矩阵论及其应用

雷纪刚　唐平　田茹　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

矩阵论及其应用

雷纪刚 唐 平 田 茹 编著

机 械 工 业 出 版 社

本书共分八章，介绍矩阵论的基本内容和方法，主要包括线性代数基础、Jordan 链、正规矩阵、矩阵的几种分解、矩阵的函数演算及矩阵微积分．书中配有一定的习题．

本书可作为工科硕士研究生教材，也可以作为工程技术人员参考用书．

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论及其应用/雷纪刚等编著．—北京：机械工业出版社，2005.8

ISBN 7-111-17265-5

Ⅰ．矩…　Ⅱ．雷…　Ⅲ．矩阵－理论　Ⅳ．O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 096349 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037)
策　　划：胡毓坚　责任编辑：车　忱　版式设计：霍永明
责任校对：张晓蓉　封面设计：饶　薇　责任印制：陶　湛

北京铭成印刷有限公司印刷

2005 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/16・12 印张・266 千字
0001—3000 册
定价：18.00 元

前　言

《矩阵论及其应用》是高等学校数学专业的一门基础课，也是工科硕士研究生的一门重要的必修课．矩阵理论在数学科学与其他科学技术领域都有着广泛的应用，而且已成为现代各科技领域处理大量有限维空间形式与数量关系的强有力的工具和方法．对于从事工程技术工作研究和学习的专家来说，掌握矩阵理论和方法是必不可少的．

矩阵理论是丰富和完备的，小小的一本书不可能介绍很多的东西．本书是作者参考教育部硕士研究生“矩阵论及其应用”的大纲和多年来矩阵论教学讲义的基础上编写完成的，主要内容有线性空间、线性变换、矩阵的 Jordan 标准形、正规矩阵、矩阵的几种分解、矩阵的函数演算及矩阵微积分．为了使读者学习到矩阵理论并学会应用矩阵的理论和方法解决实际问题，作者根据多年从事矩阵论课程教学工作的经验，在查阅了大量参考资料的基础上，力求理论介绍简明化、方法总结系统化、例题解法典型化．同时，我们还编入了求逆矩阵和解线性方程组时的误差估计、矩阵的 Kronecker 积和拉直、微分方程的稳定性分析、矩阵的广义逆等内容，以便读者应用时参考．另外作者也给出了两个有意义的结果：①任一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正规阵的充要条件是它的 Hermite 伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\overline{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}})$ 可表示为 $\boldsymbol{A}$ 的一个多项式；②对任一个非奇矩阵 $\boldsymbol{A}$，均存在矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{A}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}$．

本书由雷纪刚副教授、唐平副教授和田茹副教授编著，雷纪刚进行了全稿的统编工作．在编写过程中得到北京信息科技大学研究生部和基础部与西安理工大学研究生部和理学院领导及同事们很大的鼓励和支持，作者在此深表谢意．

限于作者水平，书中难免有不当与疏漏之处，敬请各位专家批评指正．

作　者

矩阵论常用符号简表

$\boldsymbol{O}$	在不同的场合表示相应行数或列数的零矩阵
$\boldsymbol{\theta}$	零向量
$\boldsymbol{C}^{m\times n}$(或 $\boldsymbol{M}^{m\times n}$)	所有 $m\times n$ 复元素矩阵的全体
$\boldsymbol{R}^{m\times n}$(或 $\boldsymbol{M}^{m\times n}(\boldsymbol{R})$)	所有 $m\times n$ 实元素矩阵的全体
$\boldsymbol{M}_n$	表示所有 n 阶方阵
$\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{R})$	表示所有 n 阶实方阵
$\boldsymbol{C}_r^{m\times n}$	$\boldsymbol{C}^{m\times n}$ 中所有秩为 r 的矩阵的全体
$\boldsymbol{R}_r^{m\times n}$	$\boldsymbol{R}^{m\times n}$ 中所有秩为 r 的矩阵的全体
$\boldsymbol{SR}^{n\times n}$	所有 $n\times n$ 实对称矩阵的全体
$\boldsymbol{SR}_0^{n\times n}$	所有 $n\times n$ 实对称非负定矩阵的全体
$\boldsymbol{C}^n$	所有复 n 维列向量的全体(即 $\boldsymbol{C}^{n\times 1}$)
$\boldsymbol{R}^n$	所有实 n 维列向量的全体(即 $\boldsymbol{R}^{n\times 1}$)
$\boldsymbol{C}$	所有复数的全体(即 $\boldsymbol{C}^1$)
$\boldsymbol{R}$	所有实数的全体(即 $\boldsymbol{R}^1$)
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}'$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置
$\boldsymbol{A}^{-1}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆
$\boldsymbol{A}^{-}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆
$\boldsymbol{A}^{+}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 **Moore-Penrose** 广义逆
$\boldsymbol{A}>\boldsymbol{O}$	指矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的
$\boldsymbol{I}$(或 $\boldsymbol{E}$)	单位矩阵
$\boldsymbol{I}_n$	$n\times n$ 单位矩阵
$\det(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式
$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩
$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹
$\lambda(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值的全体
$\rho(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径
$\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵
$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有列向量张成的子空间
$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间

