

普通高等教育基础课规划教材

# 复变函数与积分变换

蔡 敏 石 磊 王丽媛 编

 机械工业出版社  
CHINA MACHINE PRESS



0174.5

72

2007

普通高等教育基础课规划教材

# 复变函数与 积分变换

蔡 敏 石 磊 王丽媛 编

主审 张运杰

机械工业出版社

本书是编者依据国家教委《复变函数课程教学基本要求》及高等工业学校《工程数学教学大纲(草案)》(四年制试用“积分变换”部分)的要求,结合近几年普通高等院校扩招后工科数学教学的实际发展趋势,在多年教学实践的基础上编写而成的。

全书共分八章,涵盖了复数与复变函数、解析函数、复变函数积分、级数、留数、共形映射、傅里叶变换及拉普拉斯变换等基本内容。各章均配有相应的例题与习题,书末附有部分习题参考答案。

本书可供高等院校工科各专业的本科生使用,也可供有关科技人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/蔡敏,石磊,王丽媛编. —北京:  
机械工业出版社, 2006.12

普通高等教育基础课规划教材

ISBN 978-7-111-20502-9

I. 复… II. ①蔡…②石…③王… III. ①复变函  
数-高等学校-教材②积分变换-高等学校-教材  
IV. ①0174.5②0177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 150570 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑:郑 玫 版式设计:张世琴

责任校对:吴美英 责任印制:洪汉军

北京京丰印刷厂印刷

2007 年 2 月第 1 版·第 1 次印刷

169mm×239mm·4.875 印张·180 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-20502-9

定价: 13.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换  
销售服务热线电话:(010) 68326294

购书热线电话:(010) 88379639 88379641 88379643

编辑热线电话:(010) 88379711

封面防伪标均为盗版

# 前 言

复变函数与积分变换是理工科大学学生一门重要的数学基础课，在自然科学和工程技术中均有广泛的应用。针对近几年普通高校扩招后工科数学教学的实际发展趋势，结合多年的教学实践，我们组织编写了本书。

本书是依据教育部制定的《复变函数课程教学基本要求》及高等工业学校《工程数学教学大纲（草案）》（四年制试用“积分变换”部分）的要求编写而成，在重视基本概念、基本理论，培养基本能力、力求贴近实际应用的原则下，突出了以下特点：

在主导思想上，力求做到由浅入深、循序渐进，淡化理论证明、强调理论应用，尽可能突出本课程的核心内容。

在内容的安排上，力求做到符合专业需要、突出重点。本书以解析函数为主要研究对象，重点介绍了解析函数的微分理论、积分理论、级数理论、留数理论及几何理论，这些理论构成了全书的主线。书中配备了较丰富的例题与习题，这些例题与习题均为我们在教学实践中精心挑选和积累所得，具有一定的参考价值。

