SUITANG XUE LIAN KAO

（第二次修订版）

随堂学练考

高二代数

张乃达 主编

龍門書局

随堂 学·练·考 丛书(第二次修订版)

高二代数

张乃达　主编

袁　桐　许克定
程卫国　许晓宇　许哲宇　编著

龍　門　書　局

2000

随堂 学·练·考 丛书

（第二次修订版）

高二代数

张乃达　主编

责任编辑　陆晓明　朱全娥

龍门書局　出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

北京市东华印刷厂　印刷

科学出版社总发行　　各地书店经销

*

1998年8月第　一　版　　开本:787×1092　1/32

2000年6月第二次修订版　　印张:13 3/4

2000年6月第六次印刷　　字数:336 000

印数:95 001—115 000

ISBN 7-80111-676-3/G·591

定　价：13.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

第二次修订版序言

经教坛名师苦心构思和精心编写的《随堂学·练·考丛书》(36册)面市后,深受全国广大读者的厚爱。各地争相购买,供不应求。为更好地满足广大中学师生和十省市试验教材推广的需要,我们在认真听取各方意见的基础上,根据教育部关于中学教学和升学考试改革的最新精神,对本丛书再次进行了全面修订和补充。

中小学教育是提高国民素质和培养跨世纪人才的奠基工程。要全面提高中小学教育质量,就要向广大中小学生提供充足的精神食粮,提高他们成长和发展的起点。高品位、高质量的教学辅导用书是中小学教材的有益的补充和延伸,可激发学生的学习兴趣,培养学生的思维能力,巩固学生的知识和技能,提高学生的综合能力和整体素质。

这套丛书主要是为我国普通中学的一般中学生而编写的。其编写宗旨是,精讲知识要点,启迪科学思维,巧析重点难点,强化能力训练。根据这一编写要求和宗旨,编者博采众长,匠心独运,有的放矢,注重实效。各册中的各节或各课基本上都按"学习要求"、"知识要点与应用"和"能力测试"等栏目编写。在"知识要点与应用"中,对"学习要求"中所提示的重点和难点进行点拨;通过剖析典型例题,讲述解题思路、解题方法和解题技巧,对某些知识要点还进行了延伸性讨论,以实现知识的迁移。

这套丛书之所以博得广大师生的喜爱,是因为它具有以下四个鲜明的特色。**第一,同步性强**。它与最新现行教材同步配套,理科同步到节,文科同步到课。学生可以同步学习和训练,夯实基础,掌握重点和难点,并及时提高综合能力。**第二,**

启迪性好。它激发学生的学习兴趣，培养学生的思维能力，使学生很好地领悟、归纳、概括和运用知识要点，切实掌握解题思路和方法，进而有效地提高学生的解决实际问题的能力，特别是应变能力。**第三，信息量大**。它涵盖中学的主要课程，内容丰富，题量充足。在内容讲解上，准确把握教学大纲和教材所要求的尺度。在题型选择上，做到新颖、综合并具有很强的针对性。书后附有练习题和测试题的参考答案。**第四，使用面广**。它面向普通中学生，内容由浅入深，由易到难，并加以适当的延伸。基本题及时练，综合题全面练。因此，学生易学易练，学习成效显著。

本次修订版主要在以下三个方面进行了修订：

1. 根据教育部关于中、高考改革的最新精神，在讲述内容上做了部分修订和改写；2. 吸收了 1999 年中、高考的典型试题，更新了综合测试题和模拟试题；3. 调整了例题和习题，既注重知识点精讲和应用的完整性，又照顾到习题的难易梯度。此外，改正了初版中的差错。

本丛书是由多年工作在教学第一线的全国知名的苏州中学、扬州中学、天津一中等名校教师编写和修订的。他们精熟自己所执教的学科内容，善于精析教材中的重点和难点，而且对中考和高考有深入的研究。数学由江苏省有突出贡献的中青年专家、特级教师张乃达主编，物理由特级教师王溢然主编，化学由特级教师钱吉良主编，语文由江苏省有突出贡献的中青年专家、特级教师蒋念祖主编，英语由高级教师胡德康主编。

我们殷切希望，这套丛书的修订版问世后能听到各方面的反馈意见，以便我们根据广大读者的宝贵意见，及时再次组织修订，使之臻于完善。

方　明

2000 年 4 月

主编简介

张乃达，数学特级教师，江苏省有突出贡献的中青年专家。现任教于江苏省扬州中学，是江苏省思维与数学教学研究协作组负责人、扬州市数学教学研究专业委员会副理事长。

他长期从事中学数学教学的实践与研究工作，并在有关数学思维与数学教学的研究方面取得了一系列成果，对数学教学工作产生了很大的影响。他于1985年首先提出的“数学教学要充分暴露数学思维过程的教学原则”已经被写进教学大纲。1987年提出的数学观念与思维监控的问题，也普遍受到了数学教学界的关注。

