高职高专高等数学精品课程教材

高等数学学习指导

（工科类专业适用）

孙晓晔 主编

高等教育出版社
Higher Education Press

高职高专高等数学精品课程教材

高等数学学习指导

（工科类专业适用）

孙晓晔　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是与胡农主编的《高等数学（工科类专业适用）》相配套的学习指导书。

本书按主教材的章节顺序编排内容，其教学进度与主教材同步，内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、无穷级数、常微分方程、拉普拉斯变换、矩阵及其应用等。每章的栏目包括“知识结构”、“教学基本要求与重点、难点”、“解题指导”、“练习题”、“复习题”等，每章最后给出了该章习题的参考答案与提示。

本书可作为高职高专院校、成人高校和本科院校开办的二级职业技术学院工科各专业高等数学课程的辅导教材，也可供相关科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导／孙晓晔主编．—北京：高等教育出版社，2006.9
工科类专业适用
ISBN 7-04-020110-0

Ⅰ.高...　Ⅱ.孙...　Ⅲ.高等数学－高等学校：技术学校－教学参考资料　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 091241 号

策划编辑 周先海　**责任编辑** 周先海　**封面设计** 张　志　**责任绘图** 杜晓丹
版式设计 张　岚　**责任校对** 朱惠芳　**责任印制** 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京宝旺印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2006年9月第1版
印　　张	14.5	印　　次	2006年9月第1次印刷
字　　数	340 000	定　　价	18.50元

物料号　20110-00

序　言

高等职业教育是我国高等教育体系的重要组成部分，也是我国职业教育体系的重要组成部分。伴随着我国高等职业教育的迅猛发展，天津市的高等职业教育取得了长足进步。

近年来，对高等职业教育的研究与实践都取得了丰硕的成果，但高等职业教育课程改革仍是我国高等职业教育面临的重点与难点。高等职业教育的核心是培养学生的实践能力和创新精神。如何使接受高等职业教育的学生体现出高职教育的特性，以获得必备的素质与技能而获得用人单位与社会的认可，一直是我们长期研究的课题。数学教育在这个方面更为突出，高等职业教育数学教学课程改革，迫在眉睫，任重而道远。

数学是一门基础科学，许多科学技术成果、技术领域的重大突破，数学在其间都起到了重要的支撑作用。数学、数字无处不在。在数学课程教学过程中展现数学在科学技术中的巨大作用和数学无处不在的巨大魅力，应是教学的重要目标之一。在教学过程中，应围绕着教学目的具体实施教学，不断修正教学活动中的表现方式、推理形式、教学技术乃至教学内容，充分展现高职教育的特色和优势。

数学不仅仅在理工学科领域中占有重要地位，在经济、管理、金融、人文科学等各个领域得到广泛的应用。通过该课程的教学，不但使学生具备学习所需要的基本数学知识，而且还使学生在数学的抽象性、逻辑性与严密性方面受到必要的训练和熏陶，使他们具有理解和运用逻辑关系、研究和领会抽象事物、认识和利用数形规律的初步能力。因此，高等数学教学不仅关系到学生在整个学习期间的学习质量，而且还关系到学生的思维品质、思辨能力、创造潜能等科学和文化素养。高等数学教学既是科学的基础教育，又是文化基础教育，是素质教育的一个重要的方面。进入信息时代，数学日益渗透到经济生活的每一个领域，数学素质成为高技能人才的基本素质。

提高学生的实践能力和创新精神，对数学教学而言，就要培养学生具有较强的直觉思维能力和应用数学的意识。在2004年和2005年，天津工程职业技术学院和天津中德职业技术学院的"高等数学"课程先后被评为天津市高等职业教育精品课程，高等数学的教育教学与改革有了进一步的提高。本着"必须、够用为度"的原则，在这两门精品课程的基础上，此套教材得以出版。该套教材尽量考虑到了各专业的不同特点，教学中需要针对不同专业的需要作一定的取舍；同时，也积极探索了通过数学实验来提高学生的实践能力和综合素质。

