报考研究生丛书之四

高等数学复习纲要

下　册

（修订本）

合肥工业大学学报编辑部

报考研究生丛书之四

高等数学复习纲要

（工程数学部份）

张春炎　顾秉硅　蒋和秉
曾华堂　　　　　蔡凤生

合肥工业大学学报编辑部

编辑说明

《报考研究生丛书》是为了帮助广大青年学生复习有关课程，应考研究生，根据部颁教学大纲和招考研究生的要求而编写的，包括政治、英语、化工、数学、物理、力学等类课程。旨在使同学们通过学习，进一步掌握基本原理、明确基本概念、提高分析问题和解决问题的能力。本丛书可作为在校学生辅导读物，也可供有关教师和工程技术人员参考。

《报考研究生丛书》主编宋权、副主编席庆义。

丛书之四《高等数学复习纲要》下册，共有五章，包括《线性代数》、《概率论》、《场论》、《复变函数》、《数学物理方程》等内容。参加本书编写的有（以章次为序）：张春人、顾秉琏、蒋和理、曾华室、蔡凤生。本书由万迪生、苏家铎审定。

由于我们水平有限，书中难免有缺点甚至错误，欢迎读者批评指正。

一九八三年七月

目　　录（下册）

第四章　复变函数

第五章　数学物理方程

第一章 线性代数

I 内容提要

（一）n阶行列式

1. 四阶行列式： 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}$$

其中A_{1j}，$j=1,2,3,4$，是由四阶行列式中去掉第一行及第j列而余下来的三阶行列式再乘以$(-1)^{1+j}$，

2. n阶行列式： 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

其中A_{1j}，$j=1,2,\cdots,n$，是由n阶行列式中去掉第一行及第j列而余下来的$n-1$阶行列式再乘以$(-1)^{1+j}$，并称A_{1j}是a_{1j}的代数余子式。a_{ij}的代数余子式类似定义。

3. n阶行列式的性质

性质一　行列互换，行列式不变。

这个性质表明了行列式中行、列地位的对称性，由此可见，行列式中有关行的性质对列也同样成立。

性质二　行列式中某行的公因子可以提出来。

由性质二可以推出：如果行列式中有一行为零，那么行列式为零。

性质三　如果行列式中某一行是两组数的和，那么这个行列式就等于两个行列式之和。

性质四　对换行列式中两行的位置，行列式反号。

性质五　如果行列式中有两行成比例，那么行列式等于零。

性质六　把某一行的倍数加到另一行，行列式不变。

性质七　行列式的值等于它的某一行(列)与其代数余子式之积的和；行列式的某一行(列)与另一行(列)的代数余子式之积的和等于零。即

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{ji}=\begin{cases} D & k=j \\ 0 & k\neq j \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ij}=\begin{cases} D & k=j \\ 0 & k\neq j \end{cases}$$

(二)克莱姆法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数行列式$D\neq 0$，那么方程组有解，并且解是唯一的。

表示成：　$x_i=\frac{D_i}{D}$　$(i=1,2,\cdots,n)$

其中D是方程组的系数行列式，D_i是把D中第i列（即x_i的系数）的元素换成常数$b_i(i=1,2,\cdots,n)$所构成的行列式。

(三)消元法

克莱姆法则在理论上是一个十分完善的结果，但在具体应用克莱姆法则求解时，要计算$n+1$个n阶行列式，计算量很大，所以，在解线性方程组时，一般用消元法来计算。

1.线性方程组的初等变换　下列变换：

(1) 用一个非零的数乘一个方程；

(2) 用一个数乘一个方程加到另一个方程上去；

(3) 互换两个方程的位置。

称为线性方程组的初等变换。初等变换把方程组变成与它同解的方程。

2.阶梯形方程组定理

如果方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$

的系数行列式$D\neq 0$，则此方程组可用初等变换化成形如

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3+\cdots+c_{1n}x_n=d_1 \\ \qquad c_{22}x_2+c_{23}x_3+\cdots+c_{2n}x_n=d_2 \\ \qquad\qquad c_{33}x_3+\cdots+c_{3n}x_n=d_3 \\ \qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n=d_n \end{cases}$$

