备和大型工程结构，可以利用测量得到的振动响应或识别得到的动力参数对机械设备进行故障诊断和对工程结构进行健康诊断。

综上所述，解决振动问题的途径或研究方法，离不开理论分析和试验研究这两个方面。目前随着高性能计算机的普及和应用，以及先进的振动量测和分析技术的出现，使得复杂振动问题的解决已日益变得容易。

1.2 振动理论研究的基本方法

1.2.1 建立力学模型

首先把所研究的系统以及外界作用简化为一个力学模型。这个力学模型不仅要简单，而且在动态特性方面应与原来的研究对象等效。目前常用的建模方法有：理论分析的方法、实验的方法以及理论分析与实验相结合的方法。其中理论分析的方法是依据牛顿第二运动定律、达朗贝尔（D' Alembert）原理、能量守恒定理、虚位移原理、哈密尔顿（Hamilton）原理、有限单元法和弹塑性理论等。建模的结果就是要得到系统振动力学基本运动方程。

所建立的振动力学模型如按照系统自由度来划分，可分为单自由度系统、多自由度系统和弹性体（或连续体）振动模型。如按描述系统的运动微分方程来划分，可分为线性振动和非线性振动模型，其中线性模型用常系数线性微分方程描述离散系统，而用偏微分方程描述连续系统，此时，模型中的惯性力、阻尼力及弹性力只分别与加速度、速度及位移成正比；非线性振动模型指的是微分方程中出现非线性项。如按对系统的输入类型来划分，力学模型可划分为自由振动力学模型（系统只受初始干扰）、强迫振动力学模型（系统上作用有外部激振力）、自激振动模型（弹性系统存在受系统振动本身控制的激励力作用）。

1.2.2 求解与分析

（1）求解

常用的求解方法包括：求解微分方程的标准方法、拉普拉斯（Laplace）变换、矩阵方法、数值方法、模态叠加法、模态综合法和实验方法（如振动响应测试、模态参数识别）等。非线性微分方程是很难得到精确解的，但可以根据问题的复杂程度，采取定性分析法、精确解析法、近似解析法和数值解析法。其中定性分析可以了解系统的平衡形态，精确解析法适用于简单系统，近似解析法和数值解析法适用于复杂的非线性问题。

（2）分析

在得到运动方程的振动位移、振动速度和振动加速度等解后，应分析和说明解中所隐含的物理实质，并根据得出的一般性原理去指导和帮助解决新的振动问题。

1.3 振动理论的工程应用

振动理论在工程中的应用早已受到人们的重视，应用也是多方面的，并且取得了许许多多的成就。

首先，随着振动理论研究的不断深入和科学技术水平的不断提高，人们研究、探索、设计与开发成功了利用振动原理工作的各种产品，如惯性式测振传感器、机械转子动平衡仪；土建及桥梁工程施工时使用的振动锤、振动沉桩机，夯实道路和房屋地基的蛤蟆夯；工程结构中用的动力减振器；煤矿企业筛选原煤的振动筛；斜拉桥和悬索桥索力测试仪；潮汐能和波浪能发电设备与装置；消除工件应力的振动时效设备等。

图 1.3.1 是利用强迫振动来消除工件应力的原理图。电动机带动偏心轮转动，产生周期性激励力，使被振工件在其固有频率下振动 20 ~ 30 min，可达到减少或均化工件残余应力的目的。

