# 普通物理、大学物理

## 经典名题名师解析


张淳民 查新未 刘凤英 孟 杰 编著

陈秉乾 主审


知识要点 完整梳理课程要点

名师指点 高度概括知识重点

思路分析 深入剖析解题思路

习题精解 严格示范解题过程

方法要略 精辟总结典型方法

知识扩展 深入展示题型变化


科学出版社

www.sciencep.com

# 普通物理、大学物理
# 经典名题名师解析

张淳民　查新未　刘凤英　孟　杰　编著

陈秉乾　主审



科学出版社

北　京

## 内 容 简 介

本书为针对理科普通物理和工科大学物理课程的经典例题的集绵，由北京大学、清华大学、西安交通大学、西安邮电学院等的长期从事物理学教学和研究的教授编写．本书特色鲜明、体系新颖，每章由“知识要点”、“名师指点”、“精选题解”三部分组成．书中所选题目均来自多年来国内外的优秀教材、经典题解和研究生入学考试试卷中的典型试题．试题求解由“思路分析”、“精解”、“方法要略”和“知识扩展”等四部分组成．

本书的指导思想是通过对普通物理、大学物理各类精选例题的剖析、求解和示范，启迪思维，扩展视野，分析思路，传授技巧，归纳各类问题的求解方法；与此同时，展示题型可能变化与深入之处，指明相关方法要略以及如何灵活运用所学知识，达到使学生能够加深理解、提高能力、举一反三、融会贯通之目的．

本书适合作为高等院校理、工、农、医等学科各专业及师范院校大学生学习普通物理和大学物理课程的教学辅导书，也适合报考研究生全面复习以及大学物理教师的教学之用．

**图书在版编目(CIP)数据**

普通物理、大学物理经典名题名师解析/张淳民等编著．—北京：科学出版社，2006

ISBN 7-03-017471-2

Ⅰ．普… Ⅱ．张… Ⅲ．物理学-高等学校-解题 Ⅳ．O4-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 067820 号

责任编辑：昌 盛 / 责任校对：桂伟利

责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006年10月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2006年10月第一次印刷 印张：20 3/4 插页：1

印数：1—4 000 字数：486 000

**定价：28.00 元**

（如有印装质量问题，我社负责调换〈文林〉）

# 作者简介

**张淳民**　博士，西安交通大学教授，博士生导师．现任美国光学学会（OSA）会员、全国电类专业研究会副理事长、全国高校电磁学研究会副理事长、西安交通大学理学院物理系副主任、陕西省先进功能材料及介观物理重点实验室副主任．

研究方向为空间光学、成像光谱技术、光电图像处理、大气光学及低维材料的光学性质等．

主持国家自然科学基金3项，其中国家自然科学基金重点项目1项；主持并承担国家863项目和省科技攻关项目、自然科学基金重点项目多项．近年来在《Applied Optics》、《Optics Communications》、《Journal of Optics A》等国内外学术期刊上发表论文60余篇，其中SCI、EI收录近20篇；国际会议特邀报告3篇；获专利4项．

长期从事普通物理、大学物理的教学和研究工作．主持国家级教改项目1项，省、校级教改项目8项；在《大学物理》等刊物发表教改论文40余篇；主编出版《大学物理》、《物理学》、《文科大学物理》等本科生教材4部，主编“十五”、“十一五”国家级规划教材2部；主编研究生教材1部．

先后获省（部）、校级奖10余项．作为第一发明人，2002年获国际专利技术成果博览会金奖3项．

**查新未**　教授，西安邮电学院数理系应用物理教研室主任．

1982～1983年在中国科学院物理研究所进修，1984～1986年在中国科学技术大学固体物理助教进修班学习．长期从事大学物理的教学工作，先后讲授过激光原理、激光拉曼光谱、原子物理、量子力学、光纤通信原理、大学物理等课程．

主要从事量子理论、激光光谱学的研究工作．主持和参加的科研项目有国家自然科学基金、陕西省自然科学基金、省教育厅科学研究项目等．先后在《Modern Physics Letters B》、《物理学报》、《大学物理》等学术刊物上发表科研与教学论文50余篇．其中“激光诱导生物碱类中草药的荧光观察”被评为1991年陕西省自然科学优秀学术论文，“量子力学算符若干问题与量子通信中的量子纠缠”获2005年陕西省高等学校科学技术奖．

