



——★适用于各种版本教材★——

新教材知识点

点拨

本丛书编写组 主编

XINJIAOCAI ZHISHIDIANDIANBO

· 高中数学 ·

[立体几何、排列、概率、极限、导数与复数]

…… 绿卡图书——走向成功的通行证……

PASS SERIES—A PASSPORT LEADING TO SUCCESS



中华工商联合出版社
CHINA INDUSTRY & COMMERCE ASSOCIATED PRESS

■丛书策划：鸿鑫文化公司

■策划人：殷树峰

■责任编辑：付德华 魏鸿鸣 胡小英



本套丛书的特点

- 紧扣新课标 牵手高考题 精解知识点 传授新方法
- 重知识积累 强调重难点 关注考查点 直击新高考
- 涵盖考点全 突出综合题 点拨运用法 专题全破解
- 选材重新颖 预测题准确 疑点讲解透 各个皆击破
- 名师联袂编 栏目版式新 科学有特点 考生易识记

..... 绿卡图书——走向成功的通行证

PASS SERIES—A PASSPORT LEADING TO SUCCESS

XINJIAOCAI ZHISHIDIANDIANBO.....

装帧设计/ SOAN 盛琳兰图书品牌机构
www.soan.cn 010-85890655

ISBN 7-80193-423-7



9 787801 934239 >

¥ 10.00

版权所有 盗版必究

ISBN7-80193-423-7/G·126

全套总定价:130.00元

PASS

Series



★适用于各种版本教材★

新教材知识点

点拨

立体几何、排列、概率、
极限、导数与复数

●主 编：田明家 齐振山

●副主编：翟 蕾 吴绍夏

高中数学



中华工商联合出版社
CHINA INDUSTRY & COMMERCE ASSOCIATED PRESS

丛书策划: 鸿鑫文化公司

责任编辑: 付德华 魏鸿鸣 胡小英

装帧设计: SOAN 山东图书品牌机构

图书在版编目(CIP)数据

新教材知识点点拨. 高中理科. 高中数学. 立体几何、排列、
概率、极限、导数与复数 / 《新教材知识点点拨》编写组编. —北
京: 中华工商联合出版社, 2006.7

ISBN 7-80193-423-7

I. 新... II. 新... III. 数学课—高中—升学参考资料
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 066875 号

中华工商联合出版社出版、发行

北京东城区东直门外新中街 11 号

邮编: 100027 电话: 64153909

网址: www.chgslcbs.cn

山东儒杰印务有限公司印刷

新华书店总经销

880×1230 毫米 1/32 印张: 96.25 3210 千字

2006 年 7 月第 1 版 2006 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 7-80193-423-7/G·126

总定价: 130.00 元

学习数学的方法

怎样才能学好数学呢?首先要刻苦、勤奋,它是学好数学的必要条件。除此之外,还应讲究学习方法,要根据数学的特点去学习,只有这样才能提高学习效率。正像一位科学家所说:良好的学习方法能使我们更好地发挥、运用天赋的才能,而拙劣的方法,则可能阻碍才能的发展。由此可见,科学的学习方法对学习数学是多么重要啊!

到底怎样才能学好数学呢?

一、提高听课的效率是关键

学生学习期间,在课堂的时间占了一大部分。因此听课的效率如何,决定着学习的基本状况,提高听课效率应注意以下几个方面:

1. 课前预习能提高听课的针对性

预习中发现的难点,就是听课的重点;对预习中遇到的没有掌握好的有关的旧知识,可进行补习,以减少听课过程中的困难,有助于提高思维能力,预习后把自己理解了的东西与老师的讲解进行比较、分析即可提高自己的思维水平;预习还可以培养自己的自学能力。