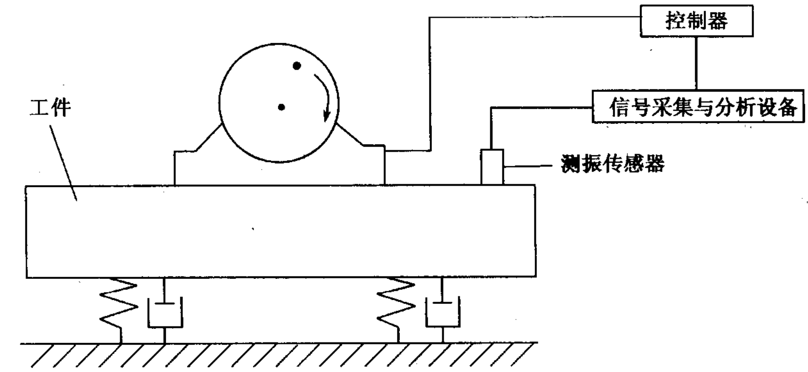


图 1.3.1 振动消除应力原理图

其次，以振动理论、信号分析与处理和计算机技术为理论基础的振动测试与动态数字仿真方法与技术，已成为解决工程振动问题的一个重要手段。它们的任务就是要在结构和机械的设计、运行的各阶段，通过动态数字仿真技术或信号采集与分析设备，获得系统输入或系统结构特性参数或系统输出等的数据，从而为机械与结构的动态设计，为消振、隔振和振动控制提供可靠的依据。

最后，振动控制是振动研究的出发点和归宿。振动控制通过被动、半主动及主动控制技术等手段使受控对象（如各种运载工具、机械产品与设备、工程结构等）的振动水平满足人们的预定要求。如各种车辆上采用的被动、半主动及主动控制悬架，就是要削弱由于地面凹凸不平带给车体及乘员的振动，提高乘员的乘坐舒适性。

第2章 单自由度线性系统振动

2.1 概述

一个系统只在起始时受到外界干扰,使之得到一个初始位移或速度,然后就靠系统本身的弹性恢复力维持的振动称为自由振动。这种振动没有外界能量的补充,如跳水运动员在跳板上起跳时,给跳板一个初始位移,然后跳板就靠其本身的弹性恢复力维持自由振动。线性振动(或微幅振动)是指系统受到外界干扰后,系统的各个质点偏离静平衡位置,仅作微小的往复运动。系统在线性振动过程中所受的各种力只被认为与位移、速度等成线性关系,而忽略高阶微小量。线性振动是工程上最常见的物理运动。本章只讨论线性振动。

自由度是指在振动过程中任何瞬时都能完全确定系统在空间的几何位置所需要的独立坐标数目。单自由度弹簧质量系统是由一根"无质量"的弹簧和一个"无弹性"的质量所组成的。系统在作自由振动时,不论受到什么样的初始干扰,均将以一定的频率振动。这种只决定于系统本身固有的物理性质的频率称为固有频率。

保守系统(或自治系统)在自由振动过程中,由于总机械能守恒,动能和势能相互转换而维持等幅振动,称作无阻尼自由振动。但实际系统不可避免存在阻尼因素,由于机械能的耗散,使自由振动不能维持等幅而趋于衰减,称作阻尼自由振动,如跳水运动员的跳板在运动员起跳后,跳板的振动幅值越来越小,最后趋于平静。

强迫振动是指系统在经常性(或周期性)激励作用下的振动。叠加原理是指系统对多个激励的总响应,等于系统对各个激励单独作用下的响应之和。如系统对激励 f_1 与 f_2 的响应分别为 x_1 与 x_2,则系统对激励 $c_1f_1 + c_2f_2$ 的总响应就等于 $c_1x_1 + c_2x_2$,其中 c_1 与 c_2 是常数。

若要求系统对周期性激励的响应,可以首先把周期性激励分解为若干个谐和激励,接着求出系统对各个激励的响应,然后基于叠加原理,把响应叠加起来,就可以求出系统对周期性激励的总响应。

系统在定常激励作用下,由于阻尼的影响,响应中的自由振动部分迅速衰减,剩下的强迫振动部分构成系统的定常响应。但在许多实际问题中,对系统的激振并非周期性的,而是任意的时间函数,或者是在极短时间间隔内的突发性的冲击作用,如凹凸不平路面通过悬挂系统给车辆的瞬时冲击、潜艇发射鱼雷、导弹时的瞬时冲击、地震发生时地壳运动传给桥梁等建筑物的瞬时冲击等。在这种激振情况下,系统通常没有稳态振动,而只有瞬态振动。在激振作用停止后,系统按固有频率继续作自由衰减振动。系统在任意激振下的振动状态,包括激振作用停止后的自由振动,称为任意激振的响应。周期激振是任意激振的一种特例。系统在定常激励下的响应是定常响应,其傅里叶级数展开式在频域内对应于离散频谱;系统在非定常激励下的响应是非定常响应,其卷积表示式在频域内对应于连续频谱。