他在教学中追求自然、朴实的教学风格，强调问题在思维活动中的中心地位，强调反思在数学学习中的作用。他多年指导数学毕业班的复习工作，具有丰富的教学经验。其学生在高考中均取得了优秀的成绩，还有不少满分者。

其主要著作有：主编《中学生数学学习与思维丛书》和《中学数学思维方法丛书》；参加编写了《高中数学精讲·解析几何》等数十部书，并发表了论文百余篇。其代表作《数学思维教育学》荣获全国首届光明杯优秀著作奖。其论文和研究成果多次获得国家级和省级的奖励。

第二次修订版前言

本书是《随堂学·练·考丛书》(第二次修订版)中的高二代数部分，可供高中二年级学生使用。

数学学习中最重要的就是要会思维，会动脑筋。无论是在读书做练习还是在考试时无一例外。

本书编写的主要宗旨是帮助你学会思维。首先提出问题，激励你的思维；然后，再通过对知识和问题的分析，让你学会思维；最后，向你提供合适的数学问题，来检验和锻炼你的思维。

本书在编写上具有如下特点：

1. 内容严格与课本同步。可以随堂使用，从而伴你走过数学学习的全过程。

2. 特别注重对思维过程的分析。

在“知识点精析”中，着重阐明重要的概念、定理产生的背景，分析定理、公式推导的过程和思路，揭示了知识结构及其内在联系。

在“典型题剖析”中，特别重视解题思路的分析和数学思想的渗透和运用。

3. 强调解题的分析和实践。

数学的学习离不开解题。数学学习应该以解题为中心。只有在解题中才能积极地展开数学思维活动。鉴于此，本书配有足够多的各种类型、各种难度的例题和测试题，并作了精心的编排，以适应不同水平的学生在不同的学习阶段的需要。

4. 注意反馈，帮助读者调控学习过程。

只有通过学习者的反思才能学好数学。一个成熟的学习

者应该能通过反思活动自觉地调控学习过程。为了帮助你做到这一点，在编写本书时我们特别设置了“学习要求”、“随堂练习”、“能力测试”等栏目，使你能明确学习目标(包括高考要求)，调控学习过程。

你在阅读本书时，最好准备好纸和笔，一边阅读，一边做题。我们相信，只要你能坚持这样做，一定会取得优良的成绩。

参加本书编写和修订的有袁桐(特级老师，第五、六章)、许克定、程卫国(第七、八章)。全书由张乃达统稿。

张乃达

2000年春

目　　录

第五章　不等式

5.1　不等式

学习要求

1．熟练掌握实数比较大小的依据：

$a>b \Leftrightarrow a-b>0$；

$a=b \Leftrightarrow a-b=0$；

$a<b \Leftrightarrow a-b<0$.

2．能利用上述比较大小的依据，将比较大小的问题转化为研究二数(或式)的差的符号问题.

知识要点及应用

一　知识点精析

1．从实数的两大特征说起

实数的两大特征，一是任意实数的平方不小于0，即“$a\in R\Leftrightarrow a^2\geqslant 0$”，当且仅当$a=0$时，才有$a^2=0$.之所以称其为“特征”，是因为所有实数都具有这一性质；反之，不具有这一性质的数就不是实数.本章的问题，都是在实数范围内研究的，因此经常要用到这个特性.在以后的问题中，如果有了“$a^2\geqslant 0$”的条件，也应当立即得到“$a\in R$”的结论.

实数的第二个特征是，每两个实数都可以比较大小，这就是说，给定了两个实数，就一定可以比较大小；反之，可以比较大小的两个数，一定都是实数.这两个很明显的结论，恰是本

单元内容的基础.

2. 研究比较大小的目的

关于比较两个数的大小的问题，在高中一年级学习函数的单调性时，已经做了不少题. 例如：

①比较 $0.6^{0.7}$，$0.7^{0.6}$，$0.7^{0.7}$的大小.

解 先比较 $0.7^{0.6}$与 $0.7^{0.7}$的大小. 由指数函数 $y=0.7^x$ 是减函数，得知：

$$0.7^{0.6}>0.7^{0.7}.$$

再由幂函数 $y=x^{0.7}$是增函数($x>0$ 时)，得知：

$$0.6^{0.7}<0.7^{0.7},$$

因此得到 $$0.7^{0.6}>0.7^{0.7}>0.6^{0.7}.$$

②比较 $\log_2 3$ 与 $\log_3 4$ 的大小.