在内容的表述上，力求做到清晰易读、便于自学。对于一些比较难或超出大纲要求的内容进行了合理的取舍，尽量达到简洁与严谨的适度统一。

本书由蔡敏、石磊和王丽媛共同编写，其中石磊编写第1、2、3、4章，蔡敏编写第5、6章，王丽媛编写第7、8章。全书由蔡敏负责组织和统稿。

本书的编写得到了大连交通大学教材立项资金的资助，在此对大连交通大学教务处、数理系领导的大力支持表示感谢！

张运杰教授审阅了全部书稿，并提出许多修改意见，在此深表感谢。书中缺点、疏漏之处恳请读者批评指正！

编 者

# 目 录

## 前言

|                         |    |
|-------------------------|----|
| 第 1 章 复数与复变函数 .....     | 1  |
| 1.1 复数的运算及表示方法 .....    | 1  |
| 1.1.1 复数的概念 .....       | 1  |
| 1.1.2 复数的运算 .....       | 1  |
| 1.1.3 复数的表示方法 .....     | 3  |
| 1.1.4 扩充复平面 .....       | 5  |
| 1.2 复数的乘幂与方根 .....      | 6  |
| 1.2.1 复数的乘积与商 .....     | 6  |
| 1.2.2 复数的乘幂与方根 .....    | 7  |
| 1.3 复平面上的点集 .....       | 9  |
| 1.3.1 区域 .....          | 9  |
| 1.3.2 曲线 .....          | 10 |
| 1.3.3 单连通域、多连通域 .....   | 11 |
| 1.4 复变函数的概念及其几何意义 ..... | 11 |
| 1.4.1 复变函数的概念 .....     | 11 |
| 1.4.2 复变函数的几何意义 .....   | 12 |
| 1.4.3 反函数 .....         | 14 |
| 1.5 复变函数极限与连续 .....     | 15 |
| 1.5.1 复变函数的极限 .....     | 15 |
| 1.5.2 复变函数的连续 .....     | 16 |
| 习题 1 .....              | 17 |
| 第 2 章 解析函数 .....        | 20 |
| 2.1 复变函数的导数 .....       | 20 |
| 2.1.1 复变函数的导数与微分 .....  | 20 |
| 2.1.2 可导与连续的关系 .....    | 22 |
| 2.1.3 求导法则 .....        | 22 |
| 2.1.4 函数可导的充分必要条件 ..... | 22 |
| 2.2 解析函数 .....          | 24 |
| 2.2.1 解析函数的概念 .....     | 25 |
| 2.2.2 函数解析的充分必要条件 ..... | 25 |
| 2.2.3 解析函数的运算法则 .....   | 26 |

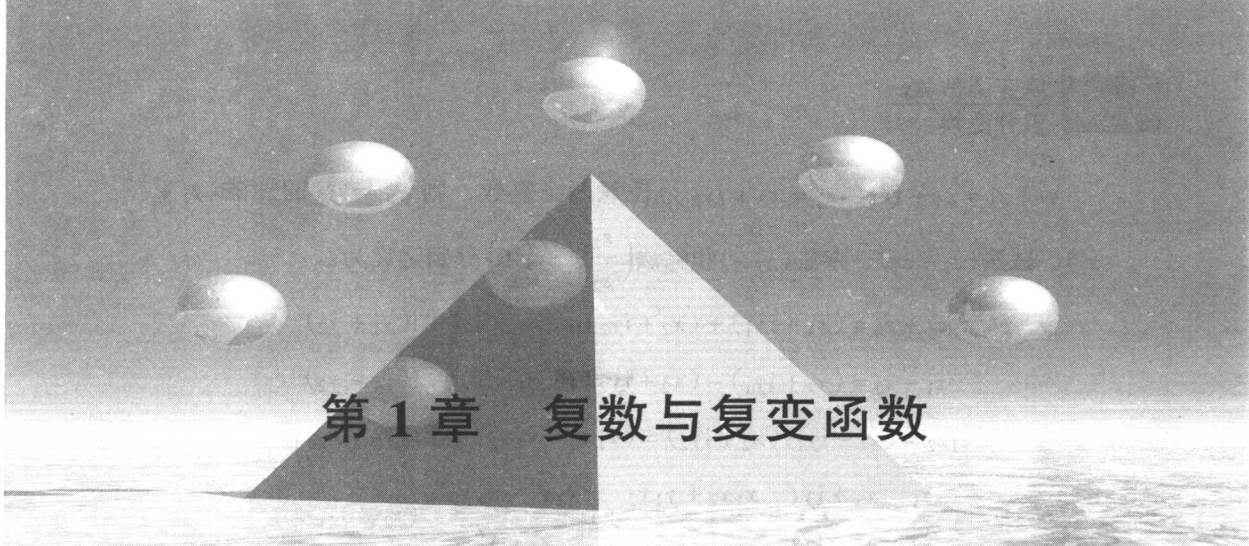
|                          |    |
|--------------------------|----|
| 2.3 解析函数与调和函数 .....      | 26 |
| 2.3.1 调和函数的概念 .....      | 27 |
| 2.3.2 解析函数与调和函数的关系 ..... | 27 |
| 2.4 初等函数 .....           | 29 |
| 2.4.1 指数函数 .....         | 29 |
| 2.4.2 对数函数 .....         | 30 |
| 2.4.3 幂函数 .....          | 32 |
| 2.4.4 三角函数 .....         | 32 |
| 2.4.5 双曲函数 .....         | 33 |
| 2.4.6 反三角函数与反双曲函数 .....  | 34 |
| 习题 2 .....               | 35 |
| 第 3 章 复变函数积分 .....       | 37 |
| 3.1 复变函数积分概念 .....       | 37 |
| 3.1.1 复积分的定义 .....       | 37 |
| 3.1.2 复积分的性质 .....       | 38 |
| 3.1.3 复积分的计算 .....       | 40 |
| 3.2 柯西积分定理 .....         | 41 |
| 3.2.1 柯西积分定理 .....       | 41 |
| 3.2.2 复合闭路定理 .....       | 42 |
| 3.3 复变函数不定积分 .....       | 44 |
| 3.4 柯西积分公式与高阶导数公式 .....  | 46 |
| 3.4.1 柯西积分公式 .....       | 46 |
| 3.4.2 高阶导数公式 .....       | 48 |
| 习题 3 .....               | 49 |
| 第 4 章 级数 .....           | 52 |
| 4.1 复数项级数 .....          | 52 |
| 4.1.1 复数列的极限 .....       | 52 |
| 4.1.2 复数项级数 .....        | 54 |
| 4.2 幂级数 .....            | 56 |
| 4.2.1 复变函数项级数 .....      | 56 |
| 4.2.2 幂级数 .....          | 57 |
| 4.3 泰勒级数 .....           | 61 |
| 4.3.1 泰勒定理 .....         | 61 |
| 4.3.2 一些初等函数的泰勒展开式 ..... | 63 |
| 4.4 洛朗级数 .....           | 65 |
| 4.4.1 洛朗级数 .....         | 65 |
| 4.4.2 解析函数的洛朗展开 .....    | 67 |