2. 听课过程中的科学性

首先应做好课前的物质准备和精神准备,其次就是听课要全神贯注。应做到:耳到、眼到、心到、口到、手到。

耳到:就是专心听讲,听老师如何讲课,如何分析,如何归纳总结。另外,还要听同学们的答问,看是否对自己有所启发。

眼到:就是在听讲的同时看课本和板书,看老师讲课的表情、手势和演示实验的动作,生动而深刻的接受老师所要表达的思想。

心到:就是用心思考,跟上老师的数学思路,分析老师是如何抓住重点,解决疑难的。

口到:就是在老师的指导下,主动回答问题或参加讨论。

手到:就是在听、看、想、说的基础上划出课本的重点,记下讲课的要点以及自己的感受或有创新思维的见解。

若能做到上述“五到”,精力便会高度集中,课堂所学的一切重要内容便会在自己头脑中留下深刻的印象。

二、做好复习和总结工作

1. 做好及时的复习。

复习的有效方法不是一遍遍地看书或笔记,而是采取回忆式的复习:先把书、笔记合起来,回忆老师在课堂上所讲的内容、例题、分析问题的思路和方法等(也可边想边

【接封二】

在草纸上写一写),尽量想得完整些。然后打开笔记与书本,对照一下还有哪些没记清的,把它补起来,就使得当天上课内容巩固下来,同时也就检查了当天课堂听课的效果如何,也为改进听课方法及提高听课效果提出必要的改进措施。

2. 做好单元复习。

学习一个单元后应进行阶段复习,复习方法也同及时复习一样,采取回忆式复习,而后与书、笔记相对照,使其内容完善,而后应做好单元小结。

3. 做好单元小结。

单元小结的内容应包括以下部分。

(1)本单元(章)的知识网络;

(2)本章的基本思想与方法(应以典型例题形式将其表达出来);

(3)自我体会:对本章内自己做错的典型问题应有记载,分析其原因及正确答案,应记下本章你觉得最有价值的思维方法或例题,以及你还存在的未解决的问题,以便今后将其补上。

4. 循序渐进,防止急躁。

同学们要知道,学习是一个长期的巩固旧知、发现新知的积累过程,决非一朝一夕可以完成的。许多优秀的同学在高考时能取得好成绩,其中一个重要原因是他们的基本功扎实,他们的阅读、书写、运算技能达到了自动化或半自动化的熟练程度。

三、进行一定题量的练习

做题的目的在于检查你学的知识是否已经掌握,尤其要讲究做题的效益,即做题后有多大收获,这就需要在做题后进行一定的“反思”,思考一下本题所用的基础知识,数学思想方法是什么,更重要的是养成善于思考的好习惯。

另外,就是无论是作业还是测验,都应把准确性放在第一位,而不是一味地去追求速度或技巧,这是学好数学的重要问题。

需要强调的是,“兴趣”和“信心”是学好数学的最好的老师。这里说的“兴趣”并不是将来去研究数学、做数学家的意思,而主要指的是不反感,不当作负担。“伟大的动力产生于伟大的理想”。只要明白学习数学的重要,你就会有无穷的力量,并逐步对数学感兴趣。有了一定的兴趣,随之信心就会增强,也就不会因为某次考试的成绩不理想而泄气,在不断总结经验和教训的过程中,你的信心就会不断地增强,数学成绩自然就会提高。

要学好数学,对课本知识既要能钻进去,又要能跳出来,结合自身特点,寻找最佳学习方法。华罗庚先生倡导的“由薄到厚”和“由厚到薄”的学习过程就是这个道理,方法因人而异,但学习的四个环节(预习、上课、作业、复习)和一个步骤(归纳总结)是少不了的。

以上几点是编者在多年的教学中要求学生的一些学习做法,在实践中收到了很好的效果,希望对读者有所裨益!

绿卡图书

8000万

读者的正确选择

风靡全国
畅销大江南北惠泽学子

绿卡(英语)图书梦幻惊喜好礼精彩送

- 凡购买绿卡(英语)图书系列丛书的任一本,填写书后所附的《绿卡(英语)图书梦幻惊喜精彩好礼送抽奖卡》邮寄给我们,就有机会参加“绿卡(英语)图书梦幻惊喜好礼精彩送”大抽奖活动。
- 活动详情请向店内营业员咨询,本次活动最终解释权归绿卡(英语)图书梦幻惊喜大抽奖活动办公室所有。

绿卡(英语)图书好礼精彩送

活动时间 第一阶段: 2006.6.1 - 2006.12.31, 第二阶段: 2007.1.1 - 2007.12.30。

奖项设置 每阶段抽出一等奖、二等奖、三等奖、纪念奖等 奖项。

活动内容

- 一等奖 3名: 免费参加绿卡(英语)图书组织的港澳之旅, 参观港澳风景名胜, 游迪士尼乐园!
- 二等奖 10名: 买出惊喜, 豪华大礼等你拿! 奖 PSP 掌上电脑游戏机一台。
- 三等奖 50名: MP3 播放器、电子词典、复读机任选其一。
- 纪念奖 2000名: 每人赠送绿卡(英语)图书精美图书一本。

