

李筑艳 编著

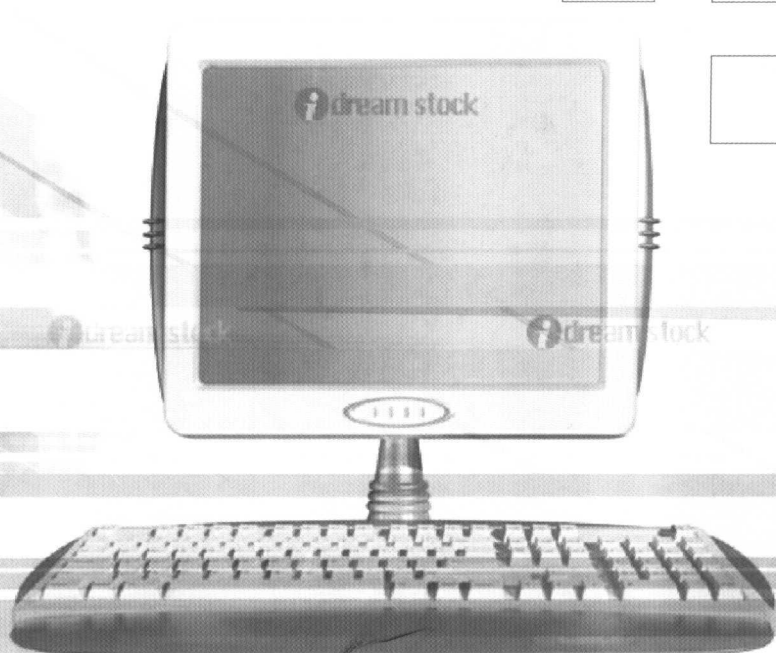
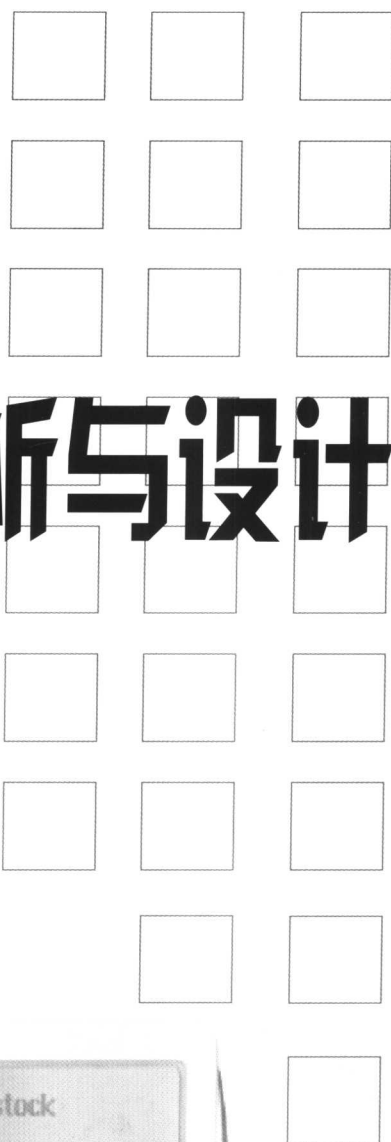
计算机算法分析与设计

计算机算法
分析与设计

贵州民族出版社

李筑艳 编著

计算机算法分析与设计



贵州民族出版社

图书在版编目 (C I P) 数据

计算机算法分析与设计/李筑艳编著. —贵阳:贵州民族出版社,2006.5

ISBN 7-5412-1373-X

I. 计... II. 李... III. ①电子计算机—算法分析—高等院校—教材②电子计算机—算法设计—高等院校—教材 IV. TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 056641 号

书 名	计算机算法分析与设计
编 著	李筑艳
责任编辑	农文成
封面设计	吕凤梧
出版发行	贵州民族出版社
地 址	贵州省贵阳市中华北路 289 号
印 刷	贵阳佳美印务有限公司
开 本	850×1 168 mm 1/16
字 数	420 千字
印 张	18
版 次	2006 年 6 月第 1 版
印 次	2006 年 6 月第 1 次印刷
印 数	0001~1 000 册
定 价	38.00 元