|                           |     |
|---------------------------|-----|
| 习题4 .....                 | 71  |
| <b>第5章 留数</b> .....       | 73  |
| 5.1 孤立奇点 .....            | 73  |
| 5.1.1 孤立奇点的分类 .....       | 73  |
| 5.1.2 函数的零点与极点的关系 .....   | 75  |
| 5.1.3 函数在无穷远点的性态 .....    | 77  |
| 5.2 留数 .....              | 79  |
| 5.2.1 留数的定义及留数定理 .....    | 79  |
| 5.2.2 函数在极点处的留数计算规则 ..... | 80  |
| 5.2.3 函数在无穷远点的留数 .....    | 82  |
| 5.3 留数在定积分计算上的应用 .....    | 84  |
| 习题5 .....                 | 88  |
| <b>第6章 共形映射</b> .....     | 91  |
| 6.1 共形映射 .....            | 91  |
| 6.1.1 导数的几何意义 .....       | 91  |
| 6.1.2 共形映射的概念 .....       | 93  |
| 6.2 分式线性映射 .....          | 93  |
| 6.2.1 分式线性函数的定义 .....     | 93  |
| 6.2.2 分式线性函数的分解 .....     | 94  |
| 6.2.3 分式线性映射性质 .....      | 95  |
| 6.2.4 分式线性映射的应用 .....     | 98  |
| 6.3 幂函数与指数函数所确定的映射 .....  | 102 |
| 习题6 .....                 | 105 |
| <b>第7章 傅里叶变换</b> .....    | 107 |
| 7.1 傅里叶积分定理 .....         | 107 |
| 7.1.1 傅里叶积分 .....         | 107 |
| 7.1.2 傅里叶积分定理 .....       | 109 |
| 7.2 傅氏变换 .....            | 110 |
| 7.2.1 傅氏变换 .....          | 110 |
| 7.2.2 单位脉冲函数及傅氏变换 .....   | 111 |
| 7.3 傅氏变换的性质 .....         | 112 |
| 7.4 卷积定理与相关函数 .....       | 115 |
| 7.4.1 卷积定理 .....          | 115 |
| 7.4.2 相关函数 .....          | 116 |
| 习题7 .....                 | 118 |
| <b>第8章 拉普拉斯变换</b> .....   | 120 |
| 8.1 拉普拉斯变换的概念 .....       | 120 |

