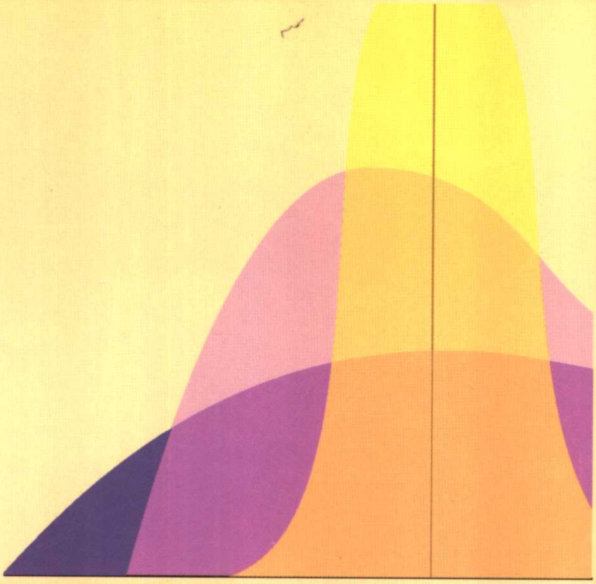
TURING 图灵数学·统计学丛书

PEARSON Addison Wesley



# Probability and Statistics

# 概率统计

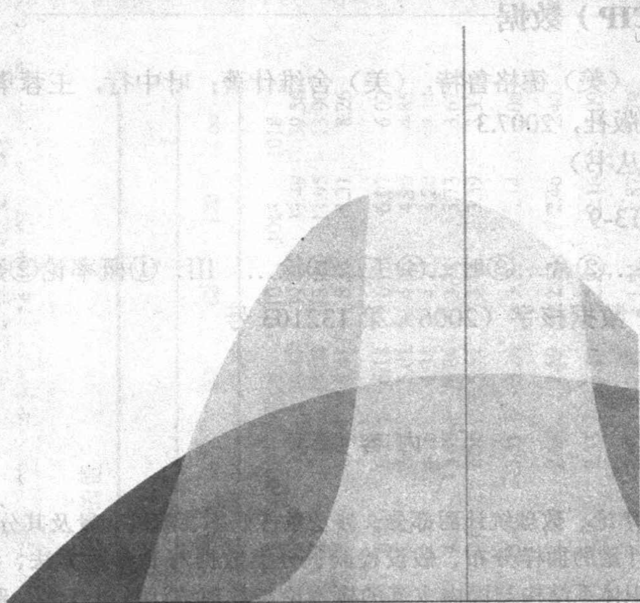
## （第3版）


［美］Morris H. DeGroot
Mark J. Schervish 著
叶中行 王蓉华 徐晓岭 译



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

图灵数学·统计学丛书



# Probability and Statistics

# 概率统计

## （第3版）

[美] Morris H. DeGroot
Mark J. Schervish 著
叶中行 王蓉华 徐晓岭 译

人民邮电出版社
北 京

图书馆

**图书在版编目（CIP）数据**

概率统计：第3版/（美）德格鲁特，（美）舍维什著；叶中行，王蓉华，徐晓岭译．
—北京：人民邮电出版社，2007.3
（图灵数学·统计学丛书）

ISBN 978-7-115-13913-9

Ⅰ．概…　Ⅱ．①德…②舍…③叶…④王…⑤徐…　Ⅲ．①概率论②数理统计　Ⅳ．021

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第132103号

## 内容提要

本书内容包括概率论、数理统计两部分，涉及条件概率、随机变量及其分布、数学期望、特殊分布、估计、估计量的抽样分布、假设检验、分类数据与非参数方法、线性统计模型、随机模拟等．本书知识体系结构与国内主流的概率论与数理统计教材基本一致，但内容取材及例题的安排上都比较新颖，尤其是新增加了一些非常实用而且比较先进的模拟方法．书中最后提供了奇数号习题的解答以及索引．

本书作为概率论与数理统计的教材，适合大学本科高年级学生和研究生用作教材或参考书，也可供统计工作人员用作参考书．

图灵数学·统计学丛书

**概率统计（第3版）**

◆ 著　[美]Morris H.DeGroot　Mark J.Schervish
译　叶中行　王蓉华　徐晓岭
责任编辑　明永玲　李　颖

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街14号
邮编　100061　电子函件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京铭成印刷有限公司印刷
新华书店总店北京发行所经销

◆ 开本：700×1000　1/16
印张：29.5
字数：628千字　2007年3月第1版
印数：1-4 000册　2007年3月北京第1次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2006-0309号

ISBN 978-7-115-13913-9/O1

定价：59.00元

**读者服务热线：(010)88593802　印装质量热线：(010)67129223**

# 译 者 简 介

**叶中行** 美国康奈尔(Cornell)大学博士，现任上海交通大学理学院副院长，现代金融研究中心副主任，教授，博士生导师，中国工程概率统计学会理事长. 其研究领域包括应用概率统计、金融数学、信息理论和信息处理、智能计算等. 出版专著、译著和教材6本，在国内外学术期刊和国际学术会议发表论文近百篇.