作者简介

李筑艳，女，曾长期从事科技档案信息计算机处理工作，并留学美国伊利诺大学香槟校区(University of Illinois at Urbana-Champaign)计算机系，获计算机科学硕士学位。现在贵州财经学院信息学院从事教研工作，主要讲授计算机算法分析与设计等课程。

计算机算法分析与设计

责任编辑:农文成

封面设计:吕凤梧

内 容 简 介

本书系统地介绍和讨论算法分析与设计的概念和方法。全书共分 15 章。第 1-3 章介绍算法分析与设计的基本概念及其在算法分析与设计中所必需预先掌握的数学知识,对算法时间和空间复杂性的概念及算法的分析方法作了详细的论述。第 4-5 章阐述了基本的算法设计技术:迭代、递归,并进而讨论了迭代与递归关系、递归在分形图形中的应用。第 6 章描述算法设计策略的比较与选择:主要针对典型的具体问题来讲述如何使用算法的最基本设计策略;并对算法时间复杂性进行分析与比较,选择解决问题的高效算法。第 7-13 章探讨常用的算法设计技术:排序、分治法、动态规划法、贪心法、回溯法、分支与限界法、寻找等问题,并从理论上分析它们的时间和空间复杂性。第 14-15 章分析了计算机应用领域里的一些经典算法问题,包括算术运算、数值算法、数论算法与加密算法等。

本书可作为高等院校计算机专业高年级本科生和研究生的教材或教学参考书,也可作为计算机科学与应用领域有关科学技术人员的专业参考书籍。

前 言

现在, 算法理论在计算学科领域中的核心地位已逐渐为人们所公认。三十年来, 计算机科学技术的几乎每一项新的成就都与算法研究密切相关。在计算机专业教育中, “算法分析与设计”也早已成了核心课程。算法分析与设计课程既是大学计算机专业教学的“重课”, 也是一门理论性很强的“难课”。

近几年来, 随着我国计算机专业教育在教学内容和课程设置方面的改进, 算法分析与设计课程的讲授更受重视。一方面, 在研究生培养计划中, 算法分析与设计成为主要必修内容; 另一方面, 则是在本科生培养计划中普遍开设了算法课程。

多年来, 我一直在讲授算法分析与设计课程。在授课过程中, 我发现, 由于教学环境和学生掌握的基础知识千差万别, 无论是采用现有国内教材还是引进的国外教材, 效果都不尽理想。对学生们来说, 这门课程太抽象, 内容不易理解掌握。为了帮助学生更好掌握这门课程所要学的内容, 我自编讲义, 采用类似 C 或 C++ 语言的伪代码作为描述算法的语言, 不再像以往很多教材那样用具体 Java 或 C++ 语言作为描述算法的语言。目的就是让学生不再因为受具体计算机语言的语法细节所缠绕而无法集中精力考虑算法的主要思想, 并将某些解决实际问题的算法改进为更有效的算法。这本书就是我在整理多年上课讲义的基础上编著的。

全书共分 15 章。第 1-3 章介绍算法分析与设计的基本概念及其在算法分析与设计中所必需预先掌握的数学知识, 对算法时间和空间复杂性的概念及算法的分析方法作了详细的论述。第 4-5 章阐述了基本的算法设计技术: 迭代、递归, 并进而讨论了迭代与递归关系、递归在分形图形中的应用。第 6 章描述算法设计策略的比较与选择: 主要针对典型的具体问题来讲述如何使用算法的最基本设计策略, 并对算法时间复杂性进行分析与比较, 选择解决问题的高效算法。第 7-13 章探讨常用的算法设计技术: 排序、分治法、动态规划法、贪心法、回溯法、分支与限界法、寻找等问题, 并从理论上分析它们的时间和空间复杂性。第 14-15 章分析了计算机应用领域里的一些算法问题, 包括算术运算、数值算法、数论算法与加密算法等。