|                              |            |
|------------------------------|------------|
| 8.1.1 拉氏变换 .....             | 120        |
| 8.1.2 拉氏变换的存在定理 .....        | 121        |
| 8.1.3 周期函数的拉氏变换 .....        | 122        |
| 8.2 拉氏变换的性质 .....            | 122        |
| 8.3 拉氏逆变换 .....              | 125        |
| 8.4 卷积 .....                 | 127        |
| 8.5 拉氏变换的应用 .....            | 128        |
| 8.5.1 常系数线性常微分方程或方程组求解 ..... | 128        |
| 8.5.2 线性系统的传递函数 .....        | 130        |
| 习题 8 .....                   | 131        |
| <b>部分习题参考答案</b> .....        | <b>135</b> |
| <b>参考文献</b> .....            | <b>146</b> |





# 第1章 复数与复变函数

复变函数就是自变量为复数的函数. 本章首先对中学学过的复数的概念、性质、运算作简要的复习和补充, 然后引入点集、区域、曲线、复变函数等概念, 最后将高等数学中的有关函数极限与连续等概念平行地移植到复变函数中, 为以后各章的学习奠定理论基础. 尽管这些概念及性质与高等数学中相应概念和性质几乎完全相同, 但本质上却有很大差别, 应当特别注意.

## 1.1 复数的运算及表示方法

### 1.1.1 复数的概念

我们把形如  $z = x + iy$  (或  $z = x + yi$ ) 的数称为**复数**. 其中  $i$  称为**虚数单位**, 满足  $i^2 = -1$ ,  $x$  和  $y$  为任意实数, 分别称为  $z$  的**实部**和**虚部**, 记为:

$$\operatorname{Re} z = x, \operatorname{Im} z = y.$$

当  $y = 0$  时,  $z = x$  表示实数; 当  $x = 0$ ,  $y \neq 0$  时,  $z = iy$  称为**纯虚数**; 当  $x = y = 0$  时,  $z = 0$  既可看作实数, 也可看作纯虚数. 由此可知, 复数可以看作实数的推广.

设  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  是两个复数, 当且仅当  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$  时, 称  $z_1$  与  $z_2$  **相等**, 记为:  $z_1 = z_2$ . 因此, 复数  $z = x + iy = 0$ , 当且仅当  $x = y = 0$ .

### 1.1.2 复数的运算

#### 1. 复数的四则运算

由于复数可以看作实数的推广, 我们可以根据实数的四则运算来定义复数的四则运算.



设  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  是任意两个复数, 则  $z_1$  与  $z_2$  的加法( $z_1 + z_2$ )、减法( $z_1 - z_2$ )、乘法( $z_1 z_2$ )和除法( $\frac{z_1}{z_2}$ ,  $z_2 \neq 0$ ) 分别定义为:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0).$$

## 2. 复数的运算律

利用上面复数的四则运算法则可知复数运算满足如下的运算律:

(1) 交换律  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ,  $z_1 z_2 = z_2 z_1$ ;

(2) 结合律  $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ ,  $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ ;

(3) 分配律  $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ .

## 3. 共轭复数及其运算性质

设  $z = x + iy$  是一个复数, 称  $x - iy$  为  $z$  的共轭复数, 记作  $\bar{z}$ .

关于共轭复数的运算有如下性质:

(1)  $\bar{\bar{z}} = z$ , (2)  $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ , (3)  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

(4)  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0)$ , (5)  $z \bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$

(6)  $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$ ,  $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$ .