**刘凤英**　清华大学物理系教授. 长期从事大学物理课程的教学与研究工作，主讲过各类大学物理课程（理、工、文科等）. 组织并参与了清华大学大学物理电子图书的出版和编辑，并参与了多部大学物理教材及相关图书的编写工作.

自1998年起一直担任清华大学大学物理系列课课程负责人；国家基础课程工科物理教学基地副组长，具体负责基地建设的各项事宜.

清华大学大学物理系列课是首批国家精品课程；国家基础课程工科物理教学基地为国家优秀基地.

**孟杰**　北京大学教授、博士生导师、教育部"长江学者奖励计划"特聘教授、国家杰出青年基金获得者.

1991年获北京大学博士学位. 1997年被北京大学从国外直接聘为教授. 现为纽约州立大学石溪分校、Lawrence Berkeley 国家实验室等国内外十余所大学及研究所的学术委员会委员和客座教授，多种学术刊物的编委会成员和审稿人. 在国内外刊物上发表SCI论文100多篇，SCI引用逾千次，先后应邀在德国、美国等多个国家访问和讲学近百次.

近年来参与了普通物理、大学物理课程的教研工作.

# 前　言

呈现在读者面前的这本《普通物理、大学物理经典名题名师解析》是一部经典名题集锦，汇集了国内外大量优秀试题和经典名题，涵盖了普通物理的全部内容．普通物理和大学物理是理工科大学生必修的一门重要基础课程，也是报考理工科硕士研究生的考试科目之一．普通物理和大学物理课程，对理工科大学生能力、素质和创新意识的培养占有极其重要的基础地位，对学生未来的发展具有极其重要的作用．

该课程包含力学、热学、电磁学、光学和近代物理等部分，覆盖面大，内容丰富；试题类型多，涉及范围广．长期以来，许多学生未能摸索出解题的思路、方法和规律，深受解题困扰，颇感解题困难．针对这一现状，编者在长期教学实践中，从国内外的优秀教材、经典题解和历年来研究生入学考试试题中，经过多年的筛选、积累，精选出了具有代表性的大量典型名题，从思路分析、精解、方法要略和知识扩展等方面进行剖析、求解和示范，目的是为在校大学生学习和掌握物理知识，为报考研究生的全面、重点复习提供一本有价值的学习指导书和参考书．基于上述想法，我们确立了该书的框架、体系和编写思路．

与国内外已经出版的同类书籍比较，本书的特色及独到之处为：

1．本书由北京大学、清华大学、西安交通大学等长期从事物理教学和研究的教授编写．

2．本书通用性强，并不局限与某套教材相配套，而是针对理工科大学生应该掌握的物理学教学内容、基础知识和基本要求，提高学生的分析解题能力以及培养其科学素养和创新意识而构思编写的．

3．所有题目均选自国内外多年来使用的优秀试题和经典名题．这些题目经过多年锤炼，极具典型性，每道试题均展示一种类型，另外，本书收录的一些优秀的综合性题目，也颇具代表性．

4．该书在内容安排和格式上更具实用性，具体体现在以下两个方面．

其一，每章含有“知识要点、名师指点、精选题解”三大部分．

其二，精选题解部分由“思路分析、精解、方法要略、知识扩展”等四部分组成．重点突出，结构合理，特色鲜明．通过方法要略和知识扩展，使学生掌握解题要领、举一反三、融会贯通．

5．本书物理概念、图像及解题思路清晰，做题规范，严谨科学．

本书由西安交通大学张淳民教授、西安邮电学院查新未教授、清华大学刘凤英教授、北京大学孟杰教授编写．

北京大学陈秉乾教授任本书主审，对全书内容进行了细致地审阅，提出了非常宝贵的指导与修改意见，并给予本书高度的评价．

空军工程大学黄海清副教授对本书内容进行了全面、认真和细致地校改，提出了许

多修改意见，为本书的出版做了大量具体而细致的工作.

