



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

现代控制理论

王金城 主编



化学工业出版社

TP13

209

2007

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

现代控制理论

王金城 主编



化学工业出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书深入浅出地阐述了现代控制理论的基础内容以及几个现代控制理论专题, 主要包括状态空间描述的建立、控制系统运动分析、稳定性分析、能控性和能观测性、状态反馈和状态观测器, 以及最优控制、卡尔曼滤波、系统辨识、自适应控制等。

本书适于作为高等院校自动化、电气工程及其自动化专业以及其它相关专业的教材, 也可供广大青年读者自学深造使用, 还可作为自动化领域研究人员的参考书。

图书在版编目 (CIP) 数据

现代控制理论/王金城主编. —北京: 化学工业出版社,
2007.3
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
ISBN 978-7-5025-9590-6

I. 现… II. 王… III. 现代控制理论-高等学校-教材
IV. 0231

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 029777 号

责任编辑: 唐旭华
责任校对: 洪雅姝

文字编辑: 李玉峰
装帧设计: 张 辉

出版发行: 化学工业出版社 (北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011)
印 装: 北京市彩桥印刷有限责任公司

787mm×1092mm 1/16 印张 14½ 字数 358 千字 2007 年 4 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询: 010-64518888 (传真: 010-64519686) 售后服务: 010-64518899

网 址: <http://www.cip.com.cn>

凡购买本书, 如有缺损质量问题, 本社销售中心负责调换。

定 价: 24.00 元

版权所有 违者必究

前 言

20 世纪 40 年代,第一代“控制理论”——经典控制理论正式诞生。1932 年奈魁斯特(H. Nyquist)发表了反馈放大器的频率域稳定性论文,1948 年出版了维纳著名的《控制论》一书,以及 1954 年出版的我国著名科学家钱学森《工程控制论》一书,是这一时期的代表性成果。与此同时,自动控制技术被广泛应用于各个领域,各种自动化生产线已经初见端倪,其中,第一台数控机床(1952 年)与第一台工业机器人(1954 年)先后问世。

20 世纪 50~60 年代是人类开始征服太空的年代,1957 年苏联成功发射了第一颗人造卫星,1968 年美国阿波罗飞船成功登上月球。在这些举世瞩目的成功中,自动控制起着不可磨灭的作用,也因此催生了 60 年代的第二代“控制理论”——现代控制理论的问世。随着科学技术的迅速发展,尤其是计算机技术的成熟和普及,使得现代控制理论在工业领域、航空航天、交通运输等许多领域发挥着越来越重要的作用。因此,国内外的许多大学都把现代控制理论列为自动化和相关专业的专业理论基础课程。

本书以作者 20 余年的教学讲义为基础,广泛参考国内外优秀教材,集全体参编作者多年教学经验编写而成。本书包括了原讲义中的几乎所有内容,同时又丰富了许多问题的不同解法,加入了较多的例题和习题,便于学生自学。本书的另一个特点是增加了现代控制理论专题,其目的有二:一是有利于学生了解现代控制理论的几个分支,从而使状态空间分析方法的应用得以体现;二是为高年级学生学习现代控制理论专题提供一本可选的教材。

全书共 6 章,分为两部分。第一部分为状态空间方法基础,相应的讲课学时不超过 48 学时(不包含实验学时);第二部分为现代控制理论专题,相应的讲课学时不超过 32 学时。各章节的基本内容是:第 1 章为建立状态空间模型;第 2~4 章的中心内容是讨论状态空间理论的分析方法,分别是运动分析、能控性和能观测性、稳定性;第 5 章讲述系统的综合;第 6 章是现代控制理论的几个专题,包括最优控制、最优估计、系统辨识、自适应控制等。

本书第 1 章由王金城、刘洋编写,第 2 章由孟华、舒奎编写,第 3 章由韩敏、张艳编写,第 4 章由杨斌、陈波编写,第 5 章由马蔷、葛斌编写,第 6 章由张立勇、周俊哲、信东思编写。全书由王金城负责审阅。在编写过程中,参编作者多次召开研讨会,交流教学经验和体会,完成了稿件的交叉审阅,使得稿件做到了内容全面、符号统一、格式一致。在此对参编作者所付出的艰辛劳动表示深深的谢意。同时对化学工业出版社、大连理工大学等单位给予的大力支持,一并表示衷心感谢。