在本书各章的论述中, 首先介绍算法设计策略的基本思想, 然后从解决实际问题入手, 给出解决同一问题的不同算法, 并给出执行算法的详细调用过程, 同时对每个算法所需要的时间和空间进行分析。这样使读者既能掌握解决该问题算法的工作原理, 又能通过对算法设计策略的反复应用, 牢固掌握这些算法设计的基本策略。在各种算法设计策略比较与选择用于展示其设计思想时, 本书有意选择某些经典问题, 使读者能深刻地体会到一个问题可以用多种设计策略求解。同时通过对解同一问题的不同算法的比较, 更容易体会到每一个具体算法的设计要点。本书采用类似 C 或 C++ 语言的伪代码作为描述算法的语言, 使算法的描述变得更简明、清晰。为了加深对知识的理解, 各章配有难易适当的习题, 以适应不同程度读者

练习的需要。

本书的编著吸收了国内外有关专业理论著作及优秀教材的精华,也融会了作者多年讲授算法分析与设计课程的教学实践经验,力图贡献出一本适应当前计算机学科建设和计算机教学需要的专业著作。然而,限于本人水平和精力,不妥之处还在所难免,恳请同行专家和读者批评指正。

李筑艳

2005年12月

目 录

第 1 章 基本概念	1
1.1 问题、算法和程序	1
1.2 表述算法的方法	2
1.3 伪代码的语法规则	3
习题	6
第 2 章 数学预备知识	7
2.1 集合、函数关系	7
2.1.1 集合的表示	7
2.1.2 集合的子集	8
2.1.3 集合的运算	8
2.1.4 序列和多元组	8
2.2 函数关系	9
2.2.1 二元关系	10
2.2.2 二元关系的性质	10
2.2.3 等价关系	10
2.3 布尔逻辑	10
2.4 证明	11
2.4.1 直接证明法	11
2.4.2 间接证明	11
2.4.3 反证法	11
2.4.4 反例证明法	12
2.4.5 数学归纳法	12
2.5 取下整和取上整函数	13
2.6 取模运算	14
2.7 对数	14
2.8 级数求和	14
2.9 求和运算法则	15
2.10 用定积分解求和式的近似值	15
2.11 阶乘函数和二项式系数	16
2.11.1 阶乘	16
2.11.2 二项式系数	16
2.11.3 二项式定理	17
2.12 递推方程	19

2.12.1 常系数线性齐次递推式的求解	19
2.12.2 常系数线性非齐次递推方程的求解	21
2.12.3 扩展递推方程	22
2.12.4 用生成函数法求解递推关系	23
习题	26
第3章 算法复杂性分析	29
3.1 输入规模的度量	29
3.2 运行时间的度量单位	29
3.3 渐进符号基本增长率类型	33
3.3.1 上限	33
3.3.2 下限	33
3.3.3 Θ 表示法	34
3.4 化简法则	34
3.5 非递归算法运行时间的计算	34
3.6 递归算法运行时间的计算	36
3.6.1 分治递归的定理方法	37
3.6.2 递归树的方法	38
3.7 算法的最佳、最差和平均复杂性	39
3.8 空间复杂性	41
习题	41
第4章 递归与迭代	45
4.1 递归	45
4.1.1 递归方法计算两个正整数相乘	45
4.1.2 递归方法计算阶乘函数	45
4.1.3 递归方法解全排列问题	46
4.2 迭代	48
4.2.1 迭代方法计算两个正整数相乘	48
4.2.2 迭代方法计算阶乘函数	48
4.2.3 迭代的方法解排列问题	48
4.3 梵天塔问题	49
4.3.1 递归方法解梵天塔问题	49
4.3.2 迭代方法解梵天塔问题	51
4.4 阿克曼函数	55
4.4.1 递归方法1解阿克曼函数	55
4.4.2 递归方法2解阿克曼函数	57
习题	57