**例题 1-1** 设  $z = \frac{i}{1-i} + \frac{1-i}{i}$ , 求  $\operatorname{Re} z$ ,  $\operatorname{Im} z$ ,  $z \bar{z}$ .

解  $z = \frac{i^2 + (1-i)^2}{(1-i)i} = \frac{-1-2i}{1+i} = \frac{(-1-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-3-i}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$ ,  
 $\operatorname{Re} z = -\frac{3}{2}$ ,  $\operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}$ ,  $z \bar{z} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$ .

**例题 1-2** 设  $z_1 = 1 + 2i$ ,  $z_2 = 3 + 4i$ , 求  $\frac{z_1}{z_2}$ ,  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ .

解  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{3+4i} = \frac{(1+2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i$ ,  
 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{11}{25} - \frac{2}{25}i$ .



### 1.1.3 复数的表示方法

#### 1. 复数的点表示法

根据复数的定义, 复数  $z = x + iy$  与一有序实数对  $(x, y)$  一一对应, 而一有序实数对在平面直角坐标系内又与平面上的点  $P(x, y)$  一一对应. 由此, 可将平面上的点  $P(x, y)$  看作是复数  $z = x + iy$  的几何表示(如图 1-1 所示), 这样就建立了复数与平面上点的一一对应关系.

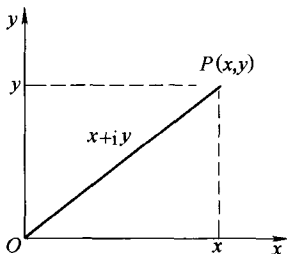


图 1-1

把实数  $x$  对应横坐标轴上的点  $x$ , 把纯虚数  $iy$  对应纵坐标轴上的点  $y$ ,  $z = 0$  对应坐标原点, 这样, 可以把横坐标轴称为**实轴**, 纵坐标轴称为**虚轴**.

把引入实轴、虚轴及原点的平面称为**复平面**, 记为:

$$C = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbf{R}\}.$$

#### 2. 复数的向量表示法

在复平面上, 复数  $z = x + iy$  还与从原点指向点  $P(x, y)$  的向量  $\overrightarrow{OP}$  一一对应. 因此, 还可以将复数  $z = x + iy$  理解为复平面内以原点为起点, 以  $P(x, y)$  为终点的向量. 向量  $\overrightarrow{OP}$  的长度  $r$  称为  $z$  的**模**或**绝对值**, 记为:  $|z| = r$ .

关于  $z$  的模  $|z|$ , 显然有如下各式成立:

- (1)  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;
- (2)  $|z| = |\bar{z}|$ ,  $z\bar{z} = |z|^2$ ;
- (3)  $|z| \leq |x| + |y|$ ,  $|x| \leq |z|$ ,  $|y| \leq |z|$ ;
- (4)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ;
- (5)  $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ .

$\overrightarrow{OP}$  与实轴的正向的夹角  $\theta$  称为  $z$  的**辐角**, 记为  $\text{Arg}z = \theta$ . 需要注意,  $\text{Arg}z$  是多值的, 它们之间相差  $2\pi$  的整数倍. 我们把  $(-\pi, \pi]$  中的辐角称为  $z$  的**辐角主值**, 记为  $\arg z$  (如图 1-2 所示). 于是

$$\text{Arg}z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

当  $z = 0$  时,  $|z| = 0$ , 辐角不确定.

当  $z \neq 0$  时,  $z$  的辐角主值  $\arg z$  按下列关系来确定.