对于本书中存在的不妥之处,欢迎广大读者批评指正。

编 者

2006 年 12 月于大连

目 录

1 控制系统的状态空间描述	1
1.1 引言	1
1.2 状态空间描述	2
1.2.1 状态和状态空间	2
1.2.2 被控过程的状态空间描述	3
1.2.3 非线性状态空间描述的线性化	5
1.3 状态空间描述的状态变量图	6
1.4 状态空间描述的建立	7
1.4.1 从系统的机理出发建立状态空间描述	7
1.4.2 从系统结构图出发建立状态空间描述	9
1.5 化输入-输出描述为状态空间描述	10
1.5.1 能控标准形实现	11
1.5.2 能观测标准形实现	14
1.5.3 约当标准形实现	15
1.5.4 多输入-多输出系统的实现	18
1.6 离散系统状态空间描述的建立	18
1.7 线性变换	19
1.7.1 线性非奇异变换	19
1.7.2 系统的特征值和特征向量	21
1.7.3 将状态空间描述变换为约当标准形	23
1.8 由状态空间描述求传递函数阵	30
1.8.1 单输入-单输出系统	30
1.8.2 多输入-多输出系统	31
1.8.3 传递函数阵的不变性	32
习题 1	33
2 线性系统的状态空间运动分析	36
2.1 线性定常系统的齐次解	36
2.2 矩阵指数函数	38
2.2.1 矩阵指数函数的定义	38
2.2.2 矩阵指数函数的性质	38
2.2.3 矩阵指数函数的计算	41
2.3 线性定常系统的非齐次解	47
2.4 线性定常系统的状态转移矩阵	49
2.4.1 状态转移矩阵	49
2.4.2 状态转移矩阵的性质	51
2.4.3 由状态转移矩阵求系统矩阵	52
2.5 线性时变系统的运动	53
2.5.1 线性时变系统的状态转移矩阵	53

2.5.2 线性时变系统状态方程的求解	55
2.6 线性连续系统的时间离散化	56
2.7 线性离散系统的运动分析	61
习题 2	65
3 线性控制系统的能控性和能观测性	68
3.1 能控性和能观测性的概念	68
3.2 连续时间线性定常系统的能控性	71
3.2.1 状态能控性定义	71
3.2.2 状态能控性的判别准则	72
3.2.3 输出能控性定义及判别准则	76
3.3 连续时间线性定常系统的能观测性	77
3.3.1 线性定常系统能观测性的定义	78
3.3.2 能观测性判别准则	78
3.4 离散时间线性定常系统的能控性和能观测性	81
3.4.1 能控性定义与判据	81
3.4.2 能观测性定义与判据	84
3.4.3 采样周期对离散时间线性系统能控性和能观测性的影响	85
3.5 连续时间线性时变系统的能控性与能观测性	86
3.5.1 能控性定义与判别准则	86
3.5.2 能观测性定义与判据	87
3.6 线性系统能控性与能观测性的对偶关系	89
3.6.1 对偶系统	89
3.6.2 对偶定理	89
3.7 能控标准形和能观测标准形	90
3.7.1 问题的提法	90
3.7.2 能控标准形	91
3.7.3 能观测标准形	94
3.8 传递函数中零极点对消与状态能控和能观测之间的关系	95
3.9 线性系统结构按能控性、能观测性的分解	100
3.9.1 系统按能控性分解	100
3.9.2 系统按能观测性分解	102
3.9.3 系统按能控性和能观测性分解	104
3.9.4 结构分解的另一种方法	108
习题 3	109
4 控制系统的稳定性——Lyapunov 第二方法	113
4.1 关于稳定性的几个定义	113
4.1.1 平衡状态	113
4.1.2 Lyapunov 意义下的稳定性	114
4.2 李亚普诺夫第一方法	115
4.3 李亚普诺夫第二方法	118
4.3.1 预备知识	119
4.3.2 Lyapunov 第二方法的几个定理	120
4.3.3 几点说明	123
4.4 非线性系统的 Lyapunov 稳定性分析	123