解 $\because \log_2 3=\log_8 27,\quad \log_3 4=\log_9 16,$

$$\log_8 27=\frac{\lg 27}{\lg 8},\quad \log_9 16=\frac{\lg 16}{\lg 9},$$

$\because 0<\lg 8<\lg 9<1,\quad \lg 27>\lg 26>1,$

$\therefore \dfrac{\lg 27}{\lg 8}>\dfrac{\lg 27}{\lg 9}>\dfrac{\lg 16}{\lg 9},$

$\therefore \log_2 3>\log_3 4.$

有的同学可能认为这些问题我们都能解决了，再学习“什么叫 $a>b$”似乎不太重要了. 实际上，本节内容就是在同学们学习过、接触过、解过不少不等式问题的基础上，系统地再研究、深化对不等式及其性质的认识. 像上述两个例中，都用到“若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$”的性质；在例②中用到了“a,b,c,d 均为正数时，$a>b$ 且 $c>d$，则 $\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$”这一性质. 一般地说，不等式有哪些基本性质、这些性质是怎样证明的，这是本章第二节的内容. 而性质证明的依据，就是本节中要研究的“$a>b$，$a=b$，$a<b$”的意义.

3. 比较大小的依据和方法

“$a>b,a=b,a<b$”是通过实数的运算，由得到的差($a-b$)是正数、是零、还是负数来确定. 因此，比较两个实数的大小，基本过程是作差，对差的正负做出判断，得出结论.

这里，“对差的正负做出判断”是个关键. 像课本中的例1，差为20，易知为正数；例2，差为x^2，$x\neq 0$，也容易看出差为正数. 但有时还要将差变形，有时还要讨论.

典型题剖析

例1 比较a^4-b^4与$4a^3(a-b)$的大小.

解 $\because$ $a^4-b^4-4a^3(a-b)$

$$=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3-4a^3)$$
$$=(a-b)[(a^2b-a^3)+(ab^2-a^3)+(b^3-a^3)]$$
$$=-(a-b)^2(3a^2+2ab+b^2)$$
$$=-(a-b)^2[2a^2+(a+b)^2]\leqslant 0,$$

(当且仅当$a=b$时取等号)

$\therefore$ $a^4-b^4\leqslant 4a^3(a-b)$.

例2 设实数a,b,c满足：

$$b+c=6-4a+3a^2, \qquad ①$$
$$c-b=4-4a+a^2, \qquad ②$$

试确定a,b,c间的大小关系.

解 $\because c-b=4-4a+a^2=(a-2)^2\geqslant 0$， $\therefore$ $c\geqslant b$.

又$\because$ $b-a=[(b+c)-(c-b)]\cdot\dfrac{1}{2}-a$

$$=1+a^2-a=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,$$

$\therefore$ $b>a$.

$\therefore$ $c\geqslant b>a$.

说明 这里的例1，在作差后要用乘法公式将差分解因

式、配方，变为便于判断正负的形式. 例 2 在作差的同时，还用了不等式的“传递性”，虽然这是不难理解的，但应注意.

讨 论

4. 作差比较与作商比较

作差比较大小，有时还要在作差前先作变形；有时对两个正数比较大小，也可以“作商”.

例 3　$0<x<1$ 时，比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小.

思路 1　作差→去绝对值符号(讨论)→判断差的正负→得出结论.

解法 1　设 $M=|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$. 则由已知 $0<x<1$ 有

(1) $0<a<1$ 时，由于 $0<1-x<1$，因此有

$$M=\log_a(1-x)+\log_a(1+x)=\log_a(1-x^2)>0;$$

(2) $a>1$ 时，由于 $0<1-x<1$，因此有

$$\begin{aligned}M&=-\log_a(1-x)-\log_a(1+x)\\&=-\log_a(1-x^2)>0.\end{aligned}$$

所以，不论 $a>1$ 或 $0<a<1$，都有 $M>0$，

$\therefore$ $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

思路 2　作商→研究商是大于 1、等于 1，还是小于 1→得出结论.

解法 2　设 $Q=\dfrac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=|\log_{1+x}(1-x)|$. 则 $\because$ $0<x<1$，

$\therefore$ $1+x>1$，$0<1-x<1$，

$$\begin{aligned}\therefore\ Q&=-\log_{1+x}(1-x)=\log_{1+x}\frac{1}{1-x}=\log_{1+x}\frac{1+x}{1-x^2}\\&>\log_{1+x}(1+x)=1,\end{aligned}$$

$\therefore\ |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

思路 3 作平方差→判断差的正负→得出结论.