西安理工大学唐远河副教授、西安工业大学许世军副教授对本书的部分样稿进行了仔细地校正并提出了许多建设性的建议。

科学出版社昌盛同志任本书编辑，为本书编写方案的制定和体系的形成提出了许多建议. 西安交通大学李普选高级工程师为本书进行了计算机绘图. 研究生袁志林、吴磊、贺健、严新革、阮锴、孙尧、彭志红、王笑静、叶剑勇、简小华等参加了本书的文字输入及修改工作. 在此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平所限，本书在许多方面还存在需要完善之处，也一定会有诸多不妥和错误，衷心希望读者提出宝贵意见.

作　者

2006 年 8 月于西安

# 目　录

# 第 1 章　质点运动学

## 一、知识要点

### 1. 描述质点运动的基本物理量

位置矢量

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

位移矢量

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$

速度矢量

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

加速度矢量

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

### 2. 速度、加速度在不同坐标系下的表达式

直角坐标系：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \\
&= v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} \\
v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \\
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k} \\
&= a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \\
a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}
\end{aligned}$$

平面极坐标系：

若质点在平面内运动，在平面内取一固定点为极点，另取一固定直线为极轴，组成平面极坐标系. 从极点到质点引一矢量 $\boldsymbol{r}$，称为径矢，则

$$\boldsymbol{r} = r(t)\boldsymbol{e}_r$$

其中 $r$ 表示极点到质点的距离，$\boldsymbol{e}_r$ 表示径矢方向的单位矢量，称为径向单位矢量. 质点的方位角记为 $\varphi$，$\boldsymbol{e}_\varphi$ 表示 $\varphi$ 方向的单位矢量，称为横向单位矢量. 任何矢量均可在 $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向上作正交分解.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\varphi \\
&= v_r\boldsymbol{e}_r + v_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi
\end{aligned}$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \left[\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)\right]\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$= a_r\boldsymbol{e}_r + a_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2}$$

自然坐标系：

在某些问题中，若已知质点的运动轨迹，那么可在此曲线轨迹上任选一定点 $O$，则质点的位置可用其与 $O$ 点间的路程 $s$ 来表示

$$s = s(t)$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}_O = v\boldsymbol{\tau}_O$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}_O + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_O}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}_O + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}_O = a_\tau\boldsymbol{\tau}_O + a_n\boldsymbol{n}_O$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

$\boldsymbol{\tau}_O$ 为切线方向的单位矢量，$\boldsymbol{n}_O$ 为法线方向的单位矢量，$\rho$ 为曲线的曲率半径.

### 3. 圆周运动

角位置

$$\theta = \theta(t)$$

角位移

$$\Delta\theta = \theta_{(t+\Delta t)} - \theta_{(t)}$$

角速度

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

角加速度

$$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

角量与线量之间的关系

$$v = R\omega，\quad a_\tau = R\beta，\quad a_n = R\omega^2$$

### 4. 相对运动

$$\boldsymbol{r}_{绝对} = \boldsymbol{r}_{相对} + \boldsymbol{r}_{牵连}$$

$$\boldsymbol{v}_{绝对} = \boldsymbol{v}_{相对} + \boldsymbol{v}_{牵连}$$

$$\boldsymbol{a}_{绝对} = \boldsymbol{a}_{相对} + \boldsymbol{a}_{牵连}$$

或

$$\boldsymbol{r}_{A对C} = \boldsymbol{r}_{A对B} + \boldsymbol{r}_{B对C}$$

$$\boldsymbol{v}_{A对C} = \boldsymbol{v}_{A对B} + \boldsymbol{v}_{B对C}$$

$$\boldsymbol{a}_{A对C} = \boldsymbol{a}_{A对B} + \boldsymbol{a}_{B对C}$$

## 二、名师指点

质点是一种理想的抽象模型，是只考虑其位置和质量，不考虑其大小和形状的抽象的、合理化模型. 质点模型可将任何复杂、具体的物体用简单的模型来代替，忽略次要因素，抓住主要矛盾，以便研究其运动规律. 物体是否被视为质点可根据研究问题的性质而决定，并不依赖于物体的线度、尺寸和形状. 采用质点模型是一种重要的科学研究方法.