4.4.1 Krasovskii 方法	123
4.4.2 变量梯度法	125
4.5 线性定常系统的 Lyapunov 稳定性分析	128
4.5.1 线性连续定常系统的稳定性分析	128
4.5.2 线性定常离散系统的稳定性分析	129
4.6 Lyapunov 第二方法在线性系统设计中的应用	131
4.6.1 线性定常系统的校正	131
4.6.2 用 Lyapunov 函数估计线性系统动态响应的快速性	132
习题 4	133
5 线性定常系统的综合	136
5.1 状态反馈与极点配置	136
5.1.1 系统的结构与数学描述	137
5.1.2 状态反馈极点配置的条件与算法	137
5.1.3 状态反馈几点问题的讨论	139
5.2 输出反馈与极点配置	141
5.2.1 输出反馈的系统结构与数学描述	141
5.2.2 输出反馈的极点配置条件与算法	142
5.3 控制系统的镇定问题	144
5.4 状态重构与状态观测器的设计	146
5.4.1 全维状态观测器设计	146
5.4.2 降维状态观测器	149
5.4.3 分离定理	151
5.5 多变量系统的解耦控制	154
5.5.1 多变量系统的耦合关系	154
5.5.2 解耦控制的基本思想	155
5.5.3 两种常用的解耦控制方法	155
习题 5	158
6 现代控制理论专题	161
6.1 最优控制	161
6.1.1 最优控制问题的一般提法	161
6.1.2 变分法	162
6.1.3 变分法在最优控制中的应用	168
6.1.4 最小值原理	170
6.1.5 线性二次型最优控制	177
6.1.6 动态规划	183
6.2 离散系统的卡尔曼滤波	190
6.2.1 卡尔曼滤波问题的提法	190
6.2.2 离散系统卡尔曼最优预测基本方程	191
6.2.3 离散系统卡尔曼滤波基本方程	196
6.2.4 卡尔曼滤波的稳定性与发散问题	197
6.3 系统辨识与自适应控制	198
6.3.1 系统辨识的一些基本概述	198
6.3.2 最小二乘法辨识	201
6.3.3 递推最小二乘法辨识	206

6.3.4 广义最小二乘法.....	209
6.3.5 模型阶次的确定.....	212
6.3.6 系统辨识在自适应控制中的应用.....	213
习题 6	220
参考文献	224

1 控制系统的状态空间描述

如果说从 1932 年奈魁斯特 (H. Nyquist) 发表反馈放大器的频率域稳定性论文起, 到 20 世纪 50 年代末是经典控制理论发展和完善的时代, 那么, 现代控制理论的发展和形成, 是 20 世纪 60 年代前后的事, 其标志性的成果有 1956 年庞特里雅金 (L. S. Pontryagin) 的极大值原理、1957 年贝尔曼 (R. Bellman) 的动态规划理论、1961 年卡尔曼 (R. E. Kalman) 的线性递推滤波理论, 以及线性系统的能控性和能观测性理论 (R. E. Kalman, 1960 年)。而其中, 状态空间的概念和方法的引入, 则起了重要的推动作用。

1.1 引言

从经典控制理论到现代控制理论, 是人类对控制技术认识上的一个飞跃。两者在数学基础、研究领域、研究方法和技术手段上, 都有着显著的区别。

(1) 研究领域的拓展

一般地说, 经典控制理论只适用于单输入单输出线性定常系统的分析与综合。而现代控制理论则适用于线性 and 非线性、定常和时变、单变量和多变量、连续和离散的系统。适用领域的这种扩大使现代控制理论成为控制理论中一门更具有普遍性的理论。

(2) 研究工具的区别

经典控制理论主要限于处理单输入单输出的单变量线性定常系统, 因此数学上归结为单变量的常系数微分方程问题, 这样, Fourier 变换和 Laplace 变换就成了它的主要数学工具, 主要采用的是频域方法。而现代控制理论的主要研究对象是多输入多输出的多变量系统, 因此矩阵理论和向量空间理论就构成了它的主要数学工具, 为了更完全地表达系统的动力学性质, 它采用状态变量描述方法, 其本质是一种时域方法。两者在数学基础上的不同, 相应的计算手段也就不同。经典控制理论是建立在图解、手工计算的一种算法体系, 而现代控制理论则是基于采用计算机进行运算的一种先进算法体系。

(3) 模型特征的区别

经典控制理论是以系统的输入-输出特性作为研究的依据, 它反映的是系统的输出响应与输入的关系, 称为外部描述, 即将系统看做是一个“黑盒子”, 而不管其内部结构如何。现代控制理论引入了状态和状态空间的概念, 是以系统的输入-状态-输出特性作为研究的依据, 它揭示了系统的内部特征, 也称为内部描述, 是一种完全描述。

现代控制理论是一门正在蓬勃发展的学科, 内容十分广泛, 出现了许多分支, 如最优控制理论、最优估计理论、大系统理论、模糊控制理论、智能控制理论等。本教材的宗旨是介绍现代控制理论的基础性内容, 并多限于线性定常系统。

如同经典控制理论一样,采用现代控制理论对控制系统进行研究,也需要经过建立模型、性能分析、综合与校正等过程。作为分析研究的前提,必须首先建立控制系统在状态空间中的数学模型,即控制系统的状态空间描述。