**王蓉华** 上海师范大学数理信息学院副教授，硕士生导师，应用数学与统计系系主任，统计专业学科带头人. 研究领域包括应用统计、统计教育等. 在国内外学术期刊和国际学术会议发表论文40余篇.

**徐晓岭** 上海对外贸易学院国际经贸学院教授，统计学博士，硕士生导师. 中国运筹学会可靠性数学分会理事，上海现场统计研究会理事. 研究领域包括应用统计、商务统计等. 在国内外学术期刊和国际学术会议发表论文70余篇.

# 译　者　序

本书是国际上一本畅销的大学本科生用的“概率论和数理统计”教材，原著作者的序言已经详细介绍了本书的特点. 全书内容丰富完整，特色明显，语言生动流畅，例题涉及面广泛，除了通过一些著名的例子来解释概率中的基本概念之外，又加入了一些新的例子，描述了概率论在遗传学、排队论和计算金融学中的应用. 将目前研究前沿的一些问题深入浅出地融入了教材，对提高大学本科生学习本课程的兴趣、了解应用背景很有帮助.

根据原作者和人民邮电出版社编辑人员的建议，我们删节了原书的部分内容，其中有属于中学阶段已经学习过的比较浅显的内容，如排列组合的基本知识，也有属于超出本科生水平的比较艰深的内容，此外还删除了原附在各章之后的难度较大的补充习题. 对保留部分中涉及删除部分内容的作了适当增减，使得在删除了上述内容后的这个版本仍是一个自成体系的完整版本. 当然如果读者对删除部分感兴趣的话，可以参考原著.

本书具有广泛的适用性，既可作为大学各专业的本科生教材，也可以作为实务工作者的参考书.

本书的翻译工作是由上海交通大学的叶中行、上海师范大学的王蓉华、上海对外贸易学院的徐晓岭和华东理工大学的马艳梅通力合作完成的. 叶中行负责协调全书的翻译工作并负责翻译前四章以及附录部分(包括习题解、名词索引等)，马艳梅翻译了第5章，王蓉华翻译了第6~9章，徐晓岭翻译了第10、11章，叶中行还对全书译稿进行了校对和润色.

上海交通大学数学系、河南大学数学系、华东理工大学商学院的部分研究生和进修教师对部分章节进行了试译，并帮助译文的计算机录入，他们是王起为、陈志娟、李灏、王英泽、王元英、胡华、左佳明、陆青、唐彦斌、符丽健、赵辉、秦长城、陈蕾、胡冰、辛欣、李俊、赵克、张志娟、高莉、杨菲菲、王丹娜、李国凤和杜利敏，在此向他们表示衷心感谢. 译者感谢人民邮电出版社图灵公司的指导和支持，使本书的翻译出版成为现实.

译　者

2006年6月于上海

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 前　　言

Morris DeGroot 已于 1989 年 11 月 2 日去世，但是他的思想并没有随他而去. 我很荣幸能够通过本书的第 3 版来继续发扬 Morris 的传统，虽然在这里做了一些改动，但我尽量保留本书的风格，尤其是 Morris 特有的叙述清晰的风格，使本书仍然卓而不群，引人入胜. 基于这个原因，我尽量使下边的前言与 Morris 本人写的第 2 版的前言风格一致. 在第 3 版中改变了那些不再正确的论述，并且对这些改动做了解释，因为我至少要再给 Morris 一次用他自己的表达方式来介绍他的书的机会.

这本书包含的内容比一年的概率统计课程稍多，对本课程数学上的要求是了解微积分的基本概念，熟悉向量和矩阵的概念和基本性质，这里假定读者事先没有概率和统计的相关知识.

编写这本书时我们充分考虑到了学生和老师，特别注意使课文中没有模糊的片断或其他的绊脚石，在合适的地方给出了定理和证明，并给出了说明性的例题. 在本书各节的末尾包含了近 1000 道习题，有些习题是前面课文中数值结果的应用，另一些意在进一步深化这些结果的思想.