$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$	向量 $\mathbf{x}$ 与向量 $\mathbf{y}$ 的内积
$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的内积
$\Vert \mathbf{x} \Vert_2$	向量 $\mathbf{x}$ 的 Euclid 范数
$\Vert \boldsymbol{A} \Vert_2$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱范数
$\Vert \boldsymbol{A} \Vert_F$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Frobenius 范数
$\dim(\boldsymbol{V})$	线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的维数
$\in$	元素属于
$\bar{\in}$	元素不属于
$\subset$	集合含于
$\cup$	集合的并
$\cap$	集合的交
$\varnothing$	空集
$\Longleftrightarrow$	等价
$\Rightarrow$	蕴涵
$\forall$	所有的或一切的
$\oplus$	直和
δ_{ij}	Kronecker 符号 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$
$\mathrm{sgn}(x)$	函数 $\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$
$\boldsymbol{E}_i(+)$	投影阵

目　录

第一章

线性代数基础

本章介绍线性代数的基本知识，并且补充一些行列式与矩阵的常用理论及方法，这些内容对于本书后面大部分章节是十分必要的.

第一节　矩阵与行列式

一、矩阵

矩阵的定义和运算一般教材中都有详细的介绍，这里不再赘述，只对矩阵的分块乘法在求逆与行列式计算中的作用作一些补充. 但是读者务必注意，方阵的行列式伴随阵都是方阵的元素的连续函数.

例 1　设方阵 $\boldsymbol{F}$ 具有如下的分块

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$$

其中，$\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 的、$\boldsymbol{D}$ 是 $m\times m$ 的、$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 的、$\boldsymbol{C}$ 是 $m\times n$ 的，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，$|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|\neq 0$，求 $\boldsymbol{F}$ 的逆及行列式.

解　将矩阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m\end{pmatrix}$$

进行初等变换

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} & -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}_m\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B & A^{-1} & O \\ O & I_m & -GCA^{-1} & G \end{pmatrix} \quad \text{其中 } G=(D-CA^{-1}B)^{-1}$$

$$\to\begin{pmatrix} I_n & O & A^{-1}+A^{-1}BGCA^{-1} & -A^{-1}BG \\ O & I_m & -GCA^{-1} & G \end{pmatrix}$$

所以
$$F^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}BGCA^{-1} & -A^{-1}BG \\ -GCA^{-1} & G \end{pmatrix}.$$

由上面计算可知，有

$$\begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ O & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & O \\ O & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & O \\ -C & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_n & O \\ O & I_m \end{pmatrix},$$

所以有
$$|G||A^{-1}|\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=1,$$

因而
$$|F|=\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|.$$

例 2 求证

$$|\lambda I-AB|=|\lambda I-BA|$$

证明 由于

$$\begin{pmatrix} \lambda I & -B \\ O & \lambda I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda I & B \\ A & \lambda I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda^2 I-BA & O \\ \lambda A & \lambda^2 I \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda I & O \\ -A & \lambda I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda I & B \\ A & \lambda I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda^2 I & \lambda B \\ O & \lambda^2 I-AB \end{pmatrix}$$