温馨提示

- 诸多奖品, 惊喜连连, 快乐无限!
- 一张申请卡仅限参加抽奖一次。
- 本次抽奖活动由国家公证机关公证。
- 《中国图书商报》、《中华读书报》、《中国教育报》、《当代歌坛》、《少男少女》、《英语辅导报》上将公布中奖结果, 并通知入选者。

购书抽大奖 GO GO

玩转港澳



抽大奖 游港澳

二等奖 PSP
掌上游戏机

三等奖
任
选其一



请将此表填好寄回, 参加年度抽奖!

绿卡(英语)图书梦幻惊喜精彩好礼送抽奖卡

我谨提出愿意参加并保证以下所填信息真实有效

您购买的这本书是“绿卡(英语)图书”_____系列之《_____》。

购书时间: _____ 购书地点: _____ 电话: _____ 邮编: _____

您的姓名: _____ 学校地址: _____ 班级: _____

您现在使用课本的版本情况:

语文 _____ 数学 _____ 英语 _____ 物理 _____ 化学 _____

历史 _____ 政治 _____ 地理 _____ 生物 _____

您是如何了解到本书的?

☐ 逛书店 ☐ 媒体广告 ☐ 他人介绍 ☐ 其他 _____

您是怎样获得本书的?

☐ 自己在书店购买 ☐ 邮购 ☐ 老师或同学团购 ☐ 他人赠送

PASS

Series

绿卡图书

初中版

巧学活用初中英语语法
初中英语语法 100 考点大串讲
初中英语语法大全全析 1000 题
20 天成功突破中考英语核心词汇
巧记活用初中英语 2000 词
初中英语常考易混词语辨析
初中英语短语、词组大全
(初中英语单词短语掌中宝) 系列
中考专项突破—听力秘笈 (1 书+3 磁带)
中考专项突破—单项选择
中考专项突破—完形填空
中考专项突破—阅读理解
中考专项突破—书面表达与句型转换
中考总复习巅峰训练
中考英语听力步步高 (15 天快训, 1 书+2 磁带)
中考英语听力终极冲刺 (1 书+3 磁带)
初中英语备考全书
2005 年中考英语真题分类解读与应试技巧点拨
中考英语完形填空活页训练卷
中考英语阅读理解活页训练卷
课文英汉对译·全解与习题答案 (七~九年级) 人教新目标
课文语言点全解全析 (七~九年级) 人教新目标
同步听力技巧训练 (七~九年级) 人教新目标
同步经典测控 AB 卷 (七~九年级) 人教新目标
绿卡图书无师自通公式概念背诵掌中宝系列 (9 册)
语文 数学 英语 物理 化学
生物 历史 地理 政治
绿卡图书基础知识积累与运用 (8 册)
语文 数学 英语 物理 化学
生物 历史 地理

16.80 元/册
18.00 元/册
18.00 元/册
8.80 元/册
12.00 元/册
12.00 元/册
8.80 元/册 (估)
4.80 元/册 (估)
24.80 元/套
9.80 元/册
7.80 元/册
8.80 元/册
7.80 元/册
17.80 元/册
18.80 元/套
23.80 元/套
22.00 元/册
14.80 元/册
10.00 元/册
10.00 元/册
10.80 元/册 (估)
11.80 元/册 (估)
5.80 元/册 (估)
8.80 元/册 (估)
6.00 元/册