1.2 状态空间描述

1.2.1 状态和状态空间

这里,首先对状态和状态空间的概念进行扼要的介绍。状态和状态空间,并不是一个新的概念,长期以来就在描述质点和刚体运动的经典动力学中得到了广泛的应用。事实上,在经典控制理论中所讨论过的相平面,就是一个特殊的二维状态空间。但是,将状态和状态空间的概念在经典动力学的基础上加以发展,并使之适合于控制过程的描述,则是 20 世纪 60 年代前后的事。

(1) 状态

所谓状态,是指系统过去、现在和将来的状况。例如,一个质点作直线运动,这个系统的状态就是它的每一时刻的位置与速度。又如一个 RLC 电路,任何时刻电路中的电感电流与电容电压就反映了系统的状态。

(2) 状态变量

状态变量是指能够完全描述系统运动状态的且数量最少的一组变量。

完全描述是指,如果给定了 $t=t_0$ 时刻这组变量的值,和 $t \geq t_0$ 时的输入信号,那么系统在 $t \geq t_0$ 的任何瞬时的行为就完全确定了。根据因果关系,系统现在的状态是系统过去历史情况的终结,系统将来的状态只与现在的状态和新的输入信号有关。

例 1-1 图 1-1 所示 RC 电路,设 $t=t_0$ 时电容上的电压为 $u_c(t_0)$ 。在 $t \geq t_0$ 时,加上激励源 $u_r(t)=u_{r0}$, 得解为

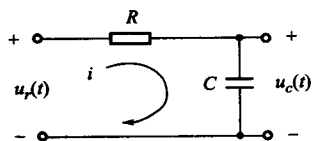


图 1-1 RC 电路

源 $u_r(t)=u_{r0}$, 得解为

$$u_c(t) = [u_{r0} - u_c(t_0)] [1 - e^{-\frac{(t-t_0)}{RC}}] + u_c(t_0)$$

上式说明:

① $u_c(t_0)$ 是 $0 < t < t_0$ 时电路状态的终结;

② $t \geq t_0$ 时, $u_c(t)$ 由初始电压 $u_c(t_0)$ 和激励源 $u_r(t)$ 以及电路方程所确定;

③ $u_c(t)$ 完全地描述了该电路的行为。

数量最少的一组变量是指反映系统状态的一组独立的变量,每个变量都称为状态变量。例如,质点作直线运动,描述这个质点运动状态的变量有它的位置、速度、加速度,但是它们并不是独立的,可以选位置和速度作为一组独立的状态变量。又如 RLC 电路,可以选电路中的电感电流和电容电压作为一组独立的状态变量,但是如果再加上电感电压或电容电流它们就不是一组独立的变量了。一个用 n 阶微分方程描述的系统,有且仅有 n 个独立的变量,当这 n 个独立变量的时间响应都求得时,系统的运动状态也就完全被确定。

(3) 状态向量

以状态变量为分量组成的向量称为状态向量。设 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 是系统的一组状态变量,则状态向量就是以这组状态变量为分量的向量,记为

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \mathbf{x}^T(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \cdots x_n(t)] \quad (1-1)$$

一般来说, 状态变量并不一定要在物理上是可测量或可观察的。但是, 从便于描述和分析控制系统的角度来讲, 当然还是将状态变量选择为可以测量的量比较合理。

(4) 状态空间

以 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 为坐标轴所构成的 n 维欧氏空间称为状态空间。状态空间中每一点都代表了状态变量特定的一组值, 即系统的一个特定状态。如果给定了系统 t_0 时刻的状态, 那么系统 $t \geq t_0$ 各时刻的状态, 就构成成为状态空间中的一条轨迹 (如图 1-2 所示)。显然, 这一轨迹的形状, 完全是由系统在 t_0 时刻的初始状态和 $t \geq t_0$ 时的输入以及系统的动力学特性所唯一决定。当组成状态空间坐标轴数为有限数时, 此状态空间称为有限维的。