创新是民族进步的灵魂，是国家兴旺发达的不竭动力。胡锦涛同志指出："建设创新型国家，关键在人才。要完善培养体系，从教育这个源头抓起，根据我国经济社会发展特别是科学技术事业发展的要求，继续深化教育改革，加强素质教育，努力建设有利于创新型科技人才生成的教育培养体系。"随着天津作为国家职业教育改革试验区建设的不断深入，天津市的高职教育发展的形势越来越好，社会认同度越来越高，办学思路也越来越清晰。衷心地希望高职教育战线的

教师，从实施人才强国战略高度，进一步认清面临的形势与任务，加快培养高素质高技能人才，抢抓机遇，为高等职业教育跨越式发展做出贡献。

龙德毅

2006年7月

前　言

本书是“高等数学”课程教学的辅助教材，主要用于课后的复习与提高。它能巩固学生对基本内容、基本概念的理解和掌握，加强对基本运算能力的训练及应用能力的培养。

在编写中，本书充分考虑到高职学生的特点，尽力体现“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，使该书在广度和深度上能适应不同专业、不同层次学生对高等数学学习的需求。

本书与胡农主编的高职高专教材《高等数学(工科类专业适用)》上、下册相配套，按照主教材的章节顺序编排，共10章。每章由五部分组成：(1) 知识结构；(2) 教学基本要求与重点、难点；(3) 解题指导；(4) 综合复习题；(5) 习题答案与提示。在知识结构这部分，运用框图使读者了解每章知识全貌及各知识点之间的相互联系。“解题指导”中分为例题和练习题两部分；例题中有易错、易混淆的概念题和计算题等基本题，也有较难题，通过对例题的分析特别是一题多解，让读者了解更多的解题思路，从而提高分析问题、解决问题的能力，读者应在读懂例题的基础上完成相关练习题。“综合复习题”则是对每章内容的小结。另外，为了综合复习主教材上、下册的内容，本书分别给出了“第一阶段总复习”、“第二阶段总复习”两套总复习题。

本书的编写是在天津市教委领导下、部分高职高专院校的教师通力协作的结果。本书由天津电子信息职业技术学院孙晓晔担任主编，天津中德职业技术学院胡农担任副主编. 具体编写分工如下：天津中德职业技术学院任晓华编写第1章、第2章、张雅琴编写第7章、第8章；天津电子信息职业技术学院高建立编写第3章，陈津编写第6章，孙晓晔编写第一阶段总复习、第二阶段总复习；天津工程职业技术学院高秀英编写第4章，何芳丽编写第5章，李旸编写第10章；天津机电职业技术学院刘振莉编写第9章；胡农参加了部分章节的编写工作。全书的结构安排、统稿由孙晓晔、高建立承担。

在本书的编写过程中，得到了天津市教委高职高专处叶庆、杨荣敏老师的大力支持和热情帮助，他们对本书的编写进行了悉心指导，提出了宝贵的意见。本书承蒙天津师范大学许贵桥教授主审，并提出了诸多宝贵意见和修改建议。高等教育出版社的相关同志也为本书的出版付出了辛勤劳动，在此一并表示衷心的感谢。