“串”记“活”用新课标词汇 3500
巧记活用高中英语 3500 词
高中英语常考易混词语辨析
高中英语短语、词组大全
(高中英语单词短语掌中宝) 系列
高考专项突破—听力秘笈 (1 书+3 磁带)
高考专项突破—写作技巧与词汇知识
高考专项突破—完形填空
高考专项突破—阅读理解
高考专项突破—写作技巧与短文改错
20 天成功突破高考完形填空
20 天成功突破高考阅读理解
高考总复习巅峰训练
高考英语听力步步高 (15 天快训, 1 书+3 磁带)
高考听力终极冲刺 (1 书+4 磁带)
高中英语备考全书
名师分题解读 5 年高考英语真题 (另配磁带 2 盘)
高考模拟考场—英语听力终极冲刺 (另配磁带 12 盘)
高考英语完形填空活页训练卷
高考英语阅读理解活页训练卷
经典限时阅读 (一~三)
课文英汉对译·全解与习题答案 (必修 1~5) 人教实验版
课文语言点全解全析 (必修 1~5) 人教实验版
同步听力技巧训练 (必修 1~5) 人教实验版
同步经典测控 AB 卷 (必修 1~5) 人教实验版
课文英汉对译·全解与习题答案 (必修 1~5) 外研版
课文语言点全解全析 (必修 1~5) 外研版
同步听力技巧训练 (必修 1~5) 外研版
同步经典测控 AB 卷 (必修 1~5) 外研版
绿卡图书无师自通公式概念背诵掌中宝系列 (9 册)
语文 数学 英语 物理 化学
生物 历史 地理 政治
绿卡图书新教材知识点拔 (2 8 册)
语文 (4 册) 数学 (3 册) 政治 (3 册) 物理 (4 册)
化学 (4 册) 生物 (2 册) 历史 (3 册) 地理 (5 册)

14.80 元/册 (估)
14.80 元/册
12.80 元/册
12.80 元/册 (估)
4.80 元/册 (估)
23.80 元/套
13.00 元/册
9.00 元/册
11.80 元/册
10.80 元/册
9.80 元/册
9.80 元/册
19.80 元/册
24.00 元/套
29.80 元/套
28.00 元/册
24.80 元/套
98.00 元/套
10.00 元/册
10.00 元/册
12.00 元/册
12.80 元/册 (估)
13.80 元/册 (估)
6.80 元/册 (估)
10.80 元/册 (估)
12.80 元/册 (估)
13.80 元/册 (估)
6.80 元/册 (估)
10.80 元/册 (估)
6.00 元/册

高中版

巧学活用高中英语语法
高中英语语法 100 考点大串讲
高中英语语法大全全析 2000 题
22 天成功突破高考英语核心词汇

18.80 元/册
19.00 元/册
23.00 元/册
9.80 元/册

绿卡图书新教材知识点拔 (2 8 册)
语文 (4 册) 数学 (3 册) 政治 (3 册) 物理 (4 册)
化学 (4 册) 生物 (2 册) 历史 (3 册) 地理 (5 册)



请将此表填好寄回, 参加年度抽奖!

您认为本书最大的优点是: _____

您认为本书的不足之处是: _____

请描述您理想中的助学用书及其他学习辅导资料的特色 (不受学科与级别的限制): _____

请您以 100 分制给本书评分: 60 分以内为极不满意; 80 分以上为满意; 90 分以上为很满意。

☐ 内容质量 ☐ 书的版式 ☐ 书的封面

请将本抽奖卡寄至: 山东省淄博市张店区人民西路 25-3 号宏程名座 A 栋 7 层 (邮编: 255045)

鸿鑫文化读者服务部 (收)

购书汇款地址和联系人: 同上 咨询电话: 0533-2300280 E-mail: hongxinwenhua@126.com



Preface 前言

“授人以鱼，不如授人以渔”，古往今来，做任何事情都要讲究方法，有了好的方法就会事半功倍，数学学习也不例外。面对繁重的学习任务和激烈的高考竞争，有效的学习方法显得特别重要。然而，当前学生的数学学习状况令人担忧：有很大一部分学生高中入学时数学基础较弱，而教师授课速度又太快，学生来不及消化、掌握、巩固所学知识，造成了事实上的“夹生饭”现象；还有一部分学生数学意识不强，思维不活跃，思路单一，对数学有恐惧心理，发出“数学难，难于上青天”的感慨。针对这种情况，面对学生的需求，经过全面调研，精心策划，经有多年送考、经验丰富的优秀教师共同努力，我们郑重推出《新教材知识点点拨●高中数学●立体几何、排列、概率、极限、导数与复数》。

本书是按照最新的考试说明和教学大纲的要求全新设计而成，在完整的知识体系的基础上，根据学生学习中遇到的具体问题，为学生提供有针对性的学习方法。为了便于教师指导，更便于学生学习，本书按照知识点的系统性、渐进性编排，全书共分七章：第一章 直线、平面、简单几何体；第二章 排列、组合和二项式定理；第三章 概率；第四章 概率与统计；第五章 极限；第六章 导数；第七章 复数。