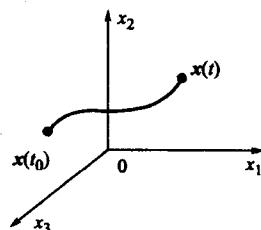


图 1-2 状态空间及状态轨迹

1.2.2 被控过程的状态空间描述

在引入了状态和状态空间概念的基础上, 现在来建立被控过程的状态空间数学模型。被控过程的结构示意图见图 1-3。

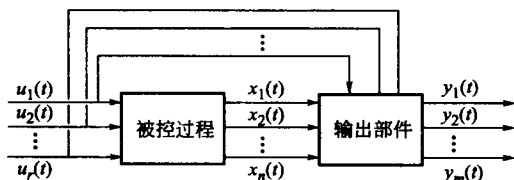


图 1-3 被控过程的状态空间结构

在图 1-3 中, $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ 为控制变量, 它是由控制器提供的加于被控过程的输入变量。 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 为被控过程的状态变量。而输出变量 $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ 则认为是可直接测量的, 故也称为量测变量。

一般情况下, 被控过程的动力学特性, 可以用下面的 n 个一阶微分方程组来描述

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t), \quad i=1, 2, \dots, n \quad (1-2)$$

而其输出特性, 则是简单的函数关系, 可表为

$$y_j = g_j(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t), \quad j=1, 2, \dots, m \quad (1-3)$$

方程(1-2)和方程(1-3), 构成了被控过程完整的状态空间描述。为使表达式更为简洁, 有必要引入向量和矩阵描述形式。为此, 令

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

它们分别是 n 维状态向量, r 维控制向量和 m 维输出向量。同时引入向量函数

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}$$

这样方程(1-2) 和方程(1-3) 就可写成如下的向量形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1-5)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1-6)$$

通常, 式(1-5) 称为状态方程, 式(1-6) 称为输出方程或量测方程。这两个向量方程, 构成了系统的状态空间描述, 或称为状态空间表达式。

如果所描述过程是线性的, 即向量函数 $\mathbf{f}$ 及 $\mathbf{g}$ 都具有线性的关系, 则式(1-5) 和式(1-6) 的向量方程对应于如下的方程组

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_{11}(t)u_1 + b_{12}(t)u_2 + \dots + b_{1r}(t)u_r \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_{21}(t)u_1 + b_{22}(t)u_2 + \dots + b_{2r}(t)u_r \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_{n1}(t)u_1 + b_{n2}(t)u_2 + \dots + b_{nr}(t)u_r \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

和

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= c_{11}(t)x_1 + c_{12}(t)x_2 + \dots + c_{1n}(t)x_n + d_{11}(t)u_1 + d_{12}(t)u_2 + \dots + d_{1r}(t)u_r \\ y_2 &= c_{21}(t)x_1 + c_{22}(t)x_2 + \dots + c_{2n}(t)x_n + d_{21}(t)u_1 + d_{22}(t)u_2 + \dots + d_{2r}(t)u_r \\ &\vdots \\ y_m &= c_{m1}(t)x_1 + c_{m2}(t)x_2 + \dots + c_{mn}(t)x_n + d_{m1}(t)u_1 + d_{m2}(t)u_2 + \dots + d_{mr}(t)u_r \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

上述关系用矩阵方程表示为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \quad (1-9)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \quad (1-10)$$

式中, $\mathbf{A}(t)$ 称为系统矩阵, $n \times n$ 维; $\mathbf{B}(t)$ 称为控制矩阵, $n \times r$ 维; $\mathbf{C}(t)$ 称为输出矩阵, $m \times n$ 维, $\mathbf{D}(t)$ 称为传递矩阵, $m \times r$ 维。

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & b_{1r}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & b_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots & b_{nr}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) & \cdots & c_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}(t) & c_{m2}(t) & \cdots & c_{mn}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t) & \cdots & d_{1r}(t) \\ d_{21}(t) & d_{22}(t) & \cdots & d_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1}(t) & d_{m2}(t) & \cdots & d_{mr}(t) \end{bmatrix}$$

如果系统是线性定常系统, 则系统的状态空间描述为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1-11)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (1-12)$$

式中, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 分别为常数矩阵。为了简化表达式, 常常将线性系统的状态空间描述

简记为 $\Sigma(A, B, C, D)$, 当 $D=0$ 时, 则为 $\Sigma(A, B, C)$ 。

1.2.3 非线性状态空间描述的线性化

严格地说, 实际的控制系统总是非线性的, 即

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

$$y = g(x, u, t)$$

式中, f, g 是 x, u 的非线性函数。

如果只限于考察系统在 $x(t_0)$ 附近的运动, 且对于 $x_0 = x(t_0)$ 和 $u_0 = u(t_0)$ 有

$$\dot{x}(t_0) = f(x_0, u_0, t_0)$$

$$y(t_0) = g(x_0, u_0, t_0)$$

那么, 通过一次近似可导出线性化模型。为此将 f 和 g 在 x_0, u_0 处进行泰勒级数展开, 有

$$f(x, u, t) = f(x_0, u_0, t_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x^T} \right|_{x_0} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u^T} \right|_{x_0} \Delta u + \alpha(\Delta x, \Delta u, t)$$

$$g(x, u, t) = g(x_0, u_0, t_0) + \left. \frac{\partial g}{\partial x^T} \right|_{x_0} \Delta x + \left. \frac{\partial g}{\partial u^T} \right|_{x_0} \Delta u + \beta(\Delta x, \Delta u, t)$$