两边取行列式，可得

$$(\lambda^2)^n\begin{vmatrix} \lambda I & B \\ A & \lambda I \end{vmatrix}=(\lambda^2)^n|\lambda^2 I-BA|=(\lambda^2)^n|\lambda^2 I-AB|.$$

令 $t=\lambda^2$，有

$$t^n|tI-BA|=t^n|tI-AB|.$$

当 $t=0$，即 $\lambda=0$ 时，原式显然成立. $t\neq 0$ 时，可得

$$|tI-BA|=|tI-AB|.$$

再令 $t=\lambda$，则有 $|\lambda I-AB|=|\lambda I-BA|$.

例 1、例 2 在后面求逆及特征值讨论中非常有用.

二、范德蒙矩阵与范德蒙行列式

形式如下的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

称为**范德蒙**(Vandermonde A. T.)矩阵，它的行列式称为范德蒙行列式，记为 $V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 由数学归纳法可证

$$V(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$$

当 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 互异时 $V(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$，即范德蒙矩阵为非奇异矩阵. 这个行列式在确定一些问题解的存在性和惟一性及计算一些行列式的值时是十分重要的工具.

例 3 设 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 互异，求证存在一个惟一的 $(n-1)$ 次多项式 $P(x)$，使 $P(x_i)=y_i(i=1,2,\cdots,n)$.

证明 设 $(n-1)$ 次多项式 $P(x)$ 如下

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$

则有：

$$\begin{cases}P(x_1)=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_{n-1}x_1^{n-1}=y_1\\ P(x_2)=a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+\cdots+a_{n-1}x_2^{n-1}=y_2\\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\ P(x_n)=a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_{n-1}x_n^{n-1}=y_n\end{cases}$$

它的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=V(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$$

所以存在惟一的解.（克莱姆法则） $a_i=\dfrac{D_i}{D}$

$$D_i=\begin{vmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1^{i-2} & y_1 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{i-2} & y_2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{i-2} & y_n & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n}l_i(x)y_i \qquad l_i(x)=\prod_{j\neq i}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}.$$

例 4 计算行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\\ x_1^{n} & x_2^{n} & x_3^{n} & \cdots & x_n^{n}\end{vmatrix}$$

解 构造 $n+1$ 阶行列式

$$V(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1}\\ x_1^{n} & x_2^{n} & \cdots & x_n^{n} & y^{n}\end{vmatrix}=\Big[\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\Big]\cdot\prod_{i=1}^{n}(y-x_i)$$

另一方面行列式按第 $n+1$ 列展开：

$$V(x_1,\cdots,x_n,y)=a_0(x_1,\cdots,x_n)+a_1(x_1,\cdots,x_n)y+\cdots+a_n(x_1,\cdots,x_n)y^n$$

其中 $a_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(-1)^{(n+n+1)}D_1=-D_1$

而 $V(x_1,\cdots,x_n,y)=\Big[\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\Big]y^n-\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\Big)\Big[\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\Big]y^{n-1}+\cdots\cdots$

比较系数得

$$D_1=\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\Big)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$$

三、柯西(Cauchy)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_n}\\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_2+b_n}\\ \vdots & & & \vdots\\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_n+b_n}\end{vmatrix}$$

称为柯西行列式，其中$\frac{1}{a_i+b_j}$有意义.

引理

$$D_n=\frac{\prod\limits_{i>j}(a_i-a_j)(b_i-b_j)}{\prod\limits_{i,j}(a_i+b_j)}\qquad\begin{pmatrix}i=1,2,\cdots,n\\ j=1,2,\cdots,n\end{pmatrix}$$

证明 在D_n中首先用最后一行乘以-1，分别加到其他行中可得：

$$D_n=\begin{vmatrix}\frac{a_n-a_1}{(a_1+b_1)(a_n+b_1)} & \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_2)(a_n+b_2)} & \cdots & \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_n)(a_n+b_n)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{a_n-a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_1)(a_n+b_1)} & \frac{a_n-a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_2)(a_n+b_2)} & \cdots & \frac{a_n-a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_n)(a_n+b_n)}\\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\prod\limits_{i<n}(a_n-a_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(a_n+b_i)}\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n}\\ \vdots & & & \vdots\\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n}\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