系统在冲击作用下,往往很快就达到最大响应值。这时候,阻尼还来不及耗散大量的机械能,所以这类问题通常不考虑阻尼的影响。工程上在设计承受冲击载荷的结构和设备时常利用冲击响应谱的概念来设计,并通过研究选择系统的某些参数,使响应的最大值限制在一定的

范围内。

单自由度线性系统振动内容有着实际意义，因为工程上有许多问题通过简化后，用单自由度线性系统振动理论就能得到满意的结果。另外，单自由度线性系统振动的基本概念又有着普遍意义，多自由系统和连续体系统振动，在特殊的坐标系（模态坐标）中考察时，显示出与单自由度线性系统振动类似的性态。

2.2 单自由度自由振动

2.2.1 无阻尼系统自由振动

单自由度无阻尼线性系统可以用弹簧质量系统来表示，如图 2.2.1 所示。这类振动问题的数学力学模型的建立可采用牛顿运动定律或能量法。在运用牛顿运动定律推导振动微分方程时，为了避免出现重力项、简化公式推导，一般取系统的静平衡位置作为坐标原点。静平衡位置是指系统在各种静力作用下所保持的平衡位置。

如图 2.2.1(b)所示，在静平衡位置，由静力平衡条件得

$$\sum F = 0, \text{即}\ mg - k\delta = 0,\ mg = k\delta$$

当图 2.2.1 所示的系统受到外界某种初始干扰（如初始位移或初始速度，但不是持续的外载荷作用），使系统的静平衡状态遭到破坏，则弹簧力将不再与重力平衡，而产生不平衡的弹性恢复力，系统就依靠这种弹性恢复力维持自由振动。