前五章的内容主要讲概率知识，它可以作为一学期课程的内容来讲. 概率中的基本概念通过一些著名的例子加以解释，比如，出生问题、网球锦标赛问题、匹配问题、收藏品问题、掷骰子游戏(game of craps)等. 通过讨论统计赝品、伪随机数的应用、预测性的均值和中位数的优劣、中心极限定理的重要性、连续性的修正，展现了关于随机变量及其概率分布的标准材料. 这些章节的特色还包括马氏链、赌徒输光问题、赌博中的效用和偏好问题，这些问题都是些初等问题，但是如果课时有限，这些问题可以省略掉，而不会损害全书连贯性.

接下来的五章主要讲的是统计推断，所讲的内容总体上是现代的. 古典概型和贝叶斯统计方法是通过完整的形式展开，而不是教条地处理哪个学派的思想，我的目标是给学生提供一些已证实有用且今后依然要用到的理论和方法. 这些章节包含了关于估计、假设检验、非参数方法、多元回归和方差分析这些广泛但基本的内容. 对作为基本概念的极大似然估计、贝叶斯决策过程、无偏估计、置信区间、显著性水平等的强弱性和优缺点等作了详细讨论. 这些章节的显著特点包括：先验和后验分布、$\delta$ 方法、无偏性检验、拟合度检验、列联表和修正均值、回归线置信带、简单线性回归的贝叶斯分析和残差分析.

第 3 版中的主要改变有八种类型，把它归纳如下：

1. 新增加的第 11 章是关于模拟方面的. 它包含模拟特定的分布、重要取样、马

尔可夫链、蒙特卡罗方法和自助法. 其中特别注意对模拟近似中不肯定性估计，例子都是从书中前面的那些较难分析的问题中选出来的.

2. 此外，又加入了一些新的例子，其中许多的例子使用了已公开发表的论文中的实际数据，数据的分析不是来自于公开出版的资料，而是来自于对本书中的概念的解释. 在这本书中很多的数据都是从下面两个好的数据源处取得的：*Data and Story Library*(DASL)和 Hand et al. (1994). DASL 项目中心设在康奈尔大学，能够在互联网上找到数据集，网址是：http://lib.stat.cmu.edu/DASL/. 由 Hand 等写的书包含了对 500 多个数据组的描述和一个磁盘以免去自己动手输入. 第 2 版中的大部分例子在第 3 版中被保留，只换掉了少部分. 这些新的例子描述了概率论在遗传学、排队论和计算金融学中的应用.

3. 我们新增加了一些章节段落，讨论条件独立事件和随机变量、对数正态分布、分位数、预测和预测区间、不完全先验(improper priors)、贝叶斯检验、幂函数、M 估计、线性模型中的残差部分和简单线性回归模型中的贝叶斯分析等内容.

4. 在每个技术性章节的前面增加了简介和综述. 这些简介的段落为读者提供将要讨论的内容的提示，综述不是对所有内容的扼要重述，而是列举了最重要的思想. 一些章节内容很丰富，虽然这些内容都很有用，但有些内容对于继续学习是重要的. 并不是所有的学生在第一次阅读时就能区分轻重缓急(但愿书中已经做到这一点). 而综述的作用是帮助指明重要的主题.

5. 在应该略加总结或与课文中别处有联系的地方增加了特殊的注释，在课文中用“注释”表示出来.

6. 课文中的内容也做了一些调整，独立性放在了条件概率的后面，第 2 版中的几个小的段落以注释或习题的形式重新编写，它们包括“最优选择”、“波雷尔 - 柯尔莫戈罗夫悖论”、“中位数和其他分位数的推断”、“回归谬论”. 所有随机数字的表格讨论被模拟内容所代替. 第 2 版中关于迹和秩的检验的两节被合并成一节. 调整最多的是第 8 章. 我完全重写了关于假设检验的第一节，给出了充分的背景材料以便能够在 8.3 节中直接给出 $t$ 检验. 中间插入的最优检验是选读内容. 这些段落中的内容尽管数学上是漂亮的，但是在现代统计分析中已经没有那么重要了. 另外扩展了幂函数的覆盖面并介绍了有偏 $t$ 分布.

7. 我删掉了一些第 2 版的内容，除了上面提到的改动之外，我还删除了“多决策问题”章节. 我删去了那些我认为没有达到一定深度的一些讨论，如似然准则、高斯 - 马尔可夫定理和逐步回归法.

8. 从许多章节中选出了一些较有难度的内容，把它们移到章节的末尾，作为扩展研究.

如果没有足够的时间学完这本书的话，下面这些章节可以省略掉而不会严重影响后面章节的学习：2.4，7.8、8.2，9.4 和 11.3. 除了这些章节相互交叉参考外，偶而也有其他内容需要参考这些章节，但影响不大. 多数情况是第 11 章中向前参见

某章节，原因是这些选读章节涉及了一些比较难学的内容，并且模拟方法在解决那些通过分析不能解决的难题时很有用.