然后在上面最后一式中用最后一列乘以-1，加到其他列中.

$$D_n=\frac{\prod\limits_{i<n}(a_n-a_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(a_n+b_i)}\begin{vmatrix}\frac{b_n-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_1+b_{n-1})(a_1+b_n)} & \frac{1}{a_1+b_n}\\ \vdots & & & \vdots\\ \frac{b_n-b_1}{(a_{n-1}+b_1)(a_{n-1}+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_{n-1}+b_{n-1})(a_{n-1}+b_n)} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n}\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\prod\limits_{i<n}(a_n-a_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(a_n+b_i)}\cdot\frac{\prod\limits_{i<n}(b_n-b_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(a_i+b_n)}\cdot D_{n-1}$$

$$=\frac{\prod\limits_{i<n}(a_n-a_i)(b_n-b_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(a_n+b_i)\prod\limits_{i=1}^{n-1}(b_n+a_i)}\cdot D_{n-1}$$

……

$$=\frac{\prod\limits_{i<j}(a_i-a_j)(b_i-b_j)}{\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{n}(a_i+b_j)}$$

例 5 在柯西行列式中若 $a_i=b_i=i$，求 D_n.

解 $$D_n=\frac{\prod\limits_{i>j}(i-j)^2}{\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{n}(i+j)}=\frac{(1!)^2(2!)^2(3!)^2\cdots[(n-1)!]^2}{\frac{(n+1)!}{1!}\frac{(n+2)!}{2!}\frac{(n+3)!}{3!}\cdots\frac{(2n)!}{n!}}=\frac{(1!)^3(2!)^3[(n-1)!]^3n!}{(n+1)!\ (n+2)!\ \cdots(2n)!}$$

这个行列式对于平方逼近最小误差计算有十分重要的作用.

第二节 线性空间

一、定义及例子

定义 1 设 V 是一个非空集合，F 是一个数域(实数域或复数域)，在集合 V 的元素之间定义了一种代数运算，叫做加法，即对于任意两个元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$，在 V 中都有惟一的一个元素 $\boldsymbol{\gamma}$ 与它们对应，称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和，记为 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$; 在数域 F 与集合 V 的元素之间还定义了一种运算，叫做数量乘法，对于 F 中任一个数 k 与 V 中任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$，在 V 中都有惟一的一个元素 $\boldsymbol{\delta}$ 与它们对应，称为 k 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的数量乘积，记为 $\boldsymbol{\delta}=k\boldsymbol{\alpha}$. 若加法与数量乘法满足下述八条规则，那么 V 称为数域 F 上的线性空间.

加法满足下面四条性质：

1） $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$

2） $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$

3） 在 V 中有一个元素 0，对于 V 中任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 都有

$$\boldsymbol{\alpha}+0=0+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$$

4） 对于 V 中每一个元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 都有 V 中的元素 $\boldsymbol{\beta}$，使得

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=0 \quad (\boldsymbol{\beta}\text{称为}\boldsymbol{\alpha}\text{的负元素})$$

数量乘法满足下面两条规则：

5） $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$

6） $k\cdot(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$

数量乘法与加法满足下面两条规则

7） $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$

8） $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$

其中 k、l 表示数域 F 中的任意数；$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 等表示集合 V 中任意元素.

当 F 为实数域时，V 称为实空间，当 F 为复数域时，V 称为复空间. 由定义可证零元素是惟一的，负元素也是惟一的. 这是线性空间的两个基本性质.

定义 2 设 $\{\mathbf{x}^{(1)},\cdots,\mathbf{x}^{(k)}\}$ 是线性空间 V 中的任一组向量，$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k\}$ 是 F 中任一组数，

$$\mathbf{y}\doteq\lambda_1\mathbf{x}^{(1)}+\lambda_2\mathbf{x}^{(2)}+\cdots+\lambda_k\mathbf{x}^{(k)}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mathbf{x}^{(i)}$$

也是 V 中的向量(元素)，称 $\mathbf{y}$ 是向量组 $\{\mathbf{x}^{(1)},\cdots,\mathbf{x}^{(k)}\}$ 的一个线性组合，$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mathbf{x}^{(i)}$ 叫做 $\mathbf{y}$ 的一个线性表出.