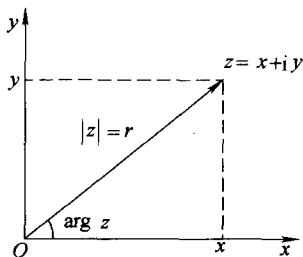


图 1-2



$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & (x > 0) \\ \frac{\pi}{2} & (x = 0, y > 0) \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & (x < 0, y \geq 0) \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & (x < 0, y < 0) \\ -\frac{\pi}{2} & (x = 0, y < 0) \end{cases}$$

### 3. 复数的三角表示法

根据直角坐标与极坐标的关系

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

复数  $z$  还可表示为:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

此式称为复数  $z$  的三角表示式.

### 4. 复数的指数表示法

如果利用欧拉(Euler)公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

复数  $z$  又可表示为:

$$z = r e^{i\theta},$$

此式称为复数  $z$  的指数表示式.

**例题 1-3** 求下列复数的模及辐角

(1) 2; (2)  $-i$ ; (3)  $-4-3i$ .

解 (1)  $|2| = 2$ ,  $\arg 2 = 0$ ,  $\text{Arg} 2 = 2k\pi$ .

(2)  $|-i| = 1$ ,  $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ .

(3)  $|-4-3i| = 5$ ,  $\arg(-4-3i) = \arctan \frac{3}{4} - \pi$ ,

$$\text{Arg}(-4-3i) = \arctan \frac{3}{4} + (2k-1)\pi.$$

以上各式中  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

**例题 1-4** 将下列复数化为三角表示式和指数表示式

(1)  $z = 1 - \sqrt{3}i$ ; (2)  $z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$ .

解 (1)  $|z| = 2$ ,  $\arg z = -\arctan \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$ , 因此



$$z = 2 \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right) \right] = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}.$$

$$(2) |z| = 1, \sin \frac{\pi}{5} = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right) = \cos \frac{3\pi}{10}, \cos \frac{\pi}{5} = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right) = \sin \frac{3\pi}{10},$$

因此

$$z = \cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10} = e^{\frac{3\pi}{10}i}.$$

### 1.1.4 扩充复平面

#### 1. 复数的球面表示法

复数除了可用平面内的点或向量表示外, 还可以用球面上的点表示. 取一个与复平面  $C$  相切于原点  $z=0$  的球面, 球面上的一点  $S$  与原点重合. 过  $S$  作垂直于复平面  $C$  的直线与球面相交于另一点  $N$ ,  $S$ 、 $N$  分别称为球面的南极与北极.

在复平面  $C$  上任取一点  $z$ , 连接  $N$  与点  $z$  的直线必交于球面上的一点  $P$ ; 反之, 在球面任取一点  $P$  ( $N$  除外), 连接  $N$ 、 $P$  并延长, 必交于复平面上唯一的一点  $z$ , 这样就建立了复平面上的所有点与球面上除  $N$  点之外的所有点的一一对应关系. 即复数可用球面上的点来表示(如图 1-3 所示).

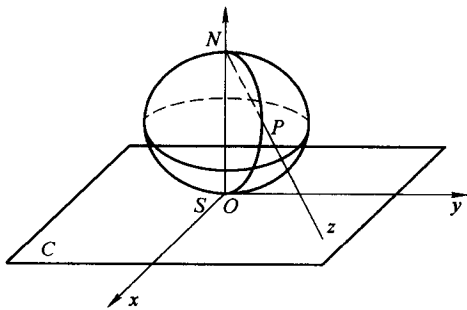


图 1-3

#### 2. 扩充复平面

对于球面上的  $N$  点, 复平面上没有点与之对应, 但我们可以看到当点  $z$  无限远离原点时, 点  $P$  无限地逼近于  $N$ . 于是我们规定: 复平面  $C$  上, 无限远离原点的点称为“无穷远点”, 它与球面上的  $N$  点相对应.

不包含无穷远点在内的复平面称为有限复平面; 包含无穷远点在内的复平面称为扩充复平面. 复球面能把扩充复平面上的无穷远点明显地表示出来, 显示了它与复平面相比的优越性. 本书中如无特别声明只考虑有限复数及有限复平面.