式中, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta u = u - u_0$ 。由此即可导出

$$\Delta \dot{x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x^T} \right|_{x_0} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u^T} \right|_{x_0} \Delta u + \alpha(\Delta x, \Delta u, t)$$

$$\Delta y = \left. \frac{\partial g}{\partial x^T} \right|_{x_0} \Delta x + \left. \frac{\partial g}{\partial u^T} \right|_{x_0} \Delta u + \beta(\Delta x, \Delta u, t)$$

式中, $\alpha(\Delta x, \Delta u, t)$ 和 $\beta(\Delta x, \Delta u, t)$ 为 $\Delta x, \Delta u$ 的高次项, 而一次项可表为

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^T} \right|_{x_0} = A(t), \quad \left. \frac{\partial f}{\partial u^T} \right|_{x_0} = B(t), \quad \left. \frac{\partial g}{\partial x^T} \right|_{x_0} = C(t), \quad \left. \frac{\partial g}{\partial u^T} \right|_{x_0} = D(t)$$

略去泰勒级数展开中的高次项后, 就得到了非线性系统的线性化模型

$$\Delta \dot{x} = A(t) \Delta x + B(t) \Delta u \quad (1-13)$$

$$\Delta y = C(t) \Delta x + D(t) \Delta u \quad (1-14)$$

或者略去 Δ , 将其表示为习惯的形式, 就是

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

$$y = C(t)x + D(t)u$$

例 1-2 试求下列非线性系统在 $x_0=0$ 和 $u_0=1$ 处的线性化方程。

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_2^3 + 2u^2$$

$$y = x_1 + x_2^2$$

解 由状态方程和输出方程得

$$f_1(x_1, x_2, u) = x_2$$

$$f_2(x_1, x_2, u) = x_1 + x_2 + x_2^3 + 2u^2$$

$$g(x_1, x_2, u) = x_1 + x_2^2$$

故有

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x_0=1} &= 0, & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{x_0=1} &= 1, & \left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_{x_0=1} &= 0 \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{x_0=1} &= 1, & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{x_0=1} &= (1+3x_2^2) \Big|_{x_0=1} = 1, & \left. \frac{\partial f_2}{\partial u} \right|_{x_0=1} &= 4 \\ \left. \frac{\partial g}{\partial x_1} \right|_{x_0=1} &= 1, & \left. \frac{\partial g}{\partial x_2} \right|_{x_0=1} &= 2x_2 \Big|_{x_0=1} = 0, & \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{x_0=1} &= 0 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \Delta u \\ \Delta y &= [1 \quad 0] \Delta x \end{aligned}$$

1.3 状态空间描述的状态变量图

在状态空间分析中,采用状态变量图可以清晰地表示各状态变量之间的信息传递关系,并且对于建立系统的状态空间描述很有帮助。

状态变量图由比例器、求和器、积分器等几个基本部件所组成,它们的表示符号如图 1-4 所示。(a) 为加法器,输出是所有输入信号的代数和; (b) 是比例器或放大器,它将输入信号放大 K 倍,如果 $K=-1$,则成为反向器; (c) 为积分器; (d) 为带有初始条件的积分器。