例 6 $V=\{\mathbf{x}\mid\mathbf{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}},\xi_i\in C\}$，$F=C$，又设 $\mathbf{y}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)^{\mathrm{T}}\in V$，$\lambda\in C$.

规定：

1） $\mathbf{x}=\mathbf{y}\Leftrightarrow\xi_i=\eta_i$，$i=1,2,\cdots,n$

2） $\mathbf{x}+\mathbf{y}=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n)^{\mathrm{T}}$

3） $\lambda\cdot\mathbf{x}=(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\cdots,\lambda\xi_n)^{\mathrm{T}}$

4） $\boldsymbol{\theta}=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$

则很容易看出 V 是一个复的线性空间，叫做 n 维复向量坐标空间或叫做 n 维复坐标向量空间，记作 C^n. 类似地，将例 6 中的 C 全换成 R，则可得 n 维实坐标向量空间，记之为R^n. C^n 与R^n 是最常用的两个线性空间.

例 7 $V=\{\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},a_{ij}\in C\}$，$F=C$，又设 $B=(b_{ij})_{m\times n}$，$\lambda\in C$，规定

1） $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$

2） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})$

3） $\lambda\boldsymbol{A}=(\lambda a_{ij})$

4） V 中的零向量为 $m\times n$ 零矩阵.

这也是一个复的线性空间，一般记为 $C^{m\times n}$，同样有 $R^{m\times n}$，为一个实的线性空间.

例 8 $V=\left\{p(x)\mid p(x)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x^{n-i},\ \alpha_i\in R\right\}$，适当定义运算这也是一个实的线性空间.

例 9 $V=\{\mathbf{x}\in C^n\mid\boldsymbol{A}\mathbf{x}=\boldsymbol{\theta}\}$ 其中 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\in C^{m\times n}$，$F=C$. 定义与 C^n 中同样运算，这也是一个复的线性空间，叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间(或核)，也叫做方程 $\boldsymbol{A}\mathbf{x}=\boldsymbol{\theta}$ 的解空间，记为 $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A})$.

例 10 $A\in C^{m\times n}$，$V=\{\mathbf{y}\in C^m\mid\mathbf{y}=A\mathbf{x},\mathbf{x}\in C^n\}$，$F=C$. 定义与 C^m 中相同的运算，V 是一个复的线性空间，叫做 $\boldsymbol{A}$ 的列空间，或 $\boldsymbol{A}$ 的值域，记之为 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$.

例 11 全体正实数 R_1，定义加法和数乘(此例中,为明显起见,加法符号用⊕,数乘符号用∘)为 $a\oplus b=ab$，$k\circ a=a^k$，$k\in R$. 可以证明 R_1 构成实数域 R 上的线性空间.

从这个例子可以看到，所定义的“加法”运算，是集合中的两个元素之间的运算，定义的“数乘”运算是数域中的一个元素与集合中的一个元素进行的运算，对于线性空间来说，这两种运算一是要封闭的，二是要满足八条规则.

这样，一个非空集合，对于一个数域，定义两种运算，满足八条规则，这种集合就是一个线性空间.

二、基底与维数

定义 3 设 V 是线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 为 V 中一组向量，如果存在不全为零的

一组数 λ_1，…，λ_s 使

$$\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i \triangleq \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\theta}$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关．否则，称 $\boldsymbol{\alpha}_1$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关．

显然，线性无关的定义等价于：

$$\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\theta}\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_s=\boldsymbol{\theta}$$

定理 1 设 V 为线性空间，$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$、$\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 是 V 中的两组向量．如果 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 无关，且可被 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 表示，则有 $r\leqslant s$，且有 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 的 r 个向量存在，不妨设为 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\}$，当用 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 代换它们时所得 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 可将 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 表示．