第 5 章 递归与分形图形	59
5.1 递归与分形图形	59
5.2 涡旋曲线	59
5.3 康托(Cantor)三分集	60
5.4 谢尔宾斯基(Sierpinski)垫片	61
5.5 谢尔宾斯基(Sierpinski)地毯	62
5.6 科赫(Koch)曲线	64
习题	66
第 6 章 算法设计策略的比较与选择	68
6.1 求解斐波那契数列	68
6.1.1 时间复杂性为 $O(1.618)^{n+1}$ 递归算法	68
6.1.2 时间和空间复杂性分别为 $O(n)$ 迭代算法	69
6.1.3 时间复杂性为 $O(n)$ 、空间复杂性为 $O(1)$ 迭代算法	69
6.1.4 时间复杂性为 $O(n)$ 、空间复杂性为 $O(1)$ 递归算法	70
6.1.5 时间复杂性为 $O(\log n)$ 、空间复杂性为 $O(1)$ 递归算法 1	70
6.1.6 时间复杂性为 $O(\log n)$ 、空间复杂性为 $O(1)$ 递归算法 2	72
6.1.7 时间复杂性为 $O(\log n)$ 、空间复杂性为 $O(1)$ 递归算法 3	73
6.2 最大子段和问题	74
6.2.1 时间复杂性为 $O(n^3)$ 算法 1	74
6.2.2 时间复杂性为 $O(n^3)$ 算法 2	75
6.2.3 时间复杂性为 $O(n^2)$ 算法	76
6.2.4 时间和空间复杂性分别为 $O(n^2)$ 算法 1	76
6.2.5 时间和空间复杂性分别为 $O(n^2)$ 算法 2	77
6.2.6 时间复杂性为 $O(n \log n)$ 算法	78
6.2.7 时间复杂性为 $O(n)$ 算法	80
习题	80
第 7 章 排序	83
7.1 插入排序	83
7.2 起泡排序	84
7.3 选择排序	86
7.4 快速排序	88
7.5 归并排序	92
7.6 堆排序	95
7.7 计数排序	99
7.8 基数排序	102
7.9 排序问题的下限	104

习题	106
第8章 分治	109
8.1 求解数组中元素与 x 相等的个数	109
8.1.1 求解数组中元素与 x 相等的个数迭代算法	109
8.1.2 求解数组中元素与 x 相等的个数递归算法	109
8.1.3 求解数组中元素与 x 相等的个数分治递归算法	110
8.2 判断已排序数组中是否存在给定的元素 x	110
8.2.1 判断已排序数组中是否存在给定的元素 x 迭代算法	111
8.2.2 判断已排序数组中是否存在给定的元素 x 分治递归算法	111
8.3 两个大整数相乘	112
8.3.1 两个大整数相乘迭代算法	112
8.3.2 两个大整数相乘分治递归算法 1	113
8.3.3 两个大整数相乘分治递归算法 2	115
8.3.4 两个大整数相乘分治递归算法 3	116
8.3.5 两个大整数相乘分治递归算法 4	116
8.4 两个矩阵相乘	117
8.4.1 两个矩阵相乘迭代算法	117
8.4.2 两个矩阵相乘分治递归算法 1	118
8.4.3 两个矩阵相乘分治递归算法 2	120
8.5 两个多项式乘积	121
8.5.1 两个多项式乘积迭代算法	122
8.5.2 两个多项式乘积分治递归算法 1	123
8.5.3 两个多项式乘积分治递归算法 2	124
习题	127
第9章 动态规划	129
9.1 计算二项式系数	129
9.1.1 计算二项式系数递归算法	129
9.1.2 计算二项式系数动态规划算法	130
9.2 正整数的分拆问题	132
9.2.1 正整数的分拆递归算法 1	132
9.2.2 正整数的分拆递归算法 2	134
9.2.3 正整数的分拆递归算法 3	135
9.2.4 正整数拆分问题的上界	135
9.2.5 正整数拆分问题的下界	136
9.2.6 正整数的分拆动态规划算法	137
9.3 矩阵连乘问题	138