虽然计算机在概率和统计课程中是很有用的辅助工具，但本书前十章大部分的习题中并不需要计算机或程序设计的知识.（少数新加的关于实数和残差点习题除外.）基于这一点，本书在第 11 章之前的章节和计算机应用的联系并不紧密，虽然如此，我还是为那些想要学习与模拟类似的统计方法的人在前面章节中增加了许多理论和方法方面的练习，我们鼓励教师在讲课中尽可能地应用计算机，还有小的计算器有助于解某些数值习题. Morris 在去世之前，开始显示出对计算机的兴趣，这与我第一次见到他时形成鲜明的对比. 我们系第一次在各教师办公室安装电脑终端后，Morris 长期置之不理，后来，当他看到文字处理软件能像打字机一样令人满意地打印文字，他才开始用计算机来处理文档. Morris 去世后的这些年，计算机在统计理论和方法中发挥了更大的作用，我想，如果 Morris 还活着，他在讲授统计理论和方法时肯定无法离开电脑了.

我要感谢在本书修订过程中很多人给予我的鼓励和帮助，其中特别感谢 Marilyn DeGroot 和 Morris 的子女给我这个修订 Morris 杰作的机会.

我也感激许多读者、审阅人、同事、员工和 Addison-Wesley 公司的人们，他们对本版本的完成给予了大量帮助和建议. 审阅人有：华盛顿大学(圣路易斯)的 Brian Blank，波士顿学院的 Daniel Chambers，多伦多大学的 Michael Evans，宾州印第安那大学的 Doug Frank，兰道夫 - 梅肯学院的 Lyn Geisler，俄亥俄州立大学的 Prem Goel，所罗马州立大学的 Susan Herring，北爱荷华大学(色达瀑布城)的 Syed Kirmani，杜克大学的 Michael Lavine，图雷大学的 John Liukkonen，东北大学的 Rosa Matzkin，塞拉卡斯大学的 Terry McConnell，加州大学(戴维斯)的 Hans-Georg Mueller，俄亥俄州立大学的 Mario Peruggia，宾州大学的 HenSiong Tan，约翰 - 霍普金斯大学的 Kenneth Troske，俄亥俄州立大学的 Joseph Verducci，肯特州立大学的 Mahbobeh Vezveai，杜克大学的 Brani Vidakovic，东密歇根大学的 Bette Warren，克莱门森大学的 Calvin L. Williams. 校稿人包括：俄亥俄州立大学的 Joseph Verducci，所罗马州立大学的 Susan Herring，罗格斯大学的 Yehuda Vardi. 我非常感谢我在卡内基 - 梅隆大学的同事，特别是 Anthony Brockwell，Joel Greenhouse，John Lehoczky，Heidi Sestrich 和 Valerie Ventura.

Addison-Wesley 公司和其他机构中帮助编写这本书的人有：Paul Anagnostopoulos，Cindy Cody，Deirdre Lynch，George Nichols，Joe Snowden 和 Anna Stillner.

如果我漏掉了某些人，很抱歉，我不是故意的. 类似的错误也不可避免地会出现在任何类似的项目中(我的意思是说我参加过的项目). 基于这个原因，只要这本书一出版，我就在我的网页上公布这本书的信息，包括修正勘误表，我的网页是：`http://www.stat.cmu.edu/~mark/`. 欢迎读者把发现的错误发给我.

自从 Morris 于 1985 年 10 月为这本书的第 2 版写过序言之后，统计学领域发生了

很大的变化. 个人计算机(工作站)正在由昂贵的稀罕的玩具逐步变成重要的研究工具. 1985 年以来，常用的统计方法已经进一步发展并相当依赖于高速计算. 然而，一个学生可用于该领域的学习时间并没有增加，因此我们的书不得不放弃一些内容. 近年来，有一个在教学中增加计算方法而减少数学理论的趋势，我不想伪称这是一本统计计算方法的课本，但是我努力把它写好，并使它充分地现代化以适应新一代统计人员的需要. 我希望我已经成功达到了 Morris 家人对我的期望.