本书的特色栏目如下：

【知识结构】 展示在每一章之首，使学生明确本章需要掌握的知识点。

【考点要求】 依据最新的考试说明，对每一小节提出

Preface

具体的要求,使学生明确每个知识点应达到的水平。

【知识回顾】简单汇总本小节涉及的知识点,使学生明确这一节的知识结构,便于学生查阅和记忆。

【规律探究】总结该考点试题的规律技巧,有利于指导学生答题。题目注重层次性、典型性,对重点知识进行重点分析,力求各个突破。

【典例详析】经典例题,分析透彻,活学活用,尽量总结归纳解题技巧方法,力求上升为数学思想。

【感悟高考】精选最新出现的典型高考试题,讲解精辟,入木三分,让你在潜移默化中,增强应对高考的能力。

【典题精练】收集了新颖、覆盖面广、考查能力的部分题目,所选题目典型、少而精,使学生通过训练,理解知识、掌握方法、形成能力。

本书在编写过程中,尽量体现“一题多解”、“一法多用”,注意方法的归纳和规律的总结,使学生能够举一反三,触类旁通。同时本书还努力体现化归、数形结合、分类讨论、归纳猜想等数学思想,有助于把知识转化为能力,由能力上升为思想。本书既适合高三学生专项强化之用,又适合高中同步学习的强化与提高,是一本适用性极强的备考助学用书。由于主客观条件所限,书中疏漏之处在所难免,敬请广大读者批评指正。

编 者

2006年6月

目 录



CONTENTS

第一章 直线、平面、简单几何体

知识结构 (1)

第一节 直线与直线、平面的位置关系 (1)

考点要求	(1)
知识回顾	(2)
规律探究	(3)
典例详析	(7)
感悟高考	(8)
典题精练	(10)

第二节 平面与平面的位置关系 (12)

考点要求	(12)
知识回顾	(13)
规律探究	(13)
典例详析	(17)
感悟高考	(19)
典题精练	(20)

第三节 空间向量的基本运算和性质 (22)

考点要求	(22)
知识回顾	(23)
规律探究	(23)
典例详析	(28)
感悟高考	(30)

典题精练 (33)

第四节 空间的角 (35)

考点要求	(35)
知识回顾	(36)
规律探究	(36)
典例详析	(40)
感悟高考	(43)
典题精练	(47)

第五节 空间距离 (49)

考点要求	(49)
知识回顾	(49)
规律探究	(49)
典例详析	(54)
感悟高考	(55)
典题精练	(57)

第六节 棱柱、棱锥、多面体和球 (58)

考点要求	(58)
知识回顾	(59)
规律探究	(60)
典例详析	(64)
感悟高考	(67)
典题精练	(70)

第二章 排列、组合和二项式定理

知识结构 (72)

第一节 两个基本原理 (72)

考点要求	(72)
知识回顾	(72)
规律探究	(73)
典例详析	(75)
感悟高考	(76)
典题精练	(77)

第二节 排列与组合 (79)

考点要求	(79)
知识回顾	(79)

规律探究 (79)

典例详析 (82)

感悟高考 (83)

典题精练 (84)

第三节 二项式定理 (86)

考点要求	(86)
知识回顾	(86)
规律探究	(86)
典例详析	(89)
感悟高考	(90)
典题精练	(91)

第三章 概 率

第四章 概率与统计

第五章 极 限



CONTENTS

第六章 导数

知识结构	(170)	第二节 导数的应用	(178)
第一节 导数的概念及性质	(170)	考点要求	(178)
考点要求	(170)	知识回顾	(178)
知识回顾	(170)	规律探究	(179)
规律探究	(171)	典例详析	(182)
典例详析	(174)	感悟高考	(184)
感悟高考	(175)	典题精练	(186)
典题精练	(176)		