质点运动学的问题总体上可分为两类：

(1) 已知质点的运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，求质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$. 对于此类问题，只需按运动方程对时间 $t$ 求导即可；

(2) 已知加速度 $\boldsymbol{a}$ 及初始条件，求速度和运动方程. 对于这类问题可应用积分法求解. 对有些问题，要先进行分离变量或变量代换，再利用积分法解之.

在实际求解中，可由题目的已知条件和要求解的物理量，判断属哪一类问题. 不同类型的问题采用不同方法求解. 另外应选择合适的坐标系. 一般采用直角坐标系，但对圆周运动和曲线运动采用自然坐标系更为方便.

## 三、精选题解

**例 1-1**　一质点在 $x$ 轴上作加速运动. 开始时 $x=x_0$，$v=v_0$. 求：

(1) 设 $a=kt$，其中 $k$ 为常量，求任意时刻的速度和位置；

(2) 设 $a=-kv$，求任意时刻的速度和位置；

(3) 设 $a=kx$，求任意位置的速度.

**【思路分析】** 从题目中已知条件与要求的物理量关系可看出，这是运动学中的第二类问题，即已知加速度求速度与位置的问题. 此类问题用积分法，并根据加速度表达式的不同采用不同变量的积分；另外注意在(1)、(2)问中，求任意时刻的速度和位置，即要求 $v$、$x$ 与时间 $t$ 的关系.

**解**　(1) 由 $a=kt$ 即

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=kt\Rightarrow \mathrm{d}v=kt\,\mathrm{d}t$$

两边积分，并注意 $t=0$ 时，$v=v_0$，则

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t kt\,\mathrm{d}t$$

得

$$v-v_0=\frac{1}{2}kt^2$$

$$v=v_0+\frac{1}{2}kt^2$$

由 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 得

$$\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t=\left(v_0+\frac{1}{2}kt^2\right)\mathrm{d}t$$

两边积分

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t \left(v_0 + \frac{1}{2}kt^2\right)\mathrm{d}t$$

得

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{6}kt^3$$

(2) 由 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv$,分离变量可得

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -k\mathrm{d}t$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v} = \int_0^t -k\mathrm{d}t$$

得

$$\ln\frac{v}{v_0} = -kt$$

即

$$v = v_0 \mathrm{e}^{-kt}$$

再由

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

得

$$\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t = v_0\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t$$

两边积分

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t v_0 \mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t$$

得

$$x = x_0 + \frac{v_0}{k}(1-\mathrm{e}^{-kt})$$

(3) 由

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

得

$$v\mathrm{d}v = a\mathrm{d}x = kx\mathrm{d}x$$

两边积分有

$$\int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = \int_{x_0}^{x} kx\mathrm{d}x$$

得

$$v^2 = v_0^2 + k(x^2 - x_0^2)$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + k(x^2 - x_0^2)}$$

**【方法要略】 在上述三种情况中,(1) $a=kt$;(2) $a=-kv$;(3) $a=kx$. 即加速度分别为 $t$、$v$、$x$ 的函数,而在 $\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t$,$\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t$ 中积分变量均为 $t$,所以对 $a$ 的不同表达式在积分时应将积分变量变换为与函数变量相一致,方可积分. 对第一种情况,函数变量为 $t$,可直接积分;对第二种情况,函数变量为 $v$,应先分离变量然后积分;而对第三种情况函数变量为 $x$,应先换元,再分离变量,然后积分.**

**【知识扩展】** 在(3)中,关系式 $v^2=v_0^2+k(x^2-x_0^2)$ 可写成 $v^2-kx^2=v_0^2-kx_0^2$;当弹簧振子作简谐运动时,所受弹性力为 $F=-kx=ma$,即加速度 $a=-\frac{k}{m}x$,本题与此形式相似,简谐振动机械能守恒,此题中得出的 $v^2-kx^2=v_0^2-kx_0^2$,显然是机械能守恒的必然

结果.