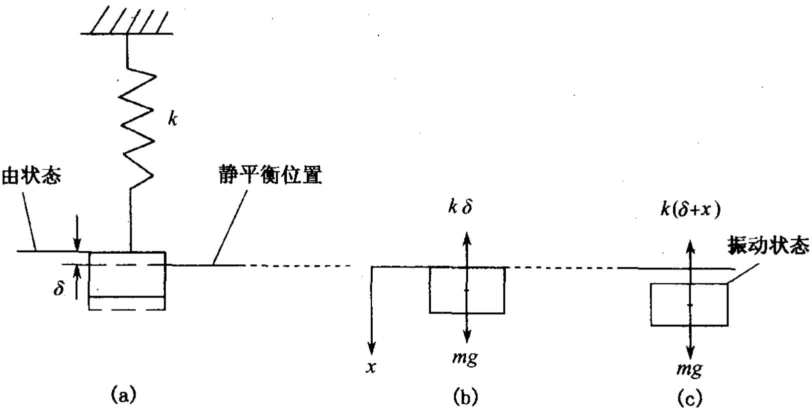


图 2.2.1 单自由度无阻尼线性振动系统
(a) 原始状态；(b) 静平衡位置；(c) 振动状态

由牛顿运动定律，可列出图 2.2.1 所示的系统振动微分方程：

$$m\ddot{x} = \sum F$$

即

$$m\ddot{x} = mg - k(\delta + x) = -kx \tag{2.2.1}$$

式中 $-kx$ 是弹性恢复力。

引进符号

$$p^2 = \frac{k}{m}$$

式(2.2.1) 改写成

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \tag{2.2.2}$$

式(2.2.2)是振动位移 x 的二阶常系数线性齐次微分方程。由常微分方程理论可知，式(2.2.2)的通解——系统振动位移可表示为

$$x = B\sin pt + D\cos pt \tag{2.2.3}$$

振动速度

$$\dot{x} = Bp\cos pt - Dp\sin pt \tag{2.2.4}$$

对于初始条件：$t=0, x=x_0, \dot{x}=\dot{x}_0$，代入式(2.2.3)和式(2.2.4)，得积分常数

$$D = x_0,\ B = \frac{\dot{x}_0}{p}$$

因而式(2.2.3)的解为

$$x = \frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt + x_0\cos pt$$

令

$$\frac{\dot{x}_0}{p} = A\cos\varphi,\ x_0 = A\sin\varphi$$

则

$$x = A\sin(pt + \varphi) \tag{2.2.5}$$

式中

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{p}\right)^2};\ \varphi = \arctan\left(x_0/\dot{x}_0 \cdot p^{-1}\right);\ p = \sqrt{\frac{k}{m}}; \tag{2.2.6}$$

式中 A 为振动位移幅值(简称振幅)，是质量 m 偏离平衡位置的最远距离；p 为固有(圆或角)频率，单位 rad/s，反映系统的一种固有的振动特性；φ 为初相角，单位 rad。

振动周期(单位：s)反映振动重复一次所需的时间

$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{2.2.7}$$

振动频率(单位：Hz)反映单位时间(1 s) 内振动的重复次数

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.2.8}$$

图 2.2.2 反映的是式(2.2.5)的运动规律曲线。

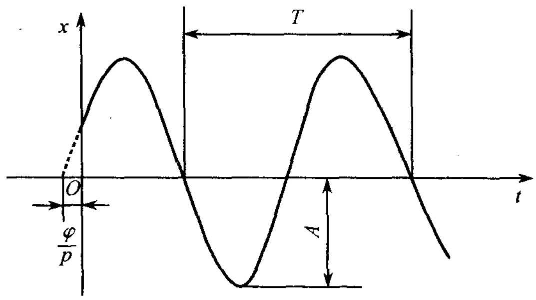


图 2.2.2 简弦振动响应时域曲线

由式(2.2.5)可求出振动速度和加速度：

振动速度：$\dot{x} = Ap\cos(pt + \varphi) = Ap\sin\left(pt + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$

振动加速度：$\ddot{x} = -Ap^2\sin(pt + \varphi) = Ap^2\sin(pt + \varphi + \pi)$

由以上分析可以看出，同一质点的振动速度与振动位移相比，幅值相差 p 倍，相位滞后 $\pi/2$；振动加速度与振动位移相比，幅值相差 p^2 倍，相位滞后 π。振动位移、速度和加速度时间响应曲线见图 2.2.3。

系统固有频率在工程上具有很重要的意义。在动态设计时，它是衡量系统是否设计合理的一个重要参数。对于单自由度系统，求系统固有频率常用的方法归纳如下。

① 对振动质点取隔离体，进行受力分析，应用牛顿运动定律列出方程；

② 能量法；

③ 弹性元件质量的等效化。

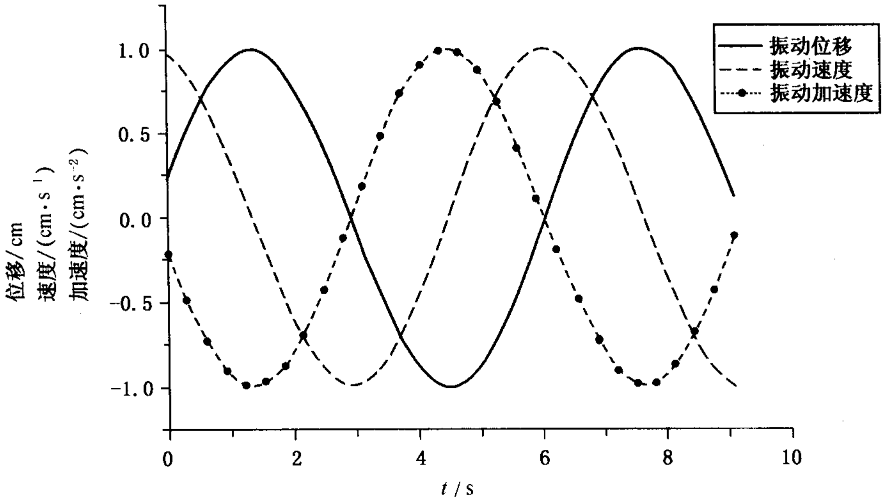
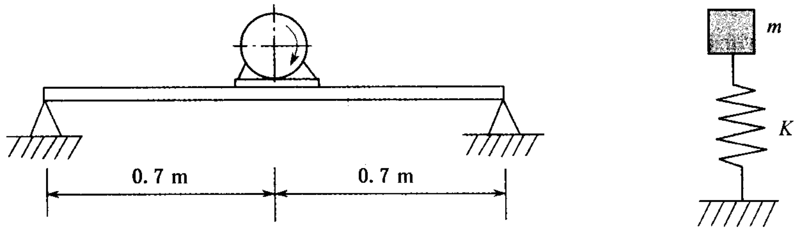