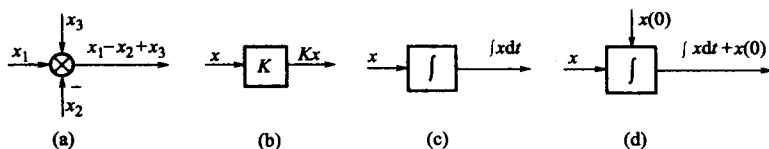


图 1-4 组成状态变量图的基本部件

对于一阶标量微分方程

$$\dot{x} = ax + bu$$

它的状态变量图如图 1-5(a) 所示。如不考虑初始条件 (即初始条件为零) 则相应的 S 域方程式为

$$sX(s) = aX(s) + bU(s)$$

其状态变量图如图 1-5(b) 所示。实际上,两者图形符号的区别只在于积分符号和变量的表示方式。

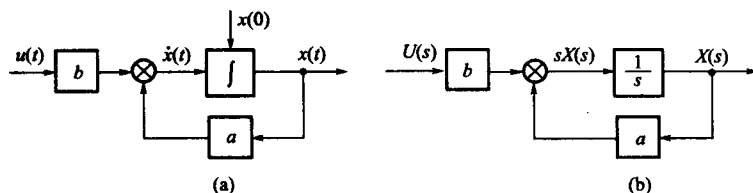


图 1-5 一阶系统的状态变量图

再以三阶微分方程为例

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x + a_3 x = bu$$

上式可改写为

$$\ddot{x} = -a_1 \dot{x} - a_2 x - a_3 x + bu$$

其状态变量图如图 1-6 所示。若初始条件为零，其 S 域的状态变量图如图 1-7 所示。

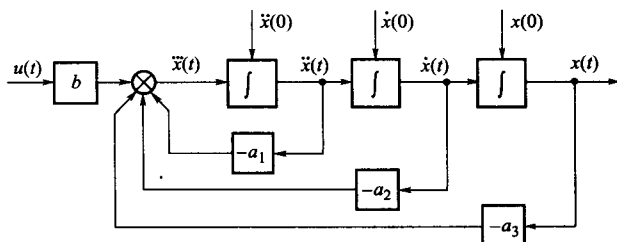


图 1-6 三阶系统的状态变量图

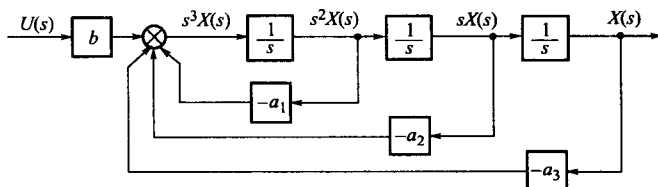


图 1-7 三阶系统的 S 域状态变量图

对于状态空间描述的一般形式

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

也可以用状态变量图的形式来表示，如图 1-8 所示。

图中双线箭头表示向量信号，状态变量图既表征了输入对于系统内部状态的因果关系，又反映了内部状态对于输出的影响，所以状态空间描述是对系统的一种完整的描述。

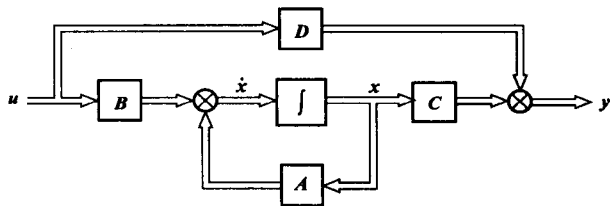


图 1-8 状态空间描述的状态变量图

1.4 状态空间描述的建立

在状态空间分析中，首先要建立系统的状态空间描述。系统的状态空间描述一般可以从三个途径获得：一是从系统物理的或化学的机理出发进行推导；二是由系统的结构图，按系统各个环节的实际连接来建立；三是对描述系统的高阶微分方程或传递函数予以演化。本节先介绍前两种方法。

1.4.1 从系统的机理出发建立状态空间描述

一般常见的控制系统，按其能量属性，可分为电气、机械、液压、热力等。根据其所遵循的物理或化学规律，如基尔霍夫定律、牛顿定律、能量守恒定律等，即可建立系统的状态空间描述。下面将列举电路网络、机械位移等几种系统的状态空间描述列写方法。

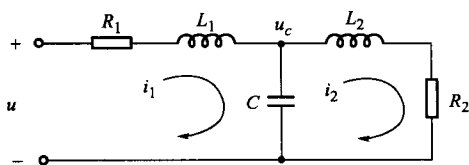


图 1-9 RLC 网络

例 1-3 试列写图 1-9 所示 RLC 网络的状态空间描述，其中以电流 i_2 为输出。

解 此网络的储能元件有电感 L_1, L_2 和电容 C ，考虑到 i_1, i_2 和 u_c 这三个变量是独立的，故可选它们为状态变量。根据网络回路和节点方程，可得

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + u_c = u$$

$$u_c = L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2$$

$$C \frac{du_c}{dt} = i_1 - i_2$$

令 $x_1 = i_1$, $x_2 = i_2$, $x_3 = u_c$ ，整理得

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = [0 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x}$$

例 1-4 试列写图 1-10 所示机械系统运动模型中以质量块 M_1 和 M_2 的位移 y_1 和 y_2 为输出的状态空间描述。

解 该机械系统中 K_1 和 K_2 是弹簧， M_1 和 M_2 是质量块， B_1 和 B_2 是阻尼器， $f(t)$ 是外作用力。其中弹簧和质量块是储能单元，可选择位移 y_1, y_2 和速度 v_1, v_2 为状态变量。