由于时间仓促，且限于我们的水平和经验，书中定有不少错误，我们诚恳地希望读者批评斧正。

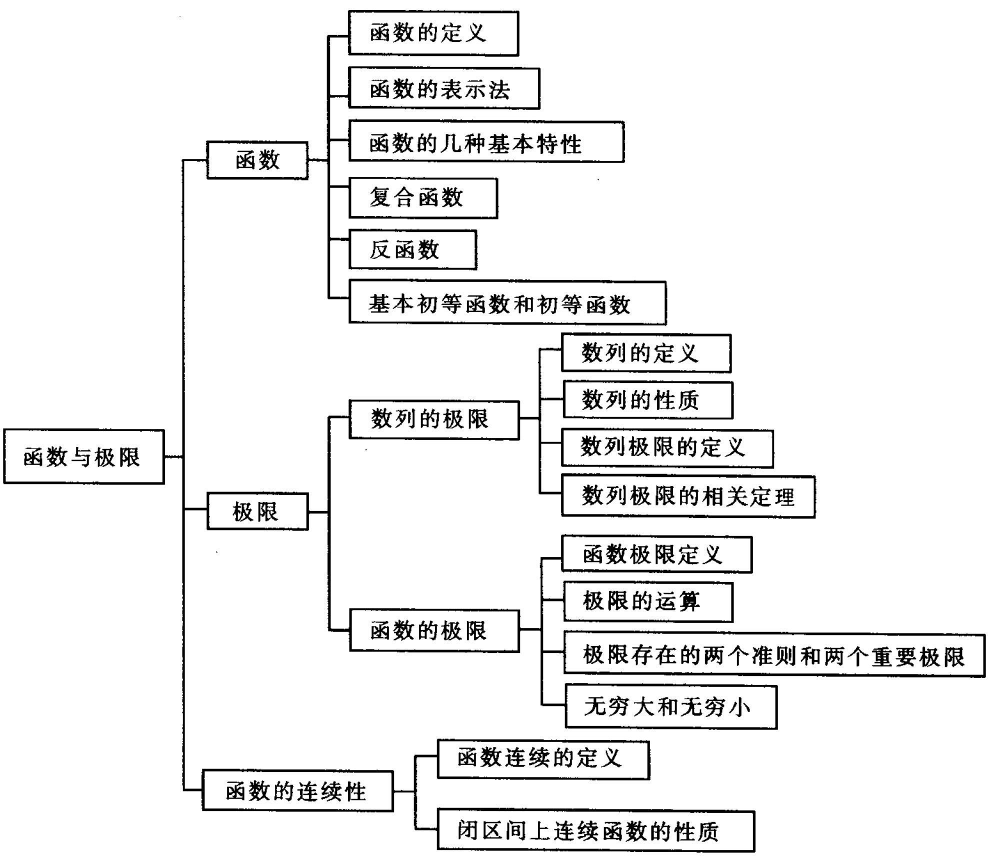
编者

2006年7月

目录

1 函数与极限

二、知识结构



二、教学基本要求与重点、难点

1. 教学基本要求

(1) 通过对函数知识的讲解使学生对函数的概念及特性有进一步的了解,牢固掌握五种基本初等函数的表达式、图像及性质.

(2) 理解复合函数的定义,对给出的基本初等函数能进行复合,对已知的复合函数能进行拆分.

(3) 理解数列的极限的定义,掌握相关定理.

(4) 理解函数极限的定义.

(5) 掌握极限的运算法则、两个重要极限及极限的求法.

(6) 掌握函数连续性的定义,会判断间断点的类型.

(7) 了解初等函数的性质及闭区间上连续函数的性质.

(8) 掌握无穷大与无穷小的概念及性质,会进行无穷小的比较,能利用等价无穷小替换求极限.

2. 重点、难点

(1) 重点:复合函数及初等函数的概念,基本初等函数的表达式、图像及性质. 极限的概念及性质,几种未定式极限的求法及两个重要极限. 无穷小的比较及利用等价无穷小替换求极限.

(2) 难点:几种未定式极限的求法及两个重要极限. 无穷小的比较及利用等价无穷小替换求极限.

三、解题指导

1-1 函数

(一) 例题

例 1 求函数 $y=\sqrt{2-x-x^2}$ 的定义域和值域.

解 由 $2-x-x^2\geqslant 0$ 解得定义域为 $X=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 1\}$.

观察 $g(x)=2-x-x^2$ 的图像(图 1-1),可知使得 $g(x)\geqslant 0$ 的 x 应满足

$$0\leqslant 2-x-x^2\leqslant 2\frac{1}{4},x\in X,$$

又 $$y=\sqrt{g(x)},$$

故函数 $y=\sqrt{2-x-x^2}$ 的值域为 $Y=\left\{y\,\middle|\,0\leqslant y\leqslant\frac{3}{2}\right\}$.