**例 1-2**　如图 1-1 所示，杆 $AB$ 以匀角速度 $\omega$ 绕 $A$ 点转动，并带动水平杆 $OC$ 上的质点 $M$ 运动，设起始时刻杆在竖直位置，$\overline{OA}=h$.

（1）写出质点 $M$ 沿水平杆 $OC$ 的运动方程；

（2）求质点 $M$ 沿杆 $OC$ 滑动时速度和加速度的大小.

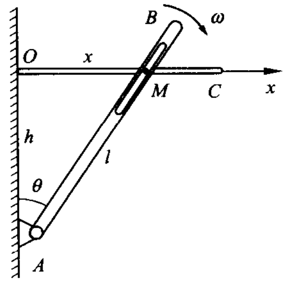

图 1-1

**【思路分析】**　此题的求解属于运动学中的第一类问题. 可先求质点的运动方程，即求出任意时刻 $t$ 质点的位置矢量. 而质点 $M$ 只能沿 $OC$ 杆运动，若选 $OC$ 方向为 $x$ 轴方向，则质点的位置只由 $x$ 确定. 一旦写出 $x$ 的表达式，则速度和加速度由定义式即可求出.

**解**　（1）取 $x$ 轴如图 1-1 所示，设 $t$ 时刻 $M$ 的坐标为 $x$，$AB$ 杆与竖直方向的夹角为 $\theta=\omega t$，则质点 $M$ 的运动方程为

$$x = h\tan\omega t$$

（2）

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=h\omega\sec^2\omega t=\frac{h\omega}{\cos^2\omega t}$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2h\omega^2\sec^2\omega t\tan\omega t$$

**【方法要略】　求质点的运动方程就是求任一时刻 $t$ 质点的位置坐标，此类问题的关键在于正确写出位置坐标与 $t$ 的函数关系.**

**【知识扩展】**　由 $v=\frac{h\omega}{\cos^2\omega t}=\frac{h\omega}{\cos^2\theta}=\frac{l\omega}{\cos\theta}$，$l$ 为 $AM$ 的长度，$l\omega$ 为 $M$ 点的线速度，即 $l\omega=v\cos\theta$.

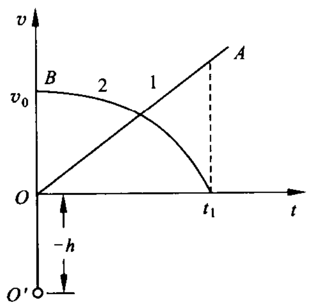

图 1-2

**例 1-3**　如图 1-2，直线 1 与圆弧 2 分别表示两质点 $A$、$B$ 从同一地点出发，沿同一方向作直线运动的 $v$-$t$ 图. 已知 $B$ 的初速度 $v_0=b$（m/s），它的速率由 $v_0$ 变为 0 所用的时间为 $t_1=2b$（s）.

（1）求 $B$ 在任意时刻 $t$ 的加速度；

（2）设在 $B$ 停止时，$A$ 恰好追上 $B$，求 $A$ 的加速度；

（3）在什么时候，$A$、$B$ 的速度相同？

**【思路分析】**　本题是一个由 $v$-$t$ 图求加速度的问题，即是由 $v$-$t$ 图求 $v$ 与 $t$ 的函数关系表达式的问题. 因此，关键是求出质点 $B$（圆弧 2）的方程，进一步可求得加速度；而 $A$ 恰好追上 $B$，就是 $A$、$B$ 的位移相同，由此可解出 $A$ 的加速度.

**解**　（1）设圆弧 2 的圆心在 $O'$ 处，其坐标为（0，$-h$），圆弧的半径为 $R$；则在任意时刻 $t$ 质点 $B$ 的速度 $v_B$ 满足方程

$$t^2+(v_B+h)^2=R^2 \tag{1}$$

将已知条件 $t=0$，$v_B=v_0=b$；$t=t_1=2b$，$v_B=0$，代入(1)式解得

$$h = \frac{3}{2}b, \quad R = \frac{5}{2}b \tag{2}$$

所以(1)式可写为

$$t^2 + \left(v_B + \frac{3}{2}b\right)^2 = \left(\frac{5}{2}b\right)^2$$

可解得

$$v_B = \sqrt{\frac{25}{4}b^2 - t^2} - \frac{3}{2}b$$

所以

$$a_B = \frac{\mathrm{d}v_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{2t}{\sqrt{25b^2 - 4t^2}} \tag{3}$$

