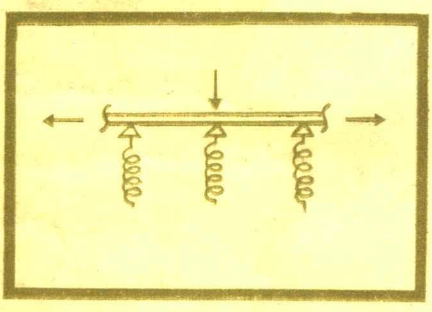
谢天辅 著

铁路轨道结构静力计算问题



人 民 铁 道 出 版 社

铁路轨道结构静力计算问题

谢 天 辅 著

人 民 铁 道 出 版 社

1 9 7 9 年 · 北京

内 容 简 介

本书采用差分方程法，推导出刚性支承与弹性支承上多跨、等距、匀截面连续梁在常见荷载下的强度计算公式，并以此公式制定了计算轨道强度用的钢轨力矩与轨枕反力值影响系数表，提出特殊情况下（轨枕失效、吊板、钢轨接头、断轨后等）轨道强度的解算方法和简易测定支座刚度值法。

本书可供铁路线路工程技术人员及大专院校有关专业的师生参考。

铁路轨道结构静力计算问题

谢 天 辅 著

人民铁道出版社出版

责任编辑 陈健

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

人民铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张： 8 字数：197 千

1 9 7 9 年 4 月 第 1 版 1 9 7 9 年 4 月 第 1 次印刷

印数：0001—6,000 册

统一书号：15043·6152 定价：0.86 元

前　　言

铁路轨道结构的静力计算，在国内外的轨道计算规程、铁路教科书、工程手册中大多采用连续弹性基础上无限长梁的力学模型与计算公式。这个计算方案是解算一个四阶微分方程，理论与计算公式比较简单。但事实上钢轨并非支承在连续基础上而是支承在间隔着的轨枕上，轨枕间隔的距离或钢轨悬空的长度，一般为钢轨支承在轨下垫板上的长度的2～3倍，前者比后者长得多。因此，连续基础上梁的计算方案对轨下基础刚度小的如木枕轨道尚可符合实际，但对轨下基础刚度大的轨道如混凝土轨枕、混凝土轨枕板、混凝土整体道床等的轨道就有较大出入。另一种计算方案是采用弹性点支承上连续梁（有限跨或无限数跨）的力学模型。这个计算方案，不论轨道基础刚度大小，其计算结果都比前一方案合理，切合实际。因为铁路轨道上一根钢轨下的轨枕一般多至20根，而除钢轨接头部分外，轨枕间隔是等距的，钢轨也是匀截面的，所以轨道结构和弹性点支承上等距、匀截面无限长连续梁的力学模型相当接近；至于25米长钢轨或无缝线路，那就和上述力学模型更相符合了。

弹性点支承上连续梁的计算理论与公式虽然比连续弹性基础上梁要复杂些，计算工作量也大些，但如应用差分方程理论，不仅可以大大简化计算工作，并且按照计算公式可以编制一套程序，利用电子计算机计算一套实用、简捷的钢轨力矩和轨枕反力影响值表。本书的第一、二两章，即应用差分方程法推导出刚性支承和弹性支承上多跨、等距、匀截面连续梁在常见的主要荷载下的一系列计算公式。而后在第三章中应用推导得的公式，编制了轨道强度计算所需的钢轨力矩值和轨枕反力值影响系数表。在进行轨道强度计算时，应用影响系数表，即可以迅速求得钢轨力矩和轨枕反力这两个数值。

轨枕失效、吊板、钢轨接头以及发生断轨，这是轨道强度理论研究必须考虑的特殊问题。搞清这些现象对轨道强度的影响，以及对铁路行车的危害程度，作到心中有数，给予正确处理，是有重大的实用意义的；而且可为制订铁路工务规则，进行轨道设计、线路大修施工和养护维修提供一定的理论依据。因此在本书第三章的后半部阐述了这些特殊问题的解算方法并举实例数字。此外，还提出了一张尺解图，为轨下基础刚度D的测定解决了计算繁琐问题。