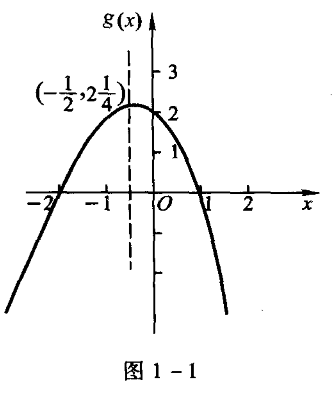


图 1-1

本题主要涉及求函数定义域和值域. 函数定义域的确定主要有两大类:一类是由具体实际问题确定函数的定义域. 这类定义域要

根据实际问题的取值来确定. 另一类是没有实际背景的函数的定义域. 这类函数的定义域是使函数有意义的自变量的集合.

例 2 设$f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=x$,求$f(x)$.

解 令$u=\frac{1-x}{1+x}$,则$(1+x)u=1-x$,$x=\frac{1-u}{1+u}$,

所以
$$f(u)=\frac{1-u}{1+u},$$
即
$$f(x)=\frac{1-x}{1+x}.$$

本题主要涉及函数概念、复合函数概念、函数符号的理解和由复合函数求“外层”函数的方法. 一种解法是通过先换元找到函数式. 另一种方法是先将等式右边的式子变形整理,再换元找到函数式.

例 3 设$f(\sqrt{4+x}+2)=\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$,求$f(x)$.

解 因为$f(\sqrt{4+x}+2)=\frac{(\sqrt{4+x}-2)(\sqrt{4+x}+2)}{x(\sqrt{4+x}+2)}=\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}$, 所以设$\sqrt{4+x}+2=t$,

得
$$f(t)=\frac{1}{t},$$
即
$$f(x)=\frac{1}{x}.$$

例 4 设$f(x)=\begin{cases}2, & |x|\leqslant 2\\ 0, & |x|>2\end{cases}$ 求$f(f(x))$.

解 当$|x|\leqslant 2$时,$f(x)=2$,$f(f(x))=f(2)=2$,

当$|x|>2$时,$f(x)=0$,$f(f(x))=f(0)=2$,

所以,当$x\in(-\infty,+\infty)$时,均有$f(f(x))=2$.

本题是对分段函数求复合函数,解题过程中应注意不同区间段函数的表达式是不同的.

例 5 指出函数$y=\tan^2(e^{2x})$的复合结构.

解 设$u=\tan(e^{2x})$,$v=e^{2x}$,$t=2x$,则函数$y=\tan^2(e^{2x})$的复合结构为
$$y=u^2,u=\tan v,v=e^t,t=2x.$$

例 6 判断函数$f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$与$g(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$是否相同.

解 $f(x)$的定义域为$(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$;$g(x)$的定义域为$(2,+\infty)$. 因为两个函数的定义域不同,所以这两个函数不相同.

说明:判断两个函数是否相同有两个前提,首先看定义域是否相同,其次看值域是否相同.

例 7 如图 1-2 所示是一个曲柄连杆机构,当主动轮(半径为r,角速度为ω)转动时,连杆AB(其长度为l)带动滑块B作往复直线运动,求滑块的运动规律.

解 利用函数关系反映某一运动规律,一般的方法是先画出示意图,再借助图像找出变量之间的函数关系式.

观察图像知

$$x = OC + CB,$$

$$OC = r\cos\varphi, AC = r\sin\varphi,$$

又
$$CB = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi},$$

所以
$$x = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}. \quad (1)$$

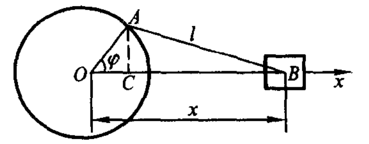


图 1－2

因为主动轮的角速度为 ω，且 $\varphi = \omega t$，所以将 φ 代入(1)式即得到位移 x 与时间 t 的函数关系为

$$x = r\cos\omega t + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t}.$$

（二）练习题 1－1

1. 选择题

(1) 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\} = ($　　$)$.

A. 0　　B. 1　　C. $\begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$　　D. $\begin{cases} 0, & |x| \leqslant 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1+x}}$ 的定义域为(　　).