(2) 由于质点 $A$ 作初速度为零的匀加速直线运动，若 $A$ 的加速度为 $a_A$，$B$ 停止时($t=t_1$)，$A$ 的位移为

$$x_A = \frac{1}{2}a_A t_1^2 = 2a_A b^2 \tag{4}$$

而 $B$ 的位移为

$$\begin{aligned} x_B &= \int_0^{2b} v_B \mathrm{d}t = \int_0^{2b}\left[\sqrt{\frac{25}{4}b^2 - t^2} - \frac{3}{2}b\right]\mathrm{d}t \\ &= \left(\frac{25}{8}\arcsin\frac{4}{5} - \frac{3}{2}\right)b^2 \end{aligned} \tag{5}$$

$A$ 追上 $B$ 时有 $x_A = x_B$，由(4)、(5)式可解出

$$a_A = \frac{1}{2}\left(\frac{25}{8}\arcsin\frac{4}{5} - \frac{3}{2}\right) = 0.7 \ (\mathrm{m/s^2})$$

(3) 由于质点 $A$ 作初速为零的匀加速直线运动，所以

$$v_A = a_A t = 0.7t$$

当 $v_A = v_B$ 时，有

$$\sqrt{\frac{25}{4}b^2 - t^2} - \frac{3}{2}b = 0.7t$$

解之得 $t = 1.1b$ (s).

**【方法要略】 由 $v-t$ 图求解问题，必须清楚 $v-t$ 图上的曲线表示的是 $v$ 与 $t$ 的函数关系，不能与 $x-t$ 图混淆. 一旦知道 $v=v(t)$，则加速度即为 $v$ 对 $t$ 的导数，位移为 $v$ 对时间 $t$ 的积分.**

【知识扩展】 如图 1-2 所示，当 $B$ 停止时，即 $t=t_1$ 时，$A$ 恰好追上 $B$. 所以直线 1 下的面积与圆弧线 2 下的面积相等，表示两质点 $A$、$B$ 的位移相等.

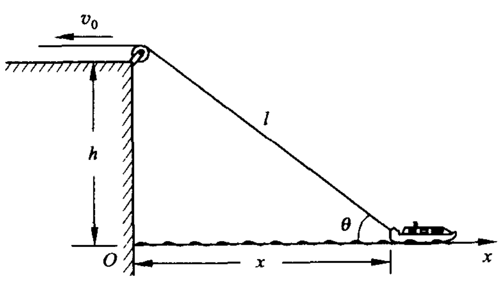

图 1-3

**例 1-4** 如图 1-3 所示，在离水面高为 $h$ 的岸边，用绳拉着船靠岸. 设绳长为 $l_0$，当人以匀速 $v_0$ 收绳时，船的速度、加速度各为

多少?

**【思路分析】** 运动学中最基本的方法是写出质点的运动方程,由此即可求出速度和加速度;此题也可由几何约束关系求得收绳速度与船速的关系,进一步通过求导得出加速度.

**解** 方法一　建立坐标系如图 1-3 所示,设 $t=0$ 时,滑轮与小船之间的绳长为 $l_0$,则在时刻 $t$,绳长为 $l=l_0-v_0t$,此时小船的位置坐标为

$$x=\sqrt{l^2-h^2}=\sqrt{(l_0-v_0t)^2-h^2} \tag{1}$$

所以小船运动的速度

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{-(l_0-v_0t)v_0}{\sqrt{(l_0-v_0t)^2-h^2}}=\frac{-lv_0}{\sqrt{l^2-h^2}}=-\frac{l}{x}v_0\left(=-\frac{v_0}{\cos\theta}\right) \tag{2}$$

将(2)式再对时间求导,得小船的加速度

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{v_0^2h^2}{[(l_0-v_0t)^2-h^2]^{3/2}}=-\frac{v_0^2h^2}{x^3} \tag{3}$$

(2)、(3)式中的负号表示小船是沿 $x$ 轴负方向作变加速直线运动.