图 2.2.3 振动位移 x、速度 $\dot{x}$、加速度 $\ddot{x}$ 曲线

例 2.2.1 一台型号为 JO2 - 32 - 4L 的电动机，质量为 47 kg，转速为 1 430 r/min，固定在两根槽钢组成的简支梁上的中点（如图 2.2.4(a)所示）。每根槽钢长 1.4 m，质量为 6.528 kg，简支梁抗弯刚度为 $EJ = 16\,268\ \mathrm{N \cdot m^2}$。试求此系统的固有频率。

解： 将电动机看作一质量块，槽钢看作一弹簧，两根槽钢看作是两个并联的弹簧。由于槽钢的质量与电动机的质量相比，不能忽略，故根据平行力的分解原理，将槽钢质量的一半加在电动机质量块上，由此将上述系统简化为一个单自由度弹簧质量系统，如图 2.2.4(b)所示。



(a) (b)

图 2.2.4 简支梁简图

(a) 装有电机的简支架；(b) 振动力学模型

根据材料力学简支梁的挠度计算公式，在梁中点作用一垂直力 F 时，该点的挠度为

$$y = \frac{Fl^3}{48EJ}$$

简支梁的弹簧刚度为

$$k_1 = \frac{F}{y} = \frac{48EJ}{l^3}$$

两根槽钢的总弹簧刚度为

$$K = 2k_1 = \frac{2 \times 48EJ}{l^3} = \frac{2 \times 48 \times 16\,268}{1.43^3}\ \mathrm{N/m} = 569\,143\ \mathrm{N/m}$$

根据公式(2.2.6),得系统的固有圆频率

$$p = \sqrt{\frac{K}{m_{电动机} + 2 \times 0.5m_{槽钢}}} = \sqrt{\frac{569\,143}{53.528}}\ \mathrm{rad/s} = 103.115\ \mathrm{rad/s}$$

系统的固有频率

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{103.115}{2\pi}\ \mathrm{Hz} = 16.411\ \mathrm{Hz}$$