# 目　　录


第 1 章　概率导引 …… 1
1.1　概率的发展历史 …… 1
1.2　对概率的几种解释 …… 2
1.3　试验和事件 …… 4
1.4　概率的定义 …… 5
1.5　有限样本空间 …… 10
1.6　多项式系数 …… 13
1.7　事件和的概率 …… 17
第 2 章　条件概率 …… 23
2.1　条件概率的定义 …… 23
2.2　独立事件 …… 28
2.3　贝叶斯定理 …… 36
2.4　马尔可夫链 …… 48
第 3 章　随机变量及其分布 …… 58
3.1　随机变量与离散型分布 …… 58
3.2　连续型分布 …… 63
3.3　分布函数 …… 69
3.4　二元分布 …… 76
3.5　边际分布 …… 85
3.6　条件分布 …… 94
3.7　多元分布 …… 104
3.8　随机变量的函数 …… 115
3.9　两个或两个以上随机变量的函数 …… 122
第 4 章　数学期望 …… 134
4.1　单个随机变量的数学期望 …… 134
4.2　数学期望的性质 …… 141
4.3　方差 …… 147
4.4　矩 …… 152
4.5　均值和中位数 …… 158
4.6　协方差和相关系数 …… 162
4.7　样本均值 …… 168
第 5 章　特殊分布 …… 175
5.1　引言 …… 175
5.2　伯努利分布与二项分布 …… 175
5.3　超几何分布 …… 179
5.4　泊松分布 …… 183
5.5　负二项分布 …… 190
5.6　正态分布 …… 194
5.7　中心极限定理 …… 206
5.8　对连续性的修正 …… 215
5.9　伽玛分布 …… 217
5.10　二元正态分布 …… 225
第 6 章　估计 …… 232
6.1　统计推断 …… 232
6.2　先验分布与后验分布 …… 235
6.3　贝叶斯估计 …… 241
6.4　极大似然估计 …… 249
6.5　极大似然估计的性质 …… 258
第 7 章　估计量的抽样分布 …… 264
7.1　统计量的抽样分布 …… 264
7.2　卡方分布 …… 266
7.3　样本均值与样本方差的联合分布 …… 269
7.4　$t$ 分布 …… 276
7.5　置信区间 …… 281
7.6　无偏估计 …… 287
第 8 章　假设检验 …… 295
8.1　假设检验问题 …… 295
8.2　双侧的备择假设 …… 308
8.3　$t$ 检验 …… 314
8.4　两个正态分布均值的比较 …… 325

8.5 $F$分布 …………………………… 333
第9章 分类数据与非参数方法 … 341
9.1 拟合优度检验 ………………… 341
9.2 复合假设的拟合优度 ………… 347
9.3 列联表 ………………………… 354
9.4 符号检验与秩检验 …………… 359
第10章 线性统计模型 …………… 367
10.1 最小二乘法…………………… 367
10.2 回归分析……………………… 376
10.3 方差分析……………………… 384
第11章 随机模拟…………………… 393
11.1 为什么随机模拟是有用的? … 393
11.2 特定分布的模拟……………… 406
11.3 基于马尔可夫链的蒙特卡罗方法…………………………… 420
11.4 自助法………………………… 437
附表 ………………………………… 450

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 第1章 概率导引

## 1.1 概率的发展历史

用概率来度量不确定性和可变性已经有数百年的历史了，而今概率已应用到很多的领域，例如：医药、赌博、天气预报和法律.

偶然性和不确定性的概念像文明本身一样古老，人们不得不应付天气、食物供应和环境中其他方面的不确定性，并且为减少这种不确定性及其影响而奋斗. 即便是赌博的思想也有很长的历史. 大约公元前3500年，在埃及等地已经出现利用骨制物体做具有偶然性的赌博，它就是掷骰子的先驱. 立方体的骰子实质上与从公元前2000年的古埃及坟墓中出土的骰子完全一样. 我们知道从那时起用骰子赌博已经开始流行，并在概率理论的早期发展中扮演了重要的角色.

通常大家都认为概率的数学理论是由法国数学家帕斯卡(1623—1662)和费马(1601—1665)首创的，他们成功地导出了包括掷骰子在内的一些赌博的实际概率. 他们解决的问题中有些已是300多年悬而未决的. 然而更早的卡尔达诺(1501—1576)和伽利略(1564—1642)已经算出掷骰子的各种排列组合的数值概率.

自从17世纪以来概率论得到了稳步的发展，并且被广泛地应用到很多研究领域. 现在，概率论在工程、科学和管理等方面是一个很重要的工具. 许多研究工作者正致力于发现和确立概率论新的应用方面，比如医药、气象、卫星摄影、营销、地震预测、行为学、计算机系统设计、金融、遗传学和法律. 在反托拉斯或者雇佣歧视等法律诉讼程序中，诉讼双方都会提供概率统计的计算来支持他们的案例. 1

### 参考文献

David(1988)、Ore(1960)、Stigler(1986)和Todhunter(1865)论述了赌博的古代史和概率的数学理论的起源.

一些介绍概率理论的书籍，与本书所研究的主题大致相同，较好的书有：Feller(1968)；Hoel, Port and Stone(1971)；Meyer(1970)和Olkin, Gleser and Derman(1980). 另外一些书籍阐述概率和统计的深度上与本书相当，它们是：Brunk(1975)；Devore(1999)；Fraser(1976)；Hogg and Tanis(1997)；Kempthorne and Folks(1971)；Larsen and Marx(2001)；Larson(1974)；Lindgren(1976)；Miller and Miller(1999)；Mood, Graybill and Boes(1974)；Rice(1995) and Wackerly, Mendenhall and Schaeffer(1996).