的阶梯形同解方程组，其中c_{11}，c_{22}，…，c_{rr}全不为零。

其实，在作初等变换简化方程时，只是对这些方程的系数进行变换，为了简单起见可将未知量省略不写，而将系数列成一个表即矩阵，进行行变换，这样做既简单而又不易出错，见例题。

（四）线性方程组

当方程的个数与未知数的个数不相等时，克莱姆法则不再适用，需要引入向量和矩阵的概念。

1.矩阵

(1) 定义：由$s\times n$个数排成的s行n列的表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

称为一个$s\times n$矩阵。(1) 中的数 a_{ij} ($i=1,2,3\cdots s$; $j=1,2,3\cdots,n$)称为矩阵的元素，i称为行标，j称为列标。矩阵常用A，B，…，或者(a_{ij})，(b_{ij})，…或者A_{sn}，B_{sn}…，或者$(a_{ij})_{s\times n}$，$(b_{ij})_{s\times n}$，…表示。

矩阵A的行数、列数皆为n时称A为n级方阵。

两矩阵的行、列数分别相等，并且对应元素都相等，就称这两矩阵相等。

(2) 矩阵的初等行变换：是指对于矩阵施行下列三种变换

① 用一个非零数乘矩阵的一行；

② 把矩阵某行的k倍加到另一行上去；

③ 互换矩阵中两行的位置。

(3) 行简化阶梯形矩阵：是指满足下列三条件的矩阵

① 零行在下方(如果有的话)；

② 各行首非零元的列标随着行标的递增而严格增大；

③ 各行首非零元都是1，并且所在列的其余元素全为零。只满足①及②者称为阶梯形矩阵。

可以证明，任意一个矩阵总可以经过一系列初等行变换变成阶梯形矩阵，从而可以变成行简化阶梯形矩阵。

2.线性方程组有解的充要条件

线性方程组 $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \tag{2}$$

称 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$，$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$

为(2)的系数矩阵及增广矩阵。

显然(2)可用$\overline{A}$表示。因为线性方程组可经初等变换化为同解方程组，而对线性方程组作初等变换相当于对$\overline{A}$作初等行变换，但$\overline{A}$通过初等行变换可化为阶梯形矩阵，故方程组(2)可通过初等变换化成同解的阶梯形方程组。设(2)化为

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n = d_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1} \end{cases} \tag{3}$$

其中$c_{ii} \neq 0 (i=1,2,\cdots,r)$，最后一些“$0=0$”已经去掉。

因为(2)(3)同解，所以方程组(2)有解的充要条件是$d_{r+1}=0$。

（五） n维向量空间

1.一些概念

定义1 n个数组成的有序数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为一个n维向量，其中a_i称为向量的第i个分量。

当$n=2$，$n=3$时即几何中的向量。

定义2 如果n维向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$中 $a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$，就称$\alpha=\beta$。

定义3 设$\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$，$\beta=(b_1,\cdots,b_n)$，k为一个数，则定义：**加减法**$\alpha\pm\beta=(a_1\pm b_1,\cdots,a_n\pm b_n)$**数乘**
$k\alpha=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$

向量的加减法与数乘统称为向量的**线性运算**。

定义4 分量全为零的向量$(0,0,\cdots,0)$称为零向量，记作0；向量$(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$称为$\alpha=(a_1,a_2,\cdots a_n)$的负向量，记作$-\alpha$

要注意，维数不同的零向量尽管都用“0”表示，但它们是不相同的。

2.向量运算的基本规则

设α,β,γ是同维向量，k,l是数，容易证明

(1)$\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

(2)$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$；

(3)$k(l\alpha)=(kl)\alpha$，$1\cdot\alpha=\alpha$；

(4) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

(5) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

(6) $\alpha+0=\alpha$;

(7) $\alpha+(-\alpha)=0$;

(8) $0\alpha=0$, $(-1)\alpha=-\alpha$, $k0=0$;