本书初稿（1964年）承长沙铁道学院赵方民教授、铁道部科学研究院助理研究员周宏业同志提出宝贵意见、校核公式；两个影响值系数表，系由铁道部科学研究院邢书珍同志协助计算。本书初稿及第一、二次修改稿先后由长沙铁道学院、铁道部标准计量研究所和西南交通大学油印。对以上单位和同志的热情支持与帮助，深表感谢。

谢天辅
1978年8月

目　录

符号说明

A_i——由边界条件方程定的待定常数；
A_M——力矩面积；
A'_M——部分力矩面积；
$(B_W)_{-1}$——连续梁的一个支座失效后，失效支座点梁的刚度；
C_i——由边界条件方程定的待定常数；
$C_{\psi W}$——半无限长梁梁端在集中荷载W下的梁的角柔度系数；
$C_{\psi M}$——半无限长梁梁端在力矩M下的梁的角柔度系数；
D——支座刚度；
E——杨氏弹性模量；
E——前移运算符号；
F、G、H、J——弹性支座上无限长梁边界条件方程左端待定常数的系数；
I——梁截面的二次矩；
K——常数
K——弹性支座上连续梁的参数，$K=\dfrac{DL^3}{24EI}$；
L——梁跨度；
M——力矩；
P——外力或抵偿荷载；
Q——剪力；
R——支座反力；
R_{AM}——以力矩面积为荷载的梁端反力；
W——集中荷载；
$(W_B)_{-1}$——一个支座失效点上梁的分荷载；
$W_{\mu D}$——一个特殊刚度支座上的分荷载；
$a=1-K$，$K=\dfrac{DL^3}{24EI}$；
$b=\sqrt{6K-K^2}$，同上；
d——半无限长梁的端支座外伸梁的距离；
e——自然对数底；
h——自变量x的增量；
i——虚数符号、$i=\sqrt{-1}$；
k——连续弹性基础上梁的参数，$k=\sqrt[4]{\dfrac{\mu}{4EI}}$；
k_1、k_2——边界条件方程的右端项；
n——有限长梁最后支座标号；

q_1、q_2——$q^2+4q+1=0$的根值 $q_1=-2+\sqrt{3}$； $q_2=-2-\sqrt{3}$；

r——支座标号；

u——单位长连续基础的刚度（$u=\dfrac{D}{L}$）；

w——匀布荷载；

w'——三角形荷载的一端值（另一端为0）；

y——挠度；

$\alpha=\text{arc ch}\dfrac{\sqrt{4+2K}+\sqrt{6K}}{2}$， $K<6$时；

$\beta=\text{arc cos}\dfrac{\sqrt{4+2K}-\sqrt{6K}}{2}$， $K<6$时；

$\gamma=\text{arc tg}\sqrt{\dfrac{6}{K}-1}$ $K<6$时；

Δ——差分运算符号；

δ——吊板量；

λ——特殊跨长λL的系数；

η——集中荷载距近邻支座的距离ηL；

θ_i——$\text{ch}\theta_i=-\text{ch}\phi_i$；

ϕ_i——常系数四阶线性齐次差分方程的特征方程的根e^{ϕ_i}的e的幂；

μ——特殊刚度支座的刚度μD的D的系数；

ξ——集中荷载W距计算M或R截面的距离ξl；

ζ——钢轨接头作为弹性铰的角柔度系数；

ψ——梁挠角；

第一章　刚性支座上多跨、等距、匀截面连续梁之解

§1—0　刚性支座上梁的三力矩方程的特征方程之根q_1、q_2

取刚性支座上多跨、等距、匀截面连续梁的$r—r+1—r+2$两跨，跨上无荷载（图1—1），由材料力学的三力矩方程得：

$$M_{r+2}+4M_{r+1}+M_r=0$$

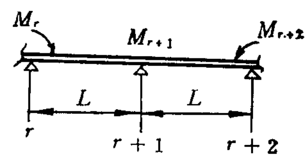


图　1—1

把上式写成差分方程的前移运算符号**E**的形式①：

$$(\mathbf{E}^2+4\mathbf{E}+1)M_r=0 \tag{1—1}$$

差分方程（1—1）的特征方程的二个根为：

$$\left.\begin{aligned} q_1&=-2+\sqrt{3}\\ q_2&=-2-\sqrt{3}\end{aligned}\right\} \tag{1—2}$$