## 1.2 对概率的几种解释

*本节描述了概率的三种常用的运算上的解释. 尽管这些解释看起来似乎是不尽相同的，但幸运的是无论你选择哪种解释，同样都能很好地运用到概率的计算中去(本书前五章的主要内容).*

除了概率论的许多形式的应用之外，概率的概念已经渗透到我们的日常生活和交往中. 我们经常听到或使用这样的说法："明天下午可能会下雨"；"飞机可能会晚点到达"或者"他能够有机会来参加我们今天的晚宴真好." 每种表达都是基于概率的概念，或者说，某个特殊事件发生的可能性.

尽管事实上概率的概念在我们的生活中是如此的普遍和自然，可是却没有为所有统计人员、哲学家和其他的权威人士所接受的对概率这一术语的唯一科学解释. 这些年来，一些权威人士提出的每个概率概念都受到其他人的批评. 事实上，概率真实的含义已经成为一个非常有争议的课题，并且涉及目前关于统计基础的哲学讨论. 这里将讨论对概率的三种不同的解释，每种解释对于将概率论应用到实际问题中都是非常有用的.

### 1.2.1 概率的频率解释

在很多问题中，对一个过程中某个特定结果的概率可被理解为该过程在相同条件下重复很多次而得到这个结果的*相对频率*(relative frequency). 例如，认为一枚硬
2 币投掷一次得到正面的概率是1/2，是因为它在相同条件下投掷很多次得到正面的相对频率大约是1/2. 换句话说，假定投掷得到正面的比例大约是1/2.

当然，这个例子中提到的情况太模糊，不能作为概率的科学定义的一个根据. 首先，提到投掷硬币"很多次"，但是对于具体的次数没有明确的界定. 其次，规定每次必须在"相同条件下"投掷硬币，但是并未确切地描述这些条件. 每次投掷硬币的条件不一定完全相同，否则会出现相同的结果，即全是正面或全是负面的. 事实上，一个熟练的人可将硬币投到空中，并且几乎每次都能以得到正面的方式抓住它. 因此，完全控制投掷是不可能的，必须有一些"随机"的特征.

而且，得到正面的相对频率被说明为"近似是1/2"，但是对于偏离1/2的程度没有明确的界限. 如果投掷一枚硬币1 000 000次，我们并不期望恰好得到500 000次正面，事实上，如果恰好得到500 000次正面，我们会非常惊奇. 另一方面，我们也不期望得到正面的次数远离500 000次. 希望能够对于出现正面的不同的可能次数作一个准确的描述，但这些可能性当然依赖于我们将要定义的概率的概念.

概率的频率解释的另一个缺点在于，至少在原则上，只适用于对其中一个过程能大量重复的问题. 很多重要的问题都不属于这种类型. 比方说，不能直接应用概率的频率解释某一对熟人在两年之内结婚的概率，或一项特殊的医学科研项目在一

个特定时期内攻克某种疾病的概率.

### 1.2.2 概率的古典解释

概率的古典解释是基于等可能结果(equally likely outcomes)的概念. 比方说，投掷一枚硬币可能会出现两种可能的结果：正面或反面. 如果假定这两种结果出现的机会均等，它们必定有相同的概率. 由于概率的总和是1，所以出现正面和反面的概率必为1/2. 更一般地，如果某个过程的结果必是 $n$ 种不同结果中的一种，并且这 $n$ 种结果以相同的几率发生，那么每种结果的概率就是 $1/n$.

当试图从古典解释中发展概率的形式上的定义时，出现了两个根本性的难题. 首先，等可能结果的概念本质上是基于我们将要定义的概率的概念. 两个可能结果等可能出现的陈述和两个可能结果有相同概率的说法是一样的. 其次，没有一种系统的方法来设定等可能结果的概率. 当掷一枚硬币，或掷一枚均匀的骰子，或从一 3
副充分洗过的牌中抽取一张的时候，由于过程的特性经常会使我们认为可能出现的不同结果的几率相等. 然而当问题是猜测一对熟人是否将会结婚或一个科研项目是否会成功时，认为可能出现的结果几率相等就不再是古典的了，这些结果的概率就需要一种不同的方法来设定.

### 1.2.3 概率的主观解释

根据概率的主观(或个人)解释，一个人对某个过程可能出现结果的设定取决于这个人对结果出现可能性的主观判断. 这个判断是基于每个人对这个过程的信念和信息而做出的. 另一个具有不同信念或掌握不同信息的人，对同一个结果也许会给出不同的概率. 基于这个原因，称某个人对一个结果的概率为*主观概率*比称其为*真实概率*(true probability)要更恰当.