A. $x \in \mathbf{R}$ 但 $x \neq 0$　　B. $x \in \mathbf{R}$ 但 $x \neq -1$

C. $x \in \mathbf{R}$ 但 $x \neq -1, x \neq 0$　　D. $x \in \mathbf{R}$ 但 $x \neq -1, x \neq -2$

(3) 下列各对函数中为同一函数的是(　　).

A. $y = \lg|x|$ 与 $y = 2\lg x$　　B. $y = e^{-\frac{1}{2}\ln x}$ 与 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

C. $y = \sqrt[4]{x^2}$ 与 $y = \sqrt{x^2}$　　D. $y = x$ 与 $y = \sin(\arcsin x)$

(4) 下列函数能复合成一个函数的是(　　).

A. $y = f(u) = \ln u, u = g(x) = -x^2$　　B. $y = f(u) = \sqrt{u}, u = g(x) = -5$

C. $y = f(u) = u^3, u = g(x) = \sin x$　　D. $y = f(u) = e^{-u^2}, |u| < 1, u = g(x) = 3$

2. 填空题

(1) 函数 $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{4 - x^2}}$ 的定义域为____________.

(2) 设 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$，则 $f(f(x)) =$ ____________.

(3) $f(x+1) = 3x^2 + 2x + 1$，则 $f(x) =$ ____________.

(4) 将 $f(x) = 3 - |x - 1|$ 表示为分段函数为____________.

3. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \sqrt[4]{\dfrac{(x+3)^2}{x}}$;　　(2) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x - 10}}{x - 8}$;

(3) $y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0,\\ 0, \quad x=0;\end{cases}$ (4) $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

4. 分析函数 $y=\ln\arccos\dfrac{1}{x+1}$ 的复合结构.

5. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,求 $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$.

1-2 极限

(一) 例题

例 1 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x|\cdot\sqrt{4+\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}{3x-2}$,

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\cdot\sqrt{4+\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}{3x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cdot\sqrt{4+\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}{3x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4+\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}{3-\dfrac{2}{x}}=\dfrac{2}{3}$,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{4+\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}{3x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)\cdot\sqrt{4+\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}{3x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}{3-\dfrac{2}{x}}=-\frac{2}{3},$$

所以左右极限不相等,故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2}$ 不存在.

说明:第一,极限式中含有偶次根式,因此,开方时应注意取正还是负.第二,求极限过程中应注意利用极限存在的充分必要条件来讨论极限是否存在.

例 2 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\cdot\sin\dfrac{2}{x}$.

分析本题发现,可有两种解法:第一,利用极限的运算法则将原式拆成两个极限来运算;第二,通过换元,将原式拆成两个极限来运算.

解 1 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x^2+3x}\cdot x\cdot\sin\dfrac{2}{x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x^2+3x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\dfrac{2}{x}}{\dfrac{1}{x}}\quad\left(x\to\infty,\text{则}\frac{1}{x}\to 0\right)$$

$$=\frac{6}{5}.$$

解 2 令 $x=\dfrac{1}{t}$,则 $x\to\infty$ 时,$t\to 0$,

$$原式=\lim_{t\to0}\frac{5t^2+3}{5+3t}\cdot\frac{\sin2t}{t}=\lim_{t\to0}\frac{5t^2+3}{5+3t}\cdot\lim_{t\to0}\frac{\sin2t}{t}=\frac{6}{5}.$$

例 3 求$\lim\limits_{x\to0}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$.

解 本题看似简单,但是在计算时却很容易出错,易将其看作重要极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$来求,原因在于:第一,没有注意到$\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$的极限不存在;第二,对重要极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$掌握得不是很好.

因为$\lim\limits_{x\to0}x=0$,又$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant1$,所以利用有界变量与无穷小的乘积仍为无穷小这一性质,有.

$$\lim_{x\to0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0.$$

例 4 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1}$.