解法 3 设 $M=|\log_a(1-x)|^2-|\log_a(1+x)|^2$

$=[\log_a(1-x)+\log_a(1+x)][\log_a(1-x)-\log_a(1+x)]$

$=\log_a(1-x^2)\cdot\log_a\dfrac{1-x}{1+x}$.

$\because 0<x<1$,

$\therefore 0<1-x^2<1, 0<\dfrac{1-x}{1+x}<1$,

$\therefore$ 不论 $a>1$ 或 $0<a<1$,都有 $M>0$,

$\therefore\ |\log_a(1-x)|^2>|\log_a(1+x)|^2$.

由性质 5 知:

$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

说明 思路 1 与思路 2 的区别在于一个用差,一个用商;思路 1 与思路 3 的区别在于一个直接求差,一个是变形后(平方)求差.

本例注意到二数均为正,考虑求商.求商后,用换底公式立即发现 $Q>1$ 或 $Q<1$ 与 a 无关.这种先变形再比较的方法也常用,如比较 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt[3]{3}$ 的大小,就应当先变形为 $\sqrt{2}=\sqrt[6]{8}$,而 $\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{9}$,易知 $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$.

例 4 已知 $\alpha\in(0,\pi)$,比较 $2\sin2\alpha$ 与 $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$ 的大小.

思路 通过讨论,用作商的方法.

解 当 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 时,$\sin2\alpha<0$,而 $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}>0$,

$\therefore$ 一定有 $2\sin2\alpha<\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$;

当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时,$2\sin2\alpha=2\sin\pi=0$,而 $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=1$,

显然也有 $2\sin2\alpha<\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

当 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，可以求商：

$$M=\frac{2\sin2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin2\alpha}{\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}}=4\cos\alpha(1-\cos\alpha)$$

$$=4[\cos\alpha-\cos^2\alpha]=4\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\cos\alpha\right)^2\right]\leqslant1,$$

∴ $2\sin2\alpha\leqslant\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

∴ 当 $\alpha\in(0,\pi)$时，总有 $2\sin2\alpha\leqslant\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$，其等号在 $\alpha=\frac{\pi}{3}$时成立.

说明 由于 $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$的公式的形式所限，用求差的方法不如求商的方法方便；用求商的方法处理问题时，又需要先对 α 的取值范围进行讨论. 这是因为只有当比较大小的双方均为正值时，才可以使用求商的方法.

能力测试

1. 已知 $a+b<0$ 且 $a>0$，则一定有 （ ）

A. $\left|\frac{a}{b}\right|>1$； B. $\left|\frac{a}{b}\right|<1$；

C. $\left|\frac{a}{b}\right|\geqslant1$； D. $\left|\frac{a}{b}\right|\leqslant1$.

2. 若 $a\in R$，则一定有 （ ）

A. $-3a<-2a$； B. $a^{10}<a^{11}$；

C. $\frac{1}{a}<a$； D. $3-2a>1-2a$.

3. 若 $a<0$，则一定有 （ ）

A. $(4.1)^a>(3.1)^a>(0.3)^a$；

B. $(0.3)^a>(3.1)^a>(4.1)^a$；

C. $(4.1)^a>(0.3)^a>(3.1)^a$；

D. $(3.1)^a>(4.1)^a>(0.3)^a$.

4. 若 $0<a<b<1$，则一定有　　(　　)

A. $1<\log_a b<2$；　　B. $\log_a b<0$；

C. $0<\log_a b<1$；　　D. $\log_a b<-1$.

5. 若 $a\in(0,1)$，则一定有　　(　　)

A. $\log_{0.3}a>\log_{\frac{1}{3}}a>\log_3 a$；

B. $\log_3 a>\log_{0.3}a>\log_{\frac{1}{3}}a$；

C. $\log_{\frac{1}{3}}a>\log_{0.3}a>\log_3 a$；

D. $\log_3 a>\log_{\frac{1}{3}}a>\log_{0.3}a$.

6. 设 $x+y>0$，比较 x^3+y^3 与 x^2y+xy^2 的大小.

7. 比较 x^3 与 $2x^2-x+2$ 的大小.($x\in R$)

8. 比较 $\frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{a}{\sqrt{b}}$ 与 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的大小.($a,b\in R^+$)

5.2 不等式的性质

学习要求

1. 能系统地掌握不等式的性质，熟悉性质定理的证明方法.

2. 通过定理证明和性质的运用，培养逻辑推理论证的能力.

重点：利用实数比较大小的依据，证明不等式的性质及推论.

难点：不等式性质定理的条件与应用.

知识要点及应用

知识点解析

本节内容包括了不等式的5个性质定理及若干推论，系统地总结并证明了不等式的性质，是证明不等式与解不等式