9.3.1	穷举法解矩阵连乘问题	139
9.3.2	递归方法解矩阵连乘问题	139
9.3.3	动态规划方法解矩阵连乘问题	142
9.4	最优二叉查找树	145
9.4.1	穷举法解最优二叉查找树	146
9.4.2	递归方法解最优二叉查找树	147
9.4.3	动态规划方法解最优二叉查找树	151
9.5	最长公共子序列问题	154
9.5.1	最长公共子序列递归算法	154
9.5.2	最长公共子序列动态规划算法	156
9.6	所有点对最短路径问题	157
9.6.1	所有点对最短路径递归算法	159
9.6.2	所有点对最短路径动态规划算法 1	160
9.6.3	所有点对最短路径动态规划算法 2	161
9.7	01 背包问题	163
9.7.1	01 背包递归算法	163
9.7.2	01 背包动态规划算法	165
9.8	找零钱问题	168
9.8.1	找零钱递归算法	169
9.8.2	找零钱动态规划算法	170
	习题	172
第 10 章	贪心算法	175
10.1	活动安排问题	175
10.2	分数背包问题	178
10.3	最短路径问题	180
10.4	最小生成树	182
10.4.1	<i>prim</i> 算法	183
10.4.2	<i>Kruskal</i> 算法	185
10.5	<i>Huffman</i> 编码树	188
	习题	192
第 11 章	回溯	194
11.1	八个皇后问题	194
11.2	旅行售货问题	198
11.3	01 背包问题	201
11.4	子集合问题	202
11.4.1	子集合算法 1	202

11.4.2 子集算法 2	203
11.4.3 子集算法 3	204
习题	205
第 12 章 分支限界	207
12.1 15 数字谜的问题	207
12.2 分配任务问题	211
12.3 旅行售货问题	214
习题	216
第 13 章 寻找问题	217
13.1 寻找数组中最大元素问题	217
13.1.1 寻找数组中最大元素迭代算法	217
13.1.2 寻找数组中最大元素递归算法	217
13.1.3 寻找数组中最大元素分治递归算法	218
13.2 寻找数组中最小元素和最大元素问题	219
13.2.1 寻找数组中最小元素和最大元素迭代算法 1	219
13.2.2 寻找数组中最小元素和最大元素迭代算法 2	219
13.2.3 寻找数组中最小元素和最大元素分治递归算法	220
13.3 寻找数组中最大元素和次大元素问题	221
13.3.1 寻找数组中最大元素和次大元素锦标赛算法	221
13.4 寻找两个已排序数组的中位数问题	223
13.4.1 寻找两个已排序数组的中位数算法 1	223
13.4.2 寻找两个已排序数组的中位数算法 2	224
13.5 寻找两个已排序数组第 k 小元素问题	226
13.6 寻找数组中主元素问题	227
13.6.1 寻找数组中主元素算法 1	227
13.6.2 寻找数组中主元素算法 2	228
13.6.3 寻找数组中主元素算法 3	228
13.7 选择数组中项和第 k 小元素问题	229
13.7.1 选择数组中项和第 k 小元素算法	229
13.7.2 划分元素 5 个为一组选择算法的时间复杂性	233
13.7.3 划分元素 7 个为一组选择算法的时间复杂性	235
13.7.4 划分元素 3 个为一组选择算法的时间复杂性	235
13.8 模式串匹配	235
13.8.1 直接匹配算法	236
13.8.2 模式匹配的一种改进算法	238
习题	241

第 14 章 算术运算、数值算法	244
14.1 加法	244
14.1.1 x 进制数相加算法	244
14.1.2 二进制数相加算法	245
14.2 减法	246
14.2.1 x 进制数相减算法	246
14.2.2 二进制数相减算法	247
14.3 乘法	249
14.3.1 x 进制数相乘算法	249
14.3.2 二进制数相乘算法	250
14.4 除法	251
14.4.1 x 进制数相除算法	251
14.4.2 二进制数相除算法	252
14.5 整数幂	253
14.5.1 整数幂迭代算法	253
14.5.2 整数幂递归算法	253
14.5.3 整数幂分治迭代算法	254
14.5.4 整数幂分治递归算法	254
14.6 二进制幂	254
14.7 模取幂运算	255
14.8 模取二进制幂运算	256
14.9 多项式的快速求值	257
14.9.1 多项式求值算法 1	257
14.9.2 多项式求值算法 2	258
14.9.3 伯恩斯坦 (Bernstein) 多项式求值	259
习题	259
第 15 章 数论算法	262
15.1 最大公约数问题	262
15.1.1 最大公约数迭代算法 1	262
15.1.2 最大公约数迭代算法 2	262
15.1.3 最大公约数迭代算法 3	263
15.1.4 最大公约数递归算法	263
15.2 求最小公倍数	264
15.3 扩展欧几里得算法	264
15.3.1 扩展欧几里得递归算法	264
15.3.2 扩展欧几里得迭代算法	265