(9)如果 $k\neq0,\alpha\neq0$,那么$k\alpha\neq0$。

3. n维向量的全体，同时考虑到定义在它们上面的线性运算，称为n维向量空间。

4.向量的线性相关与线性无关

定义5 设α, β_1, $\beta_2\cdots$, β_s都是n维向量，如果存在常数k_1, k_2, $\cdots$, k_s, 使得$\alpha=k_1\beta_1+\cdots+k_s\beta_s$则称$\alpha$是$\beta_1,\cdots,\beta_s$的一个线性组合，也称$\alpha$可以由$\beta_1,\cdots,\beta_s$线性表出。

据此定义知，零向量可由任意向量组线性表出，

$$0=0\cdot\beta_1+0\cdot\beta_2+\cdots+0\beta_s$$

系数全为零的线性表出称为平凡的线性表出，否则称为非平凡的线性表出。

定义6 向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$称为线性相关，如果零向量可由$\beta_1,\cdots\beta_s$非平凡的线性表出，即有不全为零的数$k_1,\cdots,k_s$ $(s\geqslant1)$使 $k_1\beta_1+\cdots+k_s\beta_s=0$

例如$\beta_1=(1,2,3)$, $\beta_2=(2,4,6)$, $\beta_3=(1,3,4)$是线性相关的，因为 $2\beta_1-\beta_2+0\cdot\beta_3=0$。

定义7 如果$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$向量组不是线性相关，便称是线性无关的。即零向量只能由$\beta_1,\cdots,\beta_s$平凡的线性表出，或$k_1\beta_1+\cdots k_s\beta_s=0$时，则必$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$

5.线性相关与线性无关的一些定理

设$\alpha_1=(a_{11},\cdots,a_{1n}),\cdots,\alpha_s=(a_{s1},\cdots,a_{sn})$

$$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

（1）β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出的充要条件是下述线性方程组有解：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{s1}x_s=b_1 \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{sn}x_s=b_n \end{cases}$$

（2）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关的充要条件是下述齐次线性方程组有非零解：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{s1}x_s=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{sn}x_s=0 \end{cases}$$

特别，当 $s=n$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关的充要条件是：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

（3）如果$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关，而$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$线性相关，那么，$\beta$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表出。

定义8 若向量组（Ⅰ）：$\alpha_1,\cdots,\alpha_t$中每一向量可由向量组（Ⅱ）：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表出，则说（Ⅰ）可由（Ⅱ）线性表出；若（Ⅰ）与（Ⅱ）可互相线性表出，则说（Ⅰ）与（Ⅱ）等价，记为（Ⅰ）≅（Ⅱ）。等价的二向量组具有反身性、对称性和传递性。

定义9 向量组的一个部分组称为一个极大线性无关组，如果满足：1°部分组本身线性无关；2°再任添一个向量就线性相关。极大无关组中向量的个数，称为向量组的秩。

（4）一个向量组线性相关的充要条件是：其中有一个向

量可由其它向量线性表出。

（5）如果向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$可由$\beta_1,\cdots,\beta_s$线性表出，且$r>s$，那么$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$一定线性相关。

（6）多于n个的n维向量组一定线性相关。

(7)等价的线性无关的向量组所含的向量个数是相同的。

（8）向量组的极大线性无关组与原向量组是等价的。

（9）等价的向量组有相同的秩。

(10)包含零向量的向量组一定是线性相关的。特别地，一个向量线性相关的充要条件是这个向量为零向量。

注意：一个同维向量组不是线性相关就是线性无关，二者必居其一，且仅居其一，因此上述线性相关的事实，可以推得相应的关于线性无关的事实，反之亦然。例如在（10）中，用线性无关的语言来说，应为："一个无关的向量组必不含零向量，特别地，一个向量线性无关的充要条件是这个向量是非零向量"。

(11)若n维向量的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则在每个向量添加一分量得到n+1维向量的向量组$\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_s'$仍然线性无关，按上述"注意"，又可说成：