作为该解释的一个说明，我们假设抛掷了一枚硬币. 一个对硬币本身或抛硬币方式一无所知的人认为出现正面或反面结果的可能性相等. 该人就会对得到正面的可能性赋以1/2的主观概率；然而那个实际抛硬币的人也许会感到正面更可能出现. 为了让普通人能设定结果出现的主观概率，他们会用很多形式来强调他们的观点. 比方说，假设他们认为抛硬币时正面出现的概率与从四张红牌和一张黑牌充分洗过后抽出一张红牌的概率相等，因为他们设定抽到红牌的概率为4/5，他们也应该设定抛一枚硬币时结果为正面的概率为4/5.

可以将概率的这种主观解释公式化. 一般来说，若人们对结果的不同组合的相对可能性的判断满足某种相容性要求，即表明可以唯一地确定不同可能事件的主观概率. 然而，这种主观解释遇到两个困难. 首先，要求人们对无数事件相对可能性的判断必须完全相容，且互相不矛盾，而这似乎不是人类所能做到的. 其次，主观解释没有提供两个或多个科学家一起工作，且对他们共同感兴趣的某个科研领域的知识状况而得到相同评价的客观根据.

另一方面，概率主观解释的认识对于强调科学的一些主观方面有益处. 一个科学家对于某个不确定结果的概率的评价最终一定是他自己基于所有已知资料的评价. 既然这位科学家可能把这种情况或过去类似的结果出现的相对概率都考虑在内，也许这个评价部分来自于对概率的频率理解. 也许这位科学家会把等可能出现的结果
4 的总数考虑进去，那么这个评价也许就来自于对概率的古典解释，然而无论哪种情况，对数字化的概率的最终设定是科学家自己的责任.

在一个科学家从一系列可供选择的课题中选择研究课题时，在开展这项课题时所选择的实验里，在从实验数据中得出的结论中，都能显示出科学的主观特性. 概率和统计的数学理论在这些选择、决策和结论中起着重要的作用.

**注：** 概率理论不依赖于解释. 本书的1～5章介绍了概率的数学理论，而没有考虑围绕概率这个术语不同解释的争论. 如果将在特殊问题中用哪种概率的解释忽略不计，则该理论是正确的且能够充分利用. 本书中所提到的理论和技巧可以对实际实验设计和分析的几乎所有方面提供有价值的指导和工具.

## 1.3　试验和事件

概率将是我们定量地界定某件事可能发生的方法(依据1.2节关于概率解释的一种叙述). 本节中我们给出应用概率情形类别的一些例子.

### 1.3.1　试验类型

当进行一项试验时，概率理论适合于可能出现的不同结果，也适合于可能发生的事件. 术语“试验”在概率理论中是用来描述每一个不能预先确知结果的过程. 现在给出一些试验的例子如下：

1. 在将一个硬币抛10次的试验中，试验者可能想确定正面至少出现4次的概率.

2. 从一个装有相似零件的仓库中选出1000个晶体管样品，对每一个所选样品都要进行检测，试验者可能想确定所选晶体管中有不多于一个次品的概率.

3. 在连续90个中午对某固定地点测量气温的试验中，试验者可能想确定在这段时间中平均气温低于某个值的概率.

4. 从托马斯·杰弗逊的生平信息中，试验者可能想确定杰弗逊生于1741年的概率.

5. 在评价某一时间一项工业研究发展计划的过程中，试验者可能想确定在未来
5 几个月内成功开发出新产品的概率.

依据这些术语的常用意义，从这些例子中可以看出，一项试验的可能结果也许是随机的，也许是确定的. 每项试验的有趣之处在于能在试验之前预测到它的每一个可能出现的结果，并可以确定所感兴趣的不同结果组合的概率.

### 1.3.2 概率的数学理论

正如1.2节所述，对很多试验结果的一些概率认定的合理意义和解释是有争议的. 然而，一旦确定了一项试验的一些简单结果的概率，所有权威们就会完全同意概率的数学理论为进一步研究这些概率提供合适的方法论. 在关于概率的几乎所有数学理论的著作中，从最基础的教科书到最高级的研究，都涉及下面两个问题：(i) 从一项试验的每一个可能出现结果的特定概率中确定某些事件概率的方法；(ii) 当得到额外的相关信息时修正概率事件的方法.

这些方法是基于标准数学技术的. 本书前五章的目的就是介绍这些技术，将其合在一起构成了概率的数学理论.

## 1.4 概率的定义

首先给出概率的数学定义，再给出容易从定义推导出的几个有用的结果.