#### 3. 复数 $\infty$

我们规定, 扩充复平面上的无穷远点与复数中的“无穷大”相对应, 记作  $z = \infty$ , 对复数  $z = \infty$  而言, 其模规定为  $+\infty$ , 而其实部、虚部、辐角均无意义. 对于其他每一个复数  $z$ , 都有  $|z| < +\infty$ .



复数  $\infty$  与有限复数  $\alpha$  的四则运算规定如下:

$$\text{加法 } \alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty \quad (\alpha \neq \infty);$$

$$\text{减法 } \alpha - \infty = \infty - \alpha = \infty \quad (\alpha \neq \infty);$$

$$\text{乘法 } \alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty \quad (\alpha \neq 0);$$

$$\text{除法 } \frac{\alpha}{\infty} = 0, \frac{\infty}{\alpha} = \infty \quad (\alpha \neq \infty), \frac{\alpha}{0} = \infty \quad (\alpha \neq 0, \text{ 但可为 } \infty).$$

其他运算如  $\infty \pm \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$  均无意义.

## 1.2 复数的乘幂与方根

### 1.2.1 复数的乘积与商

为了研究问题方便,我们用复数的三角表示法来计算复数乘积与商.

设  $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$ ,  $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$  ( $z_1, z_2$  均不为零), 则

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

类似地, 有

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)],$$

于是

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= r_1 r_2 = |z_1| |z_2|, \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \\ \text{Arg}(z_1 z_2) &= \theta_1 + \theta_2 = \text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2, \\ \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \theta_1 - \theta_2 = \text{Arg} z_1 - \text{Arg} z_2. \end{aligned}$$

上面关于辐角的等式应理解为集合相等. 即对等式左端的任一值, 等式右端必有一值和它对应相等, 反之亦然.

从而有如下的两个定理:

**定理 1.1** 两个复数乘积的模等于它们模的乘积; 两个复数乘积的辐角等于它们辐角的和(如图 1-4 所示).

**定理 1.2** 两个复数商的模等于它们模的商; 两个复数商的辐角等于被除数与除数的辐角之差(如图 1-5 所示).



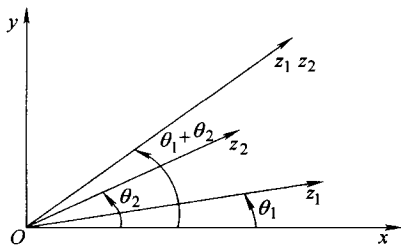


图 1-4

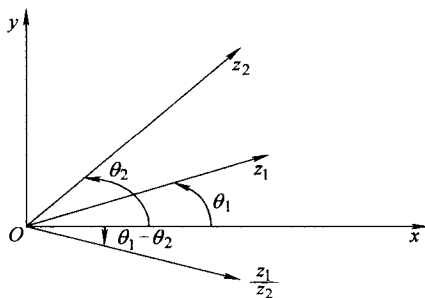


图 1-5

如果用指数形式表示复数

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2},$$

则定理 1.1、定理 1.2 可以简写为

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

**例题 1-5** 用三角表示式计算 (1)  $(1 + \sqrt{3}i)(-\sqrt{3} - i)$ ; (2)  $\frac{1 + \sqrt{3}i}{-\sqrt{3} - i}$ .

解 因为  $1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ ,

$$-\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right],$$

所以

$$(1 + \sqrt{3}i)(-\sqrt{3} - i) = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = -4i,$$

$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{-\sqrt{3} - i} = \cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

## 1.2.2 复数的乘幂与方根

### 1. 复数的乘幂

设  $n$  为正整数,  $n$  个相同的非零复数  $z$  的乘积称为  $z$  的  $n$  次幂, 记为  $z^n$ . 对于  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , 由复数的乘法法则易知

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

若定义  $z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n$ , 并规定  $z^0 = 1$ , 那么当  $z \neq 0$  时, 对任意整数  $n$  上式



均成立.

特别地, 当  $r=1$  时,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta,$$

此式称为棣模弗(DeMoivre)公式.