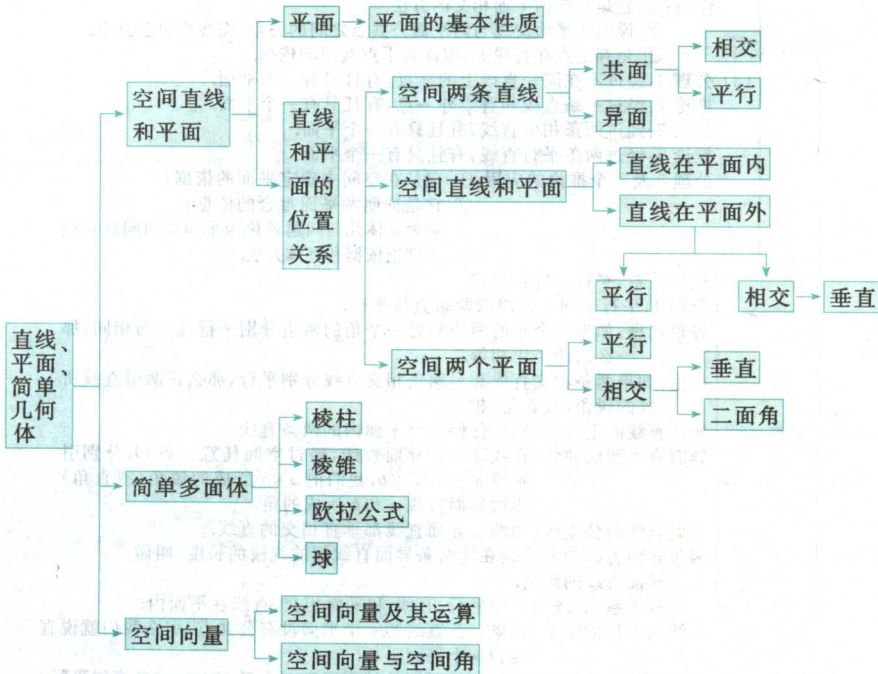
第七章 复数

知识结构	(188)	第二节 复数的代数运算	(195)
第一节 复数的基本概念	(188)	考点要求	(195)
考点要求	(188)	知识回顾	(195)
知识回顾	(188)	规律探究	(195)
规律探究	(189)	典例详析	(199)
典例详析	(192)	感悟高考	(200)
感悟高考	(193)	典题精练	(201)
典题精练	(194)		
[典题精练]参考答案与解析	(203)		

第一章

直线、平面、简单几何体

知识结构



第一节 直线与直线、平面的位置关系

考点要求

1. 掌握平面的基本性质,会用斜二测画法画水平放置的平面图形的直观图.
2. 能够画出空间两条直线、直线和平面的各种位置关系的图形.能够根据图形想象它们的位置关系.
3. 掌握直线和平面平行的判定定理和性质定理;掌握直线和平面垂直的判定定理;了解三垂线定理及其逆定理.

知识回顾

平面是一个只描述而不定义的最基本的原始概念,对其应理解三点:

(1) 平面是平的;(2) 平面无厚度;(3) 可以无限延展,无边界.

平面的性质:(1) 公理 1:如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上的所有点,都在这个平面内.

作用:证明直线在平面内的依据.

(2) 公理 2:如果两平面有一个公共点,那么它们还有其它公共点,这些公共点的集合是一条直线.

作用:① 它是判定两平面相交的方法.

② 说明两平面交线与两平面公共点之间的关系:交线必过公共点.

③ 是判定点在直线上,即证若干点共线的依据.

(3) 公理 3:经过不在同一直线上的三点,有且只有一个平面.

推论 1:经过一条直线和直线外一点,有且只有一个平面.

推论 2:经过两条相交直线,有且只有一个平面.

推论 3:经过两条平行直线,有且只有一个平面.

公理 3 及三个推论的应用:① 它是在空间中确定平面的依据;

② 它是证明两平面重合的依据;

③ 它为立体几何问题转化为平面几何问题提供了理论依据和具体方法.

位置关系:平行、异面、相交.

公理 4:平行于同一直线的两条直线平行.

等角定理:如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行且方向相同,那么这两个角相等.

推论:如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行,那么这两组直线所成的锐角(或直角)相等.

异面直线的定义:不同在任何一个平面内的两条直线.

异面直线所成的角:直线 a, b 是异面直线,经过空间任意一点 O , 分别引直线 $a' // a, b' // b$, 我们把 a', b' 所成的锐角(或直角)叫做异面直线 a 和 b 所成的角.

异面直线的公垂线:和两条异面直线都垂直相交的直线.

两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长度,叫做异面直线的距离.

位置关系:直线和平面平行、直线和平面相交、直线在平面内.

线面平行的定义:如果一条直线的一个平面没有公共点,那么我们就说直线和这个平面平行.

线面平行的判定定理:如果平面外的直线和一个平面内的一条直线平行,那么这条直线和这个平面平行.