证明可对 r 用数学归纳法得出．

定义 4 设 S 是线性空间 V 上的子集，如果 S 的任意有限子集都线性无关，且 V 的任何向量均可被 S 表出，则称 S 是 V 的基．

定理 2 如果线性空间 V 的基 S 恰含 n 个向量，则 V 的任何基都恰含 n 个向量．

称有上述性质的线性空间为有限维线性空间，n 为它的维数，记作 $n=\dim V$．

可以验证 C^n、R^n 为 n 维空间，$C^{m\times n}$，$R^{m\times n}$ 为 $m\times n$ 维空间，次数不超过 n 的多项式全体(实的或复的)是 $n+1$ 维线性空间．

定理 3 n 维线性空间中任何 n 个线性无关的向量都是线性空间的一组基．

此定理说明线性空间的基的取法不是惟一的．

若 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 中一组基，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 V 中的任一个向量，由基底定义可知

$$\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{\varepsilon}_i\quad\lambda_i\in F$$

由反证法可证，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是由 $\boldsymbol{\alpha}$ 惟一确定的，叫做 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标．

例 12 V 是所有次数不超过三次的一元实系数多项式(包括零多项式)，F 是实数域 R，按多项式的加法和数乘，构成一个线性空间 $P_3(x)$．向量组 1、x、x^2、x^3 是线性无关的，且可以线性表示 $P_3(x)$ 中任一向量(多项式)，因此可以看成一组基．而向量组 1、$x-2$、$(x-2)^2$、$(x-2)^3$ 也是线性无关的，且 $P_3(x)$ 中的任意向量也可以由这个向量组线性表示，因此也是一组基，该空间是 4 维的．事实上，若

$$k_1\cdot 1+k_2(x-2)+k_3(x-2)^2+k_4(x-2)^3=0$$

设等式左端的多项式为 $f(x)$，由

$f(2)=0$，可得 $k_1=0$，　　$f'(2)=0$，可得 $k_2=0$，

$f''(2)=0$，可得 $k_3=0$，　　$f'''(a)=0$，可得 $k_4=0$．

由于组合式当且仅当 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$ 时才成立，所以 1、$x-2$、$(x-2)^2$、$(x-2)^3$

线性无关，它们也是 $P_3(x)$空间的一组基.

设 $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 在此基下的坐标为$(\lambda_1、\lambda_2、\lambda_3、\lambda_4)$，即

$$g(x)=\lambda_1\cdot 1+\lambda_2(x-2)+\lambda_3(x-2)^2+\lambda_4(x-2)^3$$

将等式两边对 x 求一、二、三阶导数再分别代入 $x=2$，可得：

$\lambda_1=g(2)$，$\lambda_2=g'(2)$，$\lambda_3=\dfrac{g''(2)}{2!}$，$\lambda_4=\dfrac{g'''(2)}{3!}$.

即 $g(x)$在此基下的坐标为$[g(2),g'(2),\frac{1}{2!}g''(2),\frac{1}{3!}g'''(2)]$.

例 13 如果将复数集合 C 看作数域 C 上的线性空间，那么数 1 就是它的基，所以它是一维线性空间，如果将复数集合看作实数域上的线性空间，那么数 1 和 i 是它的一组基，这时空间是二维的. 可见，空间的维数与所考虑的数域有很大的关系.

三、基变换与坐标变换

在 n 维线性空间中，任意 n 个线性无关的向量都可以取作空间的基. 对不同的基，同一个向量的坐标一般是不同的. 下面我们考察随着基的改变，向量的坐标是怎样变化的.

设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}'_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}'_2$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}'_n$ 是 n 维线性空间 V 中的两组基，它们的关系：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}'_1=a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\varepsilon}_n\\ \boldsymbol{\varepsilon}'_2=a_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\varepsilon}_n\\ \qquad\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\varepsilon}'_n=a_{1n}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{2n}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\varepsilon}_n\end{cases}$$

设向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在这两组基下的坐标分别是$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 与$(x'_1,\cdots,x'_n)^{\mathrm{T}}$

即 $\boldsymbol{\alpha}=\sum x_i\boldsymbol{\varepsilon}_i=\sum x'_i\boldsymbol{\varepsilon}'_i$

若将 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$写成

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

相仿地

$$(\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$