方法二　由几何约束关系知

$$l^2=x^2+h^2 \tag{4}$$

将(4)式两边关于 $t$ 求导得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{l}{x}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

注意$\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=-v_0$,所以得小船的运动速度

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{l}{x}v_0\left(=-\frac{v_0}{\cos\theta}\right) \tag{5}$$

将(5)式对 $t$ 求导,得加速度

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-v_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{l}{x}\right)=-v_0\frac{x\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}-l\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{x^2}=-v_0\frac{-v_0x-lv}{x^3}=-\frac{v_0^2h^2}{x^3} \tag{6}$$

**【方法要略】 运动学中求速度、加速度的一般方法是先写出位置坐标与时间的关系式,然后通过求导得出速度与加速度.但对一些特殊情况,可直接由几何约束条件通过求导得出速度之间满足的关系.**

**【知识扩展】** 小船的速度大小可通过几何关系(即(4)式)求解比较简捷.但初学者往往误认为小船的速度大小为收绳速率 $v_0$ 在水平方向的投影,即 $v=v_0\cos\theta$,这是不对的.小船速度方向为水平方向,收绳的速率恒为 $v_0$,而绳头的速度方向在不断变化,所以绳头运动的速度并不是一个常矢量 $\boldsymbol{v}_0$.另一方面,由(4)式可知,$\cos\theta=\dfrac{x}{l}=\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\Big/\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{v_0}{v}$,即 $v_0=v\cos\theta$.

**例 1-5**　椭圆规的 $AB$ 杆上,$A$、$B$ 两点分别沿 $Oy$ 槽、$Ox$ 槽移动.

(1) 证明杆上一点 $C$ 的轨迹为椭圆;

(2) 若杆上 $A$ 点以匀速 $v_0$ 运动,求 $B$、$C$ 两点的速度.

**【思路分析】** 求质点的运动轨迹,即求质点坐标 $x$、$y$ 满足的轨迹方程;而求 $B$、$C$ 两

点的速度则与前面例 1-4 相似，可由几何约束关系来求.

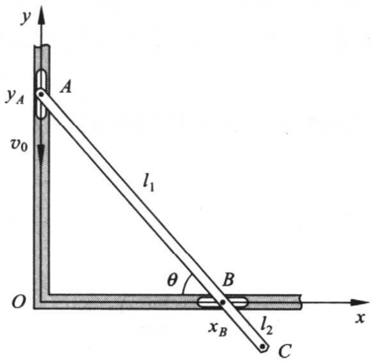


图 1-4

**解**　(1) 建立如图 1-4 所示坐标系，则 $C$ 点的坐标为

$$x_C=(l_1+l_2)\cos\theta \tag{1}$$

$$y_C=-l_2\sin\theta \tag{2}$$

由(1)、(2)式消去 $\theta$ 得 $C$ 点的轨迹方程

$$\left(\frac{x_C}{l_1+l_2}\right)^2+\left(\frac{y_C}{l_2}\right)^2=1 \tag{3}$$

可知 $C$ 点的轨迹为椭圆.

(2) 由于

$$\boldsymbol{v}_A=\frac{\mathrm{d}y_A}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=-v_0\boldsymbol{j}$$

$$x_B^2+y_A^2=l_1^2 \tag{4}$$

对(4)式两边关于 $t$ 求导，可得

$$v_B=\frac{\mathrm{d}x_B}{\mathrm{d}t}=-\frac{y_A}{x_B}\frac{\mathrm{d}y_A}{\mathrm{d}t}=\frac{y_A}{x_B}v_0 \tag{5}$$

$B$ 点速度的方向沿 $x$ 轴正向.