线面平行的性质定理:如果一条直线和一个平面平行,经过这条直线的平面和这个平面相交,那么这条直线就和交线平行.

线面垂直的定义:如果一条直线和一个平面内的任何一条直线都垂直,那么这条直线和这个平面垂直.

线面垂直的判定定理:如果一条直线和一个平面内的两条相交直线垂直,那么这条直线垂直于这个平面.

线面垂直的性质定理:如果两条直线同垂直于一个平面,那么这两条直线平行.

点到平面的距离的定义:从平面外一点引这个平面的垂线,这个点和垂足间的距离叫做这个点到这个平面的距离.

直线和平面距离的定义:一条直线和一个平面平行,这条直线上任一点到这个平面的距离叫做这条直线和平面距离.

线到平面的距离是用点到平面的距离来度量的.

直线和平面

空间直线

直线和平面



规律探究

本节中概念定理较多,空间直线三种位置关系中,异面直线是难点也是重点.判断两条直线是否是异面直线是一类重要的问题,判断时可联系判定异面直线的定理,若证明一般用反证法.直线与平面的位置关系中主要研究平行、垂直问题.证明平行、垂直要联系判定定理,条件中出现平行、垂直要联系性质定理.注意解题方向,注意解题中转化法的应用.

例 1 已知: $\alpha \cap \beta = a, b \subset \beta, a \cap b = A$, 且 $c \subset \alpha, c \parallel a$,
求证: b, c 为异面直线.

【证法 1】(直接法)

$\because c \subset \alpha, a \cap b = A, \alpha \cap \beta = a, \therefore A \in a \subset \alpha$,

而 $a \parallel c$, 于是 $A \notin c$, 在直线 b 上任取一点 B (不同于 A).

$\because b \subset \beta, B \notin \alpha, \therefore AB$ 与 c 为异面直线.

即 b, c 为异面直线.

【证法 2】(反证法)

假设 b, c 不是异面直线, 即 b, c 为共面直线, 则 b, c 为相交直线或平行直线.

(1) 若 $b \cap c = P$, 已知 $b \subset \beta, c \subset \alpha$, 又 $\alpha \cap \beta = a$, 则 $P \in b \subset \beta$, 且 $P \in c \subset \alpha$, 从而, 交点 P 一定在平面 α, β 的交线上(公理二).

即 $P \in a$, 于是 $a \cap c = P$, 这与已知条件 $a \parallel c$ 矛盾.

因此 b, c 相交不能成立.

(2) 若 $b \parallel c$, 已知 $a \parallel c$, 则 $a \parallel b$ (公理四), 这与已知条件 $a \cap b = A$ 矛盾, 因此 b, c 平行也不能成立.

综合(1)、(2)可知 b, c 为异面直线.

【证法 3】(反证法)

假设 b, c 不是异面直线, 即假设直线 b, c 在同一个平面 γ 内, 则 $b \subset \gamma, c \subset \gamma$, 在直线 b 上任取一点 B (不同于 $A, B \notin \alpha$); 从而, 平面 γ 一定经过 B 点与直线 c .

又 $\because A \in a, a \parallel c$,

$\therefore A \in c$, 于是经过 c 与 c 外一点 A 的平面就是平面 α , 而这样的平面只能有一个(公理三的推论 1),

从而, 直线 b, c 都在平面 α 内, 但 $B \in b \subset \alpha$, 这与 $B \notin \alpha$ 矛盾.

因此 b, c 为异面直线.

【评注】证法 1 是直接 from 已知条件出发, 运用异面直线的判定定理, 推得结论.

证法 2 是根据空间的两条直线的三种位置关系, 把“ b, c 异面直线”的反面看作“ b, c 为相交直线或平行直线”, 然后逐一列举用反证法予以证明.

证法 3 是根据异面直线的定义, 把“不同在任何一个平面的两条直线”的反面看作“同在某一个平面内的两条直线”, 然后导出矛盾.

例 2 如果一条直线和两个相交平面平行, 那么这条直线就和它们的交线平行.

已知: $a \parallel \alpha, a \parallel \beta, \alpha \cap \beta = b$, 求证 $a \parallel b$.

【证法 1】如图 1-1-2 平面 α 和平面 β 交于 b , 在 b 上任取一点 A , 设过 a, A 的平面与

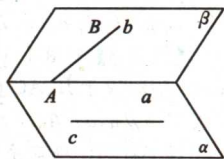


图 1-1-1

平面 α 相交于直线 b' ,

$\therefore a \parallel \alpha$, 则 $b' \parallel a$, 设过 a, A 的平面与 β 相交于直线 b'' .