## 2. 复数的方根

我们称满足方程  $\omega^n = z$  的复数  $\omega$  为复数  $z$  的  $n$  次方根, 记作  $\sqrt[n]{z}$ , 即  $\omega = \sqrt[n]{z}$ . 为了从上式中解出  $\omega$ , 令

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad \omega = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

于是有

$$\rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

得到

$$\rho^n = r, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi \quad (k \text{ 为任意整数}),$$

由此解出

$$\rho = r^{\frac{1}{n}}, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad (k \text{ 为任意整数}),$$

所以

$$\omega = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right).$$

其中,  $\sqrt[n]{r}$  是算术根.

由上式可知, 当  $k=0, 1, 2, \dots, n-1$  时, 得到  $\omega$  的  $n$  个相异的值, 当  $k$  取其他整数时, 上述  $n$  个值将重复出现.

因此, 一个复数  $z$  的  $n$  次方根共有  $n$  个不同的值, 即

$$\omega = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

在几何上, 这  $n$  个点形成一个以原点为中心的正  $n$  边形的顶点, 它们同原点的距离是  $\sqrt[n]{r}$ , 其中, 第一个点所对应的复数的辐角是  $\frac{\arg z}{n}$  (当  $n=5$  时, 如图 1-6 所示).

**例题 1-6** 求  $\sqrt[3]{-8}$ .

**解** 因为  $-8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$ , 所以

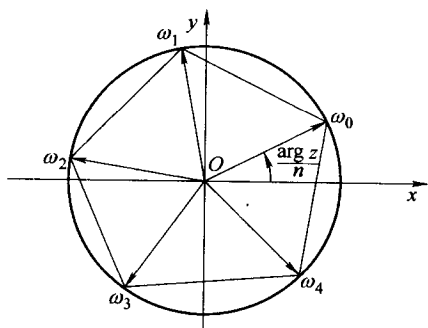


图 1-6

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8} \left( \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) \quad (k=0, 1, 2).$$



$$k=0 \text{ 时, } \omega_0 = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt{3}i;$$

$$k=1 \text{ 时, } \omega_1 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2;$$

$$k=2 \text{ 时, } \omega_2 = 2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}i.$$

**例 1-7** 求解方程  $z^3 - 2 = 0$ .

**解** 因为  $2 = 2(\cos 0 + i \sin 0)$ , 则有

$$z = \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}\left(\cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}\right) \quad (k=0, 1, 2).$$

于是, 方程  $z^3 - 2 = 0$  有 3 个解, 它们是

$$\omega_0 = \sqrt[3]{2}, \quad \omega_1 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \quad \omega_2 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

## 1.3 复平面上的点集

关于平面点集的概念在高等数学的下册已经学过, 在此仅作简要回顾. 因为平面上的点与复数一一对应, 所以对于一些特殊的平面点集, 我们将采用复数所满足的等式或不等式来表示.

### 1.3.1 区域

#### 1. 邻域

平面上以  $z_0$  为中心,  $\delta$  (任意的正数) 为半径的圆:  $|z - z_0| < \delta$  内部的点的集合称为  $z_0$  的邻域; 而由不等式  $0 < |z - z_0| < \delta$  所确定的点的集合称为  $z_0$  的去心邻域.

#### 2. 内点

设  $E$  为平面上的一个点集,  $z_0$  为  $E$  中的任意一点, 如果存在  $z_0$  的一个邻域, 使得邻域内的所有点都属于  $E$ , 则称  $z_0$  为  $E$  的内点.

#### 3. 开集

如果点集  $E$  的每一点均为内点, 则称  $E$  为开集.

#### 4. 边界点

如果点  $z_0$  任一邻域内既有属于  $E$  的点, 也有不属于  $E$  的点, 则称  $z_0$  为  $E$  的边界点.

#### 5. 边界

点集  $E$  所有边界点的集合称为  $E$  的边界.