利用(1)式，并注意 $\cos\theta=\frac{x_B}{l_1}$，得

$$x_C=\frac{l_1+l_2}{l_1}x_B \tag{6}$$

同理，由(2)式得

$$y_C=-\frac{l_2}{l_1}y_A \tag{7}$$

由(6)、(7)式可求出

$$\frac{\mathrm{d}x_C}{\mathrm{d}t}=\frac{l_1+l_2}{l_1}\frac{\mathrm{d}x_B}{\mathrm{d}t}=\frac{l_1+l_2}{l_1}\frac{y_A}{x_B}v_0=\frac{l_1+l_2}{l_1}v_0\tan\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}y_C}{\mathrm{d}t}=-\frac{l_2}{l_1}\frac{\mathrm{d}y_A}{\mathrm{d}t}=\frac{l_2}{l_1}v_0$$

所以 $C$ 点的速度为

$$\boldsymbol{v}_C=\frac{l_1+l_2}{l_1}v_0\tan\theta\boldsymbol{i}+\frac{l_2}{l_1}v_0\boldsymbol{j}$$

**【方法要略】　有几何约束的问题，常常由几何约束条件求速度更为简捷.**

**【知识扩展】**　若 $l_2=0$，则 $\boldsymbol{v}_C=\tan v_0\boldsymbol{i}$，与 $\boldsymbol{v}_B$ 相同.

**例 1-6**　一质点初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 与水平面成 $\theta_0$ 角抛出，忽略空气阻力，求：

(1) 质点的运动方程；

(2) 质点达到最高点的时间和最大高度；

(3) 任一时刻的切向、法向加速度；

(4) 最高点的曲率半径.

**【思路分析】**　本题属于运动学中已知加速度求速度与位置的问题. 对于抛体运动，其

加速度为常矢量，对于这类问题可应用积分法求得质点的运动方程等.

而求切向加速度与法向加速度可由两种方法求得，一种是由速度大小求出切向加速度，然后再解出法向加速度；另一种方法由加速度求出其切向分量与法向分量，即切向加速度和法向加速度.

**解**　(1) 建立如图 1-5 所示坐标系，由于物体作抛体运动，则加速度

$$\boldsymbol{a} = -g\boldsymbol{j}$$

由

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{a} \tag{1}$$

可得

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t \tag{2}$$

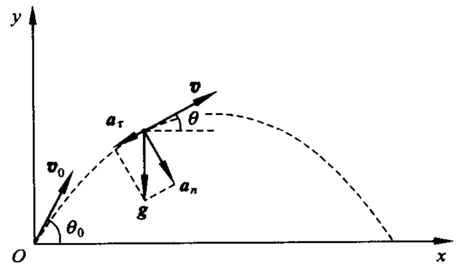


图 1-5

同理

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2 \tag{3}$$

$\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{v}_0$ 分别为 $t=0$ 时刻质点的位置矢量与速度矢量.

由(2)、(3)式可得

$$v_x = v_0\cos\theta_0 \tag{4}$$

$$v_y = v_0\sin\theta_0 - gt \tag{5}$$

$$x = v_0\cos\theta_0 t \tag{6}$$

$$y = v_0\sin\theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{7}$$

(2) 质点到达最高点时，$v_y=0$，代入(5)式可得到达最高点时的时间为

$$t = \frac{v_0\sin\theta_0}{g} \tag{8}$$

将(8)式代入(7)式，则得最大高度

$$h = \frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{2g} \tag{9}$$

(3) 方法一　由(4)、(5)式得任一时刻速度的大小

$$v = \sqrt{v_0^2\cos^2\theta_0 + (v_0\sin\theta_0 - gt)^2} \tag{10}$$

将(10)式关于时间求导，得切向加速度

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g\frac{v_0\sin\theta_0 - gt}{\sqrt{v_0^2\cos^2\theta_0 + (v_0\sin\theta_0 - gt)^2}} \tag{11}$$

进一步由 $a^2 = a_\tau^2 + a_n^2$ 可得

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{g^2 - a_\tau^2} = g\frac{v_0\cos\theta_0}{\sqrt{v_0^2\cos^2\theta_0 + (v_0\sin\theta_0 - gt)^2}} \tag{12}$$

方法二　如图 1-5 所示，$a_\tau = -g\sin\theta$，$a_n = g\cos\theta$，而

$$\sin\theta = \frac{v_y}{v},\quad \cos\theta = \frac{v_x}{v}$$