$\therefore a \parallel \beta$ 则 $b'' \parallel a$, $\therefore b'$ 和 b'' 都过点 A 且和 a 平行,

$\therefore b'$ 和 b'' 重合, 重合后的直线既在 α 内又在 β 内, 因而即为交线 b , 故 $b \parallel a$.

【证法 2】 如图 1-1-3(1), 设过 a 的两个平面, 分别与平面 α 、 β 相交于直线 c, d .

$\therefore a \parallel \alpha, a \parallel \beta, \therefore a \parallel c, a \parallel d, \therefore c \parallel d$,

则 c 平行于平面 β , 而 b 为过 c 的平面 α 与平面 β 的交线,

$\therefore c \parallel b$, 而 $a \parallel c, \therefore a \parallel b$.

【证法 3】 如图 1-1-3(2), 在 a 上任取一点 A , 作 $AB \perp \beta$ 于 $B, AC \perp \alpha$ 于 C ,

$\therefore a \parallel \alpha, a \parallel \beta, \therefore a \perp AC, a \perp AB$,

设 AB, AC 确定平面 $\gamma, \therefore a \perp \gamma$,

又 $\therefore b \perp AB, b \perp AC, \therefore b \perp \gamma, \therefore a \parallel b$.

【证法 4】 设 $\alpha \cap \beta = b$ 且 b 不平行于 a , 在 b

上任取一点 A , 过 A, a 确定平面 γ , 则 γ 与 α 交于 b' , γ 与 β 交于 b'' , 且 $b' \parallel a, b'' \parallel a$, 过线外一点作直线平行线是唯一的, 矛盾. $\therefore b'$ 与 b'' 重合, 则 b' 与 b'' 必重合于 $b, \therefore a \parallel b$.

【评注】 证明线线平行的方法:

- (1) 利用线线平行定义, 证共面且无公共点.
- (2) 利用三线平行公理: 证二线同时平行于第三条直线.
- (3) 利用线面平行的性质定理: 把证线线平行转化为证线面平行.
- (4) 利用线面垂直的性质定理: 把证线线平行转化为证线面垂直.
- (5) 利用面面垂直的性质定理: 把证线线平行转化为证面面平行.

例 3 如图 1-1-4 所示, 在四面体 $ABCD$ 中, 截面 $EFGH$ 平行于对棱 AB 和 CD , 试问: 截面在什么位置时, 其截面的面积最大?

【思路分析】 先判定截面 $EFGH$ 的形状, 再引入变量, 建立面积的函数关系式, 转化为求函数的最值问题.

【解】 $\because AB \parallel$ 平面 $EFGH$, 平面 $EFGH$ 与平面 ABC 和平面 ABD 分别交于 FG, EH ,

$\therefore AB \parallel FG, AB \parallel EH, \therefore FG \parallel EH$.

同理可证, $EF \parallel GH$.

$\therefore$ 截面 $EFGH$ 是平行四边形.

设 $AB=a, CD=b, \angle FGH=\alpha(a, b, \alpha$ 均为定值, 其中 α 为异面直线 AB 与 CD 所成的角),

又设 $FG=x, GH=y$, 由平面几何知识, 得 $\frac{x}{a} = \frac{CG}{CB}, \frac{y}{b} = \frac{BG}{BC}$,

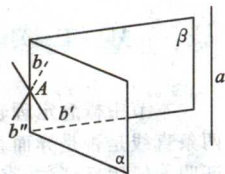
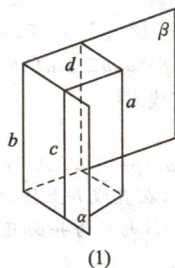
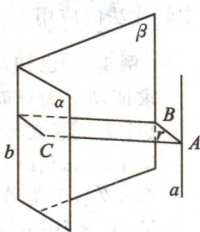


图 1-1-2



(1)



(2)

图 1-1-3

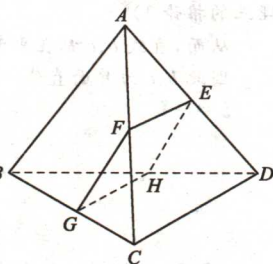


图 1-1-4