15.4 素性检测	267
15.4.1 素性检测算法 1	267
15.4.2 素性检测算法 2	267
15.4.3 爱拉托斯散(Eratosthenes)筛选算法	268
15.4.4 素性检测算法 3	269
15.4.5 素性检测算法 4	269
15.4.6 素性检测算法 5	270
15.4.7 素性检测算法 6	270
15.5 RSA 算法	272
15.5.1 欧拉定理	272
15.5.2 RSA 加密与解密算法	273
习题	274
主要参考文献	276

第1章 基本概念

算法是计算学科中最具有方法论性质的核心概念，也被誉为计算学科的灵魂。算法设计的优劣决定着软件系统的性能，对算法进行研究能使我们深刻地理解问题的本质以及可能的求解技术。算法的定义：有关算法的定义不少，其内涵基本上是一致的，其中最为著名的是计算机科学家 *Donald E. Knuth* 在其经典巨著《计算机程序设计艺术》第一卷中对算法的定义和特性所作的有关描述：**一个算法就是一个有穷规则的集合，其中之规则规定了一个解决某一特定类型问题的运算序列。**

1.1 问题、算法和程序

程序设计人员总是需要与问题、算法和计算机程序打交道，而问题、算法和计算机程序是三种不同的概念。

问题：从直觉上讲，问题无非是一个需要完成的任务，即一组输入就有一组相应的输出。问题的定义不应包含有关怎样解决问题的限制。只有在准确定义并完全理解问题之后，才能研究问题的解决方法。然而，问题的定义应该包含对任何可行方案所需资源的限制。对于计算机要解决的任何一个问题，总有一些直接或间接的资源限制。例如，任何计算机程序只能使用可用的主存储器和磁盘空间，而且必须在合理的时间内完成运行。从数学角度讲，可以把问题看作函数。

算法：是指解决问题的一种方法或者一个过程。如果将问题看作函数，那么算法就是把输入转换为输出。一个问题可以用多种算法来解决，一种给定的算法解决一个特定的问题。本书涉及了许多问题，其中有些问题给出了几种算法。知道一个问题的多种解法的好处在于，对于问题的一个特例或问题的一类特殊输入，解法 *A* 可能比解法 *B* 有效，而对于另一特例或问题的另一类特殊输入，解法 *B* 可能又比解法 *A* 更有效。例如，有些排序算法适合于数目较少的序列，有些排序算法则适合于数目较多的序列，而另有一些算法则适合于变长字符串。

一种算法应该包含以下几条性质，只有具有以下所有性质，才能称为是一种解决特定问题的算法：

- (1) 正确性：也就是说，它必须完成所期望的功能，把每一次输入转换为正确的输出。
- (2) 具体步骤：一种算法应该由一系列具体步骤组成，“具体”意味着每一步所描述的行为对于必须完成算法的人或机器是可读、可执行的。每一步必须在有限的时间内执行完毕。
- (3) 确定性：下一步应执行的步骤必须明确。
- (4) 有限性：一种算法必须由有限步骤完成。如果一种算法的描述是由无限步组成的，我们就不可能将它写出来，也不可能将它作为计算机程序来实现。大多数算法描述语言均提供一些实现重复行为的方法，比如 C 或 C++ 中的 *while* 和 *for* 循环结构。循环结构具有简短的描述，但是实际执行的次数由输入来决定。