或

$$f = 16.411 \times 60\ \mathrm{r/min} = 984.673\ \mathrm{r/min}$$

由以上计算结果可看出,系统的固有频率与电动机的转速相差 445.327 r/min,数值相差较远,系统不会发生激励力频率与系统固有频率相等的物理现象——共振。

2.2.2 能量法

在阻尼可以略去不计的前提下,系统在自由振动中任何时刻的机械能保持常值。用公式可表示为

$$E_p + E_k = 常数$$

或

$$\frac{d}{dt}(E_p + E_k) = 0 \tag{2.2.9}$$

由式(2.2.9)可求出系统振动微分方程和固有频率。以上分析方法就称为能量法。下面举例说明。

例 2.2.2 如图 2.2.5 所示,一均质细直杆,长为 L,重为 G,用两根长为 b 的铅直钢丝挂在水平位置。试求此杆绕铅直轴 OO_1 微幅振动的周期。

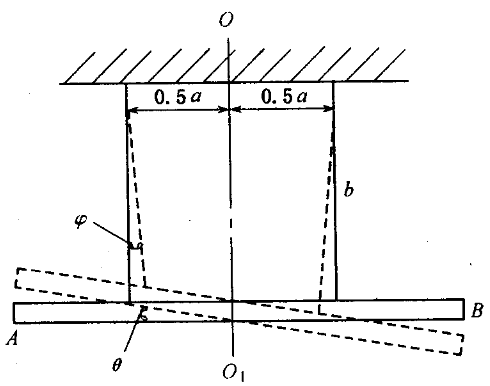


图 2.2.5 旋摆系统

解: 当杆转动角 θ 时,由此而引起钢丝摆动了角 $\varphi = \dfrac{0.5a\theta}{b}$,因此杆上升的高度为

$$b\left(1 - \cos\frac{0.5a\theta}{b}\right) \approx \frac{b}{2}\left(\frac{0.5a\theta}{b}\right)^2 = \frac{a^2\theta^2}{8b}$$

忽略钢丝的弹性伸缩,则势能只有一项,即杆的重力势能

$$E_p = G \cdot \frac{a^2\theta^2}{8b}$$

杆的摆动动能

$$E_k = \frac{1}{2}J_{AB}\dot{\theta}^2$$

而 $$J_{AB} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{G}{Lg}x^2\mathrm{d}x = \frac{G}{3Lg}x^3\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{GL^2}{12g}$$

当不考虑阻尼时，最大动能等于最大势能，即

$$\frac{Ga^2}{8h}\theta_{\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{GL^2}{12g}p^2\theta_{\mathrm{m}}^2$$

由此得系统振动的固有圆频率为

$$p = \frac{a}{L}\sqrt{\frac{3g}{b}}$$

系统振动的周期

$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi\bigg/\frac{a}{L}\sqrt{\frac{3g}{b}} = \frac{2\pi L}{a}\sqrt{\frac{b}{3g}}$$

例 2.2.3 如图 2.2.6 所示，一半径为 r，质量为 m 的圆柱体在一个半径为 R 的圆柱面内作无滑动的滚动。求圆柱体在平衡位置附近作微幅振动的方程及固有频率。

解：本题仍然采用能量法求解。圆柱体在圆柱面内作无滑动的滚动时，就相当于圆柱体绕着滚道曲率中心点 O 摆动。设摆动角为 θ，如图 2.2.6 所示。

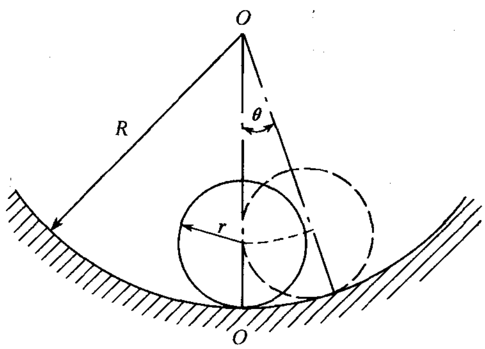


图 2.2.6 滚摆系统

圆柱体在摆动的任一瞬时位置，圆柱体的动能

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{k}} &= \frac{1}{2}mv_{\text{质心}}^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}m[(R-r)\dot{\theta}]^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{mr^2}{2}\left[\frac{(R-r)\dot{\theta}}{r}\right]^2 \\ &= \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

圆柱体的势能

$$E_{\mathrm{p}} = mg(R-r)(1-\cos\theta)$$

将 E_{k}, E_{p} 代入式(2.2.9)，得圆柱体在平衡位置附近作微幅($\sin\theta\approx\theta$)振动的方程

$$\frac{3}{2}m(r-r)^2\ddot{\theta} + mg(R-r)\theta = 0$$

或 $$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R-r)}\theta = 0$$

固有频率为

$$p = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}$$

在用能量法计算时，势能可以包括系统的弹性势能以及重力势能。但不论系统的势能表示式中是否包括重力势能或其他势能，总可以选取系统的静平衡位置处的势能为它的零基准值。