我们称一个试验的所有可能结果组成的集合为该试验的样本空间(sample space)，通常记为 $S$. 每个结果可被认为是样本空间中的点(point)，或集合中的元素(element).

记空集合(即不含任何元素的集合)为$\varnothing$；记两个集合 $A$ 和 $B$ 的并(即包含 $A,B$ 中所有元素的新集合)为$A\cup B$；记集合 $A$ 和 $B$ 的交(即既属于 $A$ 又属于 $B$ 的元素组成的新集合)为 $A\cap B$；而记集合 $A$ 的补(即样本空间 $S$ 中不属于 $A$ 的元素组成的集合)为 $A^c$.

### 1.4.1 公理和基本定理

在本节我们将给出概率的数学定义或公理化定义. 在一个试验中，有必要给样本空间 $S$ 中每个事件 $A$ 设定数 $\Pr(A)$，该数表示事件 $A$ 发生的概率. 为了满足概率 12
的数学定义，设定的数 $\Pr(A)$ 必须满足三个特定的公理. 这些公理能确保我们直观上希望数 $\Pr(A)$ 具备1.2节所描写的概率性质.

第一个公理阐明任何一个事件的概率必定非负.

**公理1** 对任意事件 $A$，$\Pr(A)\geqslant 0$.

第二个公理阐明若某事件肯定要发生，则该事件的概率为1.

**公理2** $\Pr(S)=1$.

在给出公理3之前我们首先讨论不相交事件的概率. 若两事件不相交，我们很自然地假定至少有一个事件发生的概率应是它们各自概率之和. 事实上，这种概率的可加性(additive property)也适合于任何有限个不相交事件的集合，甚至也适合于无限个不相交事件序列. 若假定可加性仅适合于有限个不相交事件，我们就不能肯定这个特性也适合于无限个不相交事件列. 然而，若假定任何一个无限不相交事件

列具有概率可加性，那么有限个不相交事件一定也具有这个性质（正如我们将要证明的那样）. 综合以上考虑给出了第三个公理.

**公理3**　对于任何无限不相交事件列 $A_1, A_2, \cdots$，有 $\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i)$.

现在可以将概率的数学定义表述为：样本空间 $S$ 上的概率分布，或简称为概率，是设定的满足公理1、公理2和公理3的数 $\Pr(A)$.

下面根据公理3导出两个重要的推论. 首先证明若某事件不可能发生，则它的概率必定为0.

**定理1.4.1**　$\Pr(\varnothing)=0$.

**证明**：考虑无限事件列 $A_1, A_2, \cdots$，满足 $A_i=\varnothing, i=1,2,\cdots$，换言之，序列中每个事件都是空集 $\varnothing$. 因为 $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$，因此是无限不相交事件列. 更进一步，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$. 因

13 此，由公理3得：$\Pr(\varnothing) = \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(\varnothing)$. 该方程表明数 $\Pr(\varnothing)$ 被无限次相加后其和仍是 $\Pr(\varnothing)$，满足该性质的实数只有零. ■

现在可以证明公理3中对无限不相交事件列的可加性，对任何有限不相交事件也成立.

**定理1.4.2**　对任意 $n$ 个不相交事件 $A_1, \cdots, A_n$ 的有限序列有

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i).$$

**证明**：考虑事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的无限序列，其中 $A_1, \cdots, A_n$ 就是 $n$ 个给定的不相交事件，当 $i>n$ 时，$A_i=\varnothing$. 则无限列中的事件互不相交且有 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. 从而根据公理3有：

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \Pr(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i) + 0 = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i).$$

■

### 1.4.2　概率的进一步性质

根据上面的公理和定理，现推导概率分布的另外四个一般性质. 由这些性质的基本特性，我们就以定理的形式给出，它们都很容易证明.

**定理1.4.3**　对任意事件 $A$，有 $\Pr(A^c)=1-\Pr(A)$.

**证明**：$A$ 和 $A^c$ 是不相交的事件且有 $A \cup A^c = S$，由定理1.4.2得 $\Pr(S)=\Pr(A)+$

14 $\Pr(A^c)$. 根据公理2有 $\Pr(S)=1$，则 $\Pr(A^c)=1-\Pr(A)$. ■

**定理1.4.4**　如果 $A \subset B$，则 $\Pr(A) \leqslant \Pr(B)$.

**证明**：如图1-1所示，可将事件 $B$ 理解为两个不相交事件 $A$ 和 $BA^c$ 的并. 从而有 $\Pr(B)=\Pr(A)+\Pr(BA^c)$. 又 $\Pr(BA^c) \geqslant 0$，则 $\Pr(B) \geqslant \Pr(A)$. ■

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com