因此方程（1—1）的解为：

$$M_r=C_1q_1^r+C_2q_2^r \tag{1—3}$$

式中　C_1、C_2由边界支座上梁的外加荷载情况和支承条件的要求决定。

§1—1　无 限 长 梁

当连续梁为无限长时，支座号r可为∞，支座上梁力矩的表达式$M_r=C_1q_1^r+C_2q_2^r$的C_2应等于零，这是由于边界条件$r=\infty$，

$$M_\infty=C_1q_1^\infty+C_2q_2^\infty=0$$

$$\because \quad q_1^\infty=0, \qquad |q_2|>1$$

$$\therefore \quad C_2=0$$

因此，刚性支座上无限长梁的支座上的梁力矩M_r的表达式剩下一个待定常数C_1，即

$$M_r=C_1q_1^r$$

1—1—1　无限长梁一跨的中点加一集中荷载W

标梁的支座号如图1—2，在W的右半无限长梁上（本节以后也都取右半无限长梁），任何支座上梁力矩M_r表达式为：

$$M_r=C_1q_1^r$$

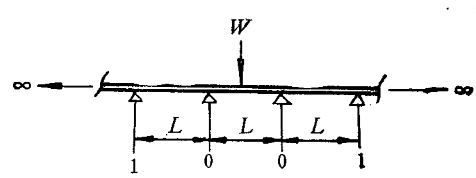


图　1—2

在0-0-1跨上，由三力矩方程②有：

---

① 关于前移运算符号**E**与差分方程见本文末附录A。

② 本章内各求待定常数的边界三力矩方程等号右端项的由来见附录B。

$$M_0+4M_0+M_1=5M_0+M_1=-\frac{3}{8}WL$$

上式因支座标号对W是对称的，因此左 0 号支座梁力矩和右 0 号支座梁力 矩 相 等①。代 入 $M_0=C_1q_1^0=C_1$，$M_1=C_1q_1$，得：

$$5C_1+C_1q_1=-\frac{3}{8}WL$$

∴
$$C_1=\frac{1}{5+q_1}\left(-\frac{3}{8}WL\right)$$

$$M_0=C_1=\frac{1}{5+q_1}\left(-\frac{3}{8}WL\right)=-0.0793WL$$

最大梁力矩 M_{max} 在 集中荷载W之下：

$$M_{max}=M_W=\frac{1}{4}WL+M_0=(0.25-0.0793)WL=0.1707WL$$

支座反力：

$$\left.\begin{aligned}R_0&=\frac{W}{2}+\frac{M_1-M_0}{L}\\R_r&=\frac{M_{r+1}-2M_r+M_{r-1}}{L}\qquad r=1,2,\cdots\end{aligned}\right\}\qquad(1-4)$$

1—1—2 无限长梁的一个支座失效，在失效点梁上加一集中荷载W

标梁的支座号如图 1 — 3， 取 0-0-1两跨，由三力矩方程为：

$$M_0\cdot 2L+2M_0\cdot(2L+L)+M_1L=-6\frac{\frac{1}{2}WL\cdot\frac{1}{2}\cdot 2L\cdot L}{2L}$$