解 由于$\dfrac{x-3}{x+2}=1-\dfrac{5}{x+2}$,

设$-\dfrac{5}{x+2}=t$,则$x=-\dfrac{5}{t}-2$,且当$x\to\infty$时,$t\to0$,

所以
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim_{t\to0}(1+t)^{-\frac{10}{t}-3}$$
$$=\lim_{t\to0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-10}\cdot\lim_{t\to0}(1+t)^{-3}=e^{-10}\cdot1=e^{-10}.$$

例 5 已知$x\to\infty$时,$g(x)$与$\dfrac{1}{2x^2}$是等价无穷小,求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{5}x^2\cdot g(x)$.

解 依题意,当$x\to\infty$时,$g(x)\sim\dfrac{1}{2x^2}$,即$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{\frac{1}{2x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}2x^2\cdot g(x)=1$,

所以
$$\lim_{x\to\infty}\frac{4}{5}x^2\cdot g(x)=\frac{4}{5}\lim_{x\to\infty}x^2\cdot g(x)=\frac{2}{5}\lim_{x\to\infty}2x^2\cdot g(x)=\frac{2}{5}.$$

例 6 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

解
$$原式=\lim_{x\to0}\frac{1}{(1+\cos x)}\cdot\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}\qquad(\ln(1+x)\sim x)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left[\frac{3\sin x}{x}+x\cdot\cos\frac{1}{x}\right],$$

又$\lim\limits_{x\to0}x\cdot\cos\dfrac{1}{x}=0$,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,

所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\frac{3}{2}.$$

例 7 求极限 $\lim\limits_{x\to -8}\left[\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}+(x+8)\sin\frac{2}{x+8}\right]$.

分析
$$原式=\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}+\lim_{x\to -8}(x+8)\sin\frac{2}{x+8}.$$

因为 $\lim\limits_{x\to -8}(x+8)\sin\frac{2}{x+8}=0$,故本题的关键在于求出和式中的第一项的极限.

一般我们会采用将分子和分母同时乘以它们的有理化因子的方法来消掉零因子,进而求出极限值.但是若利用变量替换消去分母中的根式,再设法消掉分子和分母中以零为极限的公因子,则要较前一种方法简单.

解 1 因为
$$\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to -8}\frac{(\sqrt{1-x}-3)\cdot(\sqrt{1-x}+3)\cdot(4-2\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(2+\sqrt[3]{x})\cdot(4-2\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})\cdot(\sqrt{1-x}+3)}$$
$$=\lim_{x\to -8}\frac{(-x-8)\cdot(4-2\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(8+x)\cdot(\sqrt{1-x}+3)}$$
$$=-\frac{12}{6}=-2,$$

所以
$$\lim_{x\to -8}\left[\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}+(x+8)\sin\frac{2}{x+8}\right]=-2+0=-2.$$

解 2 对于极限 $\lim\limits_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$,设 $\sqrt[3]{x}=t$,则
$$\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\lim_{t\to -2}\frac{\sqrt{1-t^3}-3}{2+t}=\lim_{t\to -2}\frac{1-t^3-9}{(2+t)\cdot(\sqrt{1-t^3}+3)}$$
$$=\lim_{t\to -2}\frac{-(2+t)\cdot(t^2-2t+4)}{(2+t)\cdot(\sqrt{1-t^3}+3)}=-2,$$

所以
$$\lim_{x\to -8}\left[\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}+(x+8)\sin\frac{2}{x+8}\right]=-2+0=-2.$$

例 8 设 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-2\sqrt{1+3x}}{x-1}=-\frac{1}{8}$,求 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

解 因为 $x\to 1$ 时,$x-1$ 是无穷小量,又因为原式极限为 $-\frac{1}{8}$,故 $x\to 1$ 时,$f(x)-2\sqrt{1+3x}$ 也应为无穷小量,即
$$\lim_{x\to 1}[f(x)-2\sqrt{1+3x}]=0,$$
所以
$$\lim_{x\to 1}f(x)=4.$$

例 9 在图 1-3 所示的 RC 电路充电的过程中,电容两端的电压 $v(t)$ 与时间 t 的关系为