根据牛顿定律，对于 M_1 ，有

$$M_1 \frac{dv_1}{dt} = K_2(y_2 - y_1) + B_2(v_2 - v_1) - K_1 y_1 - B_1 v_1$$

对于 M_2 ，有

$$M_2 \frac{dv_2}{dt} = f - K_2(y_2 - y_1) - B_2(v_2 - v_1)$$

令 $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = \frac{dy_1}{dt} = v_1$, $x_4 = \frac{dy_2}{dt} = v_2$ 及 $u = f$ ，代入整理后有

$$\dot{x}_1 = \frac{dy_1}{dt} = x_3$$

$$\dot{x}_2 = \frac{dy_2}{dt} = x_4$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{K_1 + K_2}{M_1} x_1 + \frac{K_2}{M_1} x_2 - \frac{B_1 + B_2}{M_1} x_3 + \frac{B_2}{M_1} x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{K_2}{M_2} x_1 - \frac{K_2}{M_2} x_2 + \frac{B_2}{M_2} x_3 - \frac{B_2}{M_2} x_4 + \frac{1}{M_2} u$$

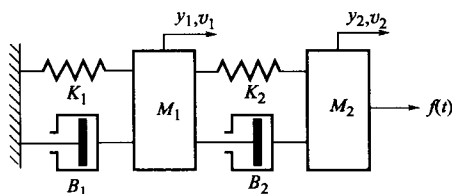


图 1-10 机械系统运动模型

写成矩阵形式, 有

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_1+K_2}{M_1} & \frac{K_2}{M_1} & -\frac{B_1+B_2}{M_1} & \frac{B_2}{M_1} \\ \frac{K_2}{M_2} & -\frac{K_2}{M_2} & \frac{B_2}{M_2} & -\frac{B_2}{M_2} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_2} \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

其中, $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$, $\mathbf{y}^T = [y_1 \ y_2]$ 。

上面所举例子表明, 对于结构和参数已知的系统, 建立状态空间描述的问题归结为依据物理定律得到微分方程, 再化为状态变量的一阶微分方程组。在状态变量的选取上, 一般选取储能部件的变量为状态变量, 同时还要注意它们都应该是独立变量。

1.4.2 从系统结构图出发建立状态空间描述

该方法是首先对系统结构图中各个环节按 1.3 节中所述方法, 变换成相应的状态变量图, 并把每个积分器的输出选做状态变量 x_i , 而积分器的输入便是相应的 $\dot{x}_i$ 。然后由状态变量图直接写出系统的状态方程和输出方程。

例 1-5 某系统的结构图如图 1-11(a) 所示。其输入为 u , 输出为 y , 试求其状态空间描述。

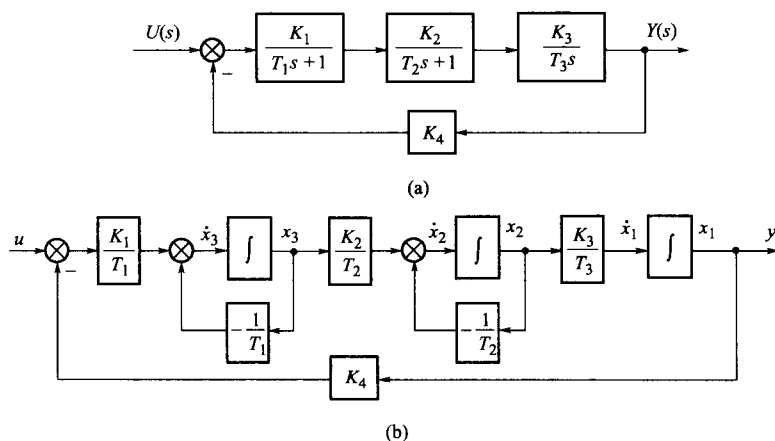


图 1-11 系统结构图与状态变量图

解 将各环节用状态变量图的形式表示, 如图 1-11(b) 所示。从图可知状态方程为

$$\dot{x}_1 = \frac{K_3}{T_3} x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T_2} x_2 + \frac{K_2}{T_2} x_3$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{K_1 K_4}{T_1} x_1 - \frac{1}{T_1} x_3 + \frac{K_1}{T_1} u$$

输出方程为 $y = x_1$ 。写成向量矩阵形式, 则系统的状态空间描述为