若n维向量的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则在每一向量减去一个分量得到n-1维向量的向量组$\alpha_1'',\cdots,\alpha_s''$必线性相关。

(12)若向量组的部分向量线性相关，则原向量组必线性相关；若原向量组线性无关，则部分向量也线性无关。

(六)线性方程组解的结构

1.矩阵的秩

（1）定义：矩阵A中任取k行、k列按原顺序组成的行列式称为矩阵A的k阶子式。A中最大的不为零的行列式的阶数r称为矩阵A的秩。

（2）对矩阵的列进行三种初等变换称为矩阵的列变换。矩阵行变换、列变换统称为矩阵的初等变换。

矩阵经初等变换后，不改变矩阵的秩，因此常用初等变换来求矩阵的秩。

（3）矩阵$A_{s\times n}$中每一行看成一向量，每一列也看成一向量，分别称为矩阵的s个行向量及n个列向量。

矩阵行向量组的秩等于列向量组的秩等于矩阵的秩。

2.线性方程组有解的判别定理

线性方程组 $$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases} \tag{1}$$

有解的充要条件是：秩(A)＝秩$(\overline{A})$

3.线性方程组解的个数

齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\quad\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases} \tag{2}$$

如果秩(A)＝n，(2) 只有零解；

如果秩(A)＝r＜n，(2) 有非零解，此时方程组中有n－r个自由未知量，有无穷多解，其一般解中有r个未知量由其余n－r个自由知量线性表示；

如果s＝n则 (2) 有非零解的充要条件是：系数行列式等于零。

对于一般线性方程组（1）

如果秩(A)＝秩（$\overline{A}$）＝n，则（1）有唯一解

如果秩(A)＝秩（$\overline{A}$）＝$r<n$，则（1）有$n-r$个自由未知量。

4.齐次线性方程组解的结构

解向量：若$x_1=c_1,\cdots,x_n=c_n$是方程组的解，则称：$\alpha=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$是方程组的**解向量**。（简称解）

若α,β是（2）的解，k_1,k_2为任意常数，则$k_1\alpha_1+k_2\beta_2$也是（2）的解

设$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$是（2）的一组解，如果：$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$线性无关；（2）的任一个解(向量）都能表成$\eta_1,\cdots,\eta_t$的线性组合，则称$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$是（2）的**基础解系**。

当秩(A)＝r时（2）的基础解系包含$n-r$个解向量。

齐次线性方程组解的结构：

如果$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$是（2）的一个基础解系，则（2）的全部解就是：$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$。其中$k_1$，$k_2$，…，$k_{n-r}$是任意数。

5.非齐次线性方程组解的结构

（2）称为（1）的导出组。

如果α,β是（1）的解，则$\alpha-\beta$是导出组（2）的解；如果α是（1）的解，γ是（2）的解，则$\alpha+\beta$是（1）的解。

解的结构：如果γ_0是（1）的一个解(称为特解)，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$是（2）的基础解系，则（1）的全部解就是$\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$，其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$是任意数。

（七）矩阵

1.矩阵的一些概念及运算

（1）加减法　设$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$同行同列，则$A=(a_{ij}\pm b_{ij})_{s\times n}$。

（2）零阵与负阵　元素都是零的矩阵称为零阵，记为$O_{s\times n}$或O；而$-A=(-a_{ij})$称为矩阵A的负矩阵。

（3）矩阵的乘法　设$A=(a_{ij})_{sn}$，$B=(b_{ij})_{nm}$

令　$c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ $(i=1,2,\cdots,s;\ j=1,2,\cdots,m)$

则
$$C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{sm}\end{pmatrix}$$

称为A与B的乘积，记为$C=AB$或$(a_{ij})_{s\times n}\cdot(b_{ij})_{n\times m}=(c_{ij})_{s\times m}$

（4）线性方程组的矩阵形式

设
$$\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{s1}x_1+\cdots+a_{sn}x_n=b_s\end{cases}$$

令　$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn}\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_s\end{pmatrix}$

则方程组写为　$AX=B$

（5）单位矩阵