或
$$8M_0+M_1=\frac{-3}{2}WL$$

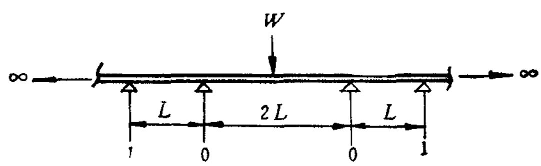


图 1—3

代入$M_0=C_1$，$M_1=C_1q_1$

$$8C_1+C_1q_1=\frac{-3}{2}WL$$

∴
$$C_1=\frac{1}{8+q_1}\left(\frac{-3}{2}WL\right)$$

$$M_0=C_1q_1^0=\frac{1}{8+q_1}\left(\frac{-3}{2}WL\right)=-0.194WL$$

最大梁力矩在集中荷载W之下，

$$M'_{max}=M'_W=\frac{W\cdot 2L}{4}-0.194WL=0.306WL$$

因此，一个支座失效后，梁的最大力矩为没有失效支座梁的最大力矩的

$$\frac{0.306}{0.1707}=1.79\text{倍。}$$

---

① 本文内梁力矩符号，凡使梁挠曲凹向上者为正，反之为负。

爱林顿（J.P.Ellington, *Beam on the discrete Supports*, Bulletin of I.R.C.A. 1957, 12.）在解算刚性支座上等距、匀截面无限长梁的一个支座失效题时，标梁的支座号如图1—4。他在求待定常数 C_1 时，直接取0-1跨的静力平衡方程：

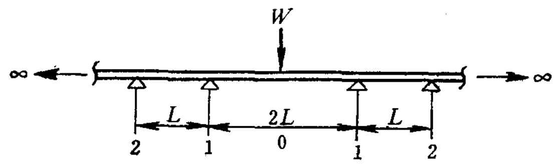


图 1—4

$$\frac{M_0-M_1}{L}=\frac{W}{2},$$

代入由差分方程得来的梁支座力矩表达式 $M_0=C_1$，$M_1=C_1q_1$，求得 $C_1=\dfrac{WL}{2(1-q_1)}=0.394WL$，以此求得 W 下的梁力矩 $M''_W=M_0=C_1q_1^0=0.394WL$。因此爱林顿得到：在一个支座失效后梁的最大力矩 M''_{max} 为沒有失效支座梁的最大力矩 M_W 的 $\dfrac{0.394}{0.1707}=2.3$ 倍，比我们以上求得的1.79倍大得多，就最大力矩的增加量看，前者增加79%，而后者增加130%，为前者的 $\dfrac{130}{79}=1.64$ 倍。

爱林顿这个解是错误的。取图1—4的1-1-2两跨，按三力矩方程，理应有：

$$M_1\cdot 2L+2M_1\cdot(2L+L)+M_2\cdot L=8M_1L+M_2L=\frac{-3}{2}WL^2$$

但如果以爱林顿的解 $C_1=0.394WL$，$M_1=C_1q_1=0.394(-0.268)WL$，

$$M_2=C_1q_1^2=0.394(-0.268)^2WL$$

代入到上式中，得到的却是个不等式：

$$8(0.394)(-0.268)WL+(0.394)(-0.268)^2WL=-0.814WL\neq\frac{-3}{2}WL$$

这证实爱林顿的解是错误的。其错误有两方面：一是他把刚性支座上连续梁差分方程的解的支座梁力矩表达式 $M_r=C_1q_1^r$ 用到图1—4的0号点上，但0号点却是个失去了支座的点，不是个刚点，梁在这一点是有挠度的，因此不能用 $M_r=C_1q_1^r$ 表达式；其次连续梁是个静不定结构，$M_r=C_1q_1^r$ 表达式是根据结构的连续方程即三力矩方程，按差分方程理论求得的，因此这个解的待定常数也必须用边界的连续性方程或和连续性有关的边界条件去定它，不能用静定结构的静力平衡方程来定 C_1 值。这两个基本错误固然是由于把失效支座点标成0号引起的，但支座标号并不是主要症结，我们可以用图1—4的支座标号，取1-1-2两跨的三力矩方程求待定常数 C_1：

$$8M_1+M_2=\frac{-3}{2}WL$$

代入 $M_1=C_1q_1$，$M_2=C_1q_1^2$，得：

$$8C_1q_1+C_1q_1^2=\frac{-3}{2}WL$$

$$\therefore\qquad C_1=\frac{1}{(8+q_1)q_1}\left(\frac{-3}{2}WL\right)=0.725WL$$

$$M_1=C_1q_1=-0.194WL;\quad M_2=C_1q_1^2=0.052WL$$

以上的 C_1 值虽然和我们按图1—3求得的 C_1 值（$-0.194WL$）不同，但图1—4上支座1、2的 M_1、M_2 和图1—3上相同位置的 M_0、M_1 值完全相等，是正确的解答。但图1—4的集中荷载 W 下0点的梁力矩，如前所述，由于0点梁有挠度，所以不能直接用 $M_0=C_1q_1^0=0.725WL$ 这个表达式来计算，应仍用支座号1的梁力矩 $M_1=-0.194WL$ 和简支梁1—1跨的中点力矩 $\dfrac{1}{4}\cdot W\cdot 2L$ 叠加，即 $M_W=-0.194WL+\dfrac{WL}{2}=0.306WL$，同样可得到正确的最大梁力矩。

爱林顿在他的论文的结论中提出：“……数字题解证实，在铁路轨道上，一根轨枕失效，钢轨最大力矩比正常轨道（即无失效轨枕）的钢轨最大力矩增大的百分数在通常道碴轨道基础时为30(%)左右，而当轨道基础刚度较大时，这个增大百分数可超过100(%)”，这个“可超过100(%)”是爱林顿从他解刚性支

座上无限长连续梁在一个支座失效题的错误解答得来的，因此也是错误的。计算表明，弹性支座上等距、匀截面无限长连续梁在一个集中荷载下，当一个支座失效后，梁的最大力矩比沒有失效支座梁的最大力矩的增大百分数，随支座的刚度增大而增大，在支座的刚度为无限大时（即刚性支座），这个增大百分数达最大值（79%），因此在铁路轨道上，不论基础刚度如何，一根轨枕失效后，钢轨的最大力矩比正常轨道（无轨枕失效）的钢轨最大力矩增大量不会超过79%。（见第三章）

1—1—3 其他荷载

刚性支座上等距、匀截面无限长梁的一跨上加任何对称荷载，求待定常数 C_1的0-0-1两跨的三力矩方程的左端项仍是$5M_0+M_1$，只是方程的右端要看对称荷载的形式与位置来定。例如一对对称半集中荷载$\frac{W}{2}$（图1—5），0-0-1两跨的三力矩方程是：

$$5M_0+M_1=\frac{-3}{2}\eta(1-\eta)WL,$$

代入$M_0=C_1$，$M_1=C_1q_1$，得：

$$C_1=\frac{1}{5+q_1}\left[\frac{-3}{2}\eta(1-\eta)WL\right]$$

这个C_1值的含q_1部分$\frac{1}{5+q_1}$，和1-1-1节的C_1值含q_1部分是一样的，只是C_1的含荷载部分两不相同，它们各等于边界三力矩方程的右端项。另一种对称荷载（一跨上加匀布荷载w）的C_1值也是这样。以上三种荷载的解，见表1—1序号1、2、3。

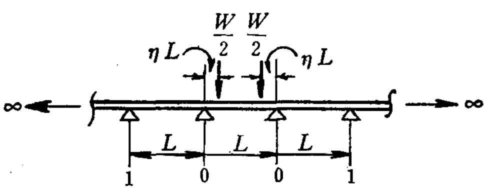


图 1—5

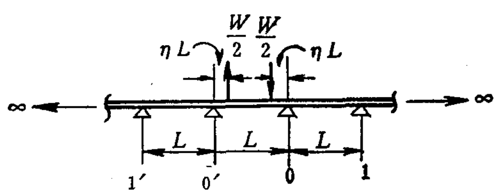


图 1—6

在刚性支座上的等距、匀截面无限长梁的一跨上，加一对反对称半集中荷载$\frac{W}{2}$（图1—6），在0′-0-1跨上有三力矩方程：

$$M_{0'}+4M_0+M_1=\frac{-1}{2}\eta(1-\eta)(1-2\eta)WL$$

但因荷载是反对称的，可知$M_{0'}=-M_0$，因此上式成为

$$3M_0+M_1=\frac{-1}{2}\eta(1-\eta)(1-2\eta)WL$$

代入$M_0=C_1$、$M_1=C_1q_1$，得：

$$C_1=\frac{1}{3+q_1}\left[\frac{-1}{2}\eta(1-\eta)(1-2\eta)WL\right]$$

以上这个C_1值适用于荷载右边半无限长梁的梁力矩表达式，其负值适用荷载左边半无限长梁的梁力矩表达式（以后本文对反对称荷载下梁力矩表达式中的系数均同此）。

和对称荷载相似，任何反对称荷载下的连续梁，求M_r表达式中的C_1值的边界三力矩方程的左端项都是$3M_0+M_1$，只是方程右端不同。同理，C_1值的含q_1部分也都相同，只是含荷载部分各等于相应边界三力矩方程右端的含荷载项。三种反对称荷载下的连续梁的解，见

表１－１的序号４、５、６。

在刚性支座上等距、匀截面无限长连续梁的一跨上加一个偏集中荷载W（图１－７）的解，可以叠加以上一对对称半荷载$\frac{W}{2}$和一对反对称半荷载$\frac{W}{2}$的解而得。但也可直接一次求解。标支座号如图１－７，则右半无限长梁的支座上梁力矩表达式$M_r=C_1q_1^r$，左半无限长梁的支座上梁力矩表达式$M_{r'}=C_1'q_1^r$，在0′-0-1两跨上的三力矩方程为：

$$M_{0'}+4M_0+M_1=-\eta(1-\eta)(2-\eta)WL$$

在1′-0′-0两跨上的三力矩方程为：

$$M_0+4M_{0'}+M_{1'}=-\eta(1-\eta)(1+\eta)WL$$

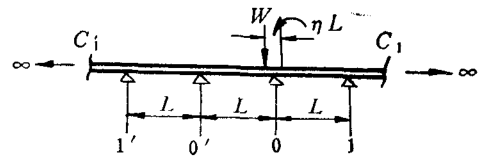


图　1－7

代入　$M_0=C_1$，$M_1=C_1q_1$，$M_{0'}=C_1'$，$M_{1'}=C_1'q_1$，

得：

$$C_1'+(4+q_1)C_1=-\eta(1-\eta)(2-\eta)WL$$
$$(4+q_1)C_1'+C_1=-\eta(1-\eta)(1+\eta)WL$$

联解以上两式，得：

$$C_1=\frac{-\eta(1-\eta)[(1+\eta)-(4+q_1)(2-\eta)]}{1-(4+q_1)^2}WL$$

$$C_1'=\frac{-\eta(1-\eta)[(2-\eta)-(4+q_1)(1+\eta)]}{1-(4+q_1)^2}WL$$

这两个直接求得的待定常数和以上用叠加一对对称半荷载$\frac{W}{2}$和一对反对称半荷载$\frac{W}{2}$解结的果完全相同。在$\eta=\frac{1}{2}$时，　$C_1=C_1'=\frac{1}{5+q_1}\left(-\frac{3}{8}WL\right)$

§1—2　有限长梁

有限长梁的支座号r是有限的，支座点梁力矩表达式$M_r=C_1q_1^r+C_2q_2^r$的C_2不等于零，因此须有两个边界条件方程定之。如前所述，刚性支座上等距、匀截面连续梁的梁力矩表达式$M_r=C_1q_1^r+C_2q_2^r$是由三力矩方程的普遍式经差分方程求得的，所以这个表达式中的待定常数C_1、C_2也必须用边界的三力矩方程或与连续性有关的梁的边界支承条件定之，不能用静力平衡方程去定这两个待定常数。

在推求待定常数C_1、C_2值时，可以利用$q_1q_2=1$，即q_1与q_2互为倒数的关系，将推导得的C_1值中的q_2换为$1/q_1$，这样C_1值中只含q_1，同样也把C_2值中的q_1换为$1/q_2$，使C_2值中只含q_2。事实上在$M_r=C_1q_1^r+C_2q_2^r$式中，C_1与C_2，q_1与q_2是对应对称的，因此求得一个C值后，只要把C与q的下角标换一下（１换为２，或２换为１）即得另一个C值。

有限长梁的梁端可以有各种支承情况，以下推求简支与固定两种支承的解。

1—2—1　两端简支

（A）刚性支座上$2n+1$跨等距、匀截面连续梁的正中一跨加荷载

正中一跨的中点加一个集中荷载W（图１－８），标支座号如图，则0-0-1两跨的三力矩方程与1-1-1节的无限长梁一样仍为：

$$5M_0+M_1=\frac{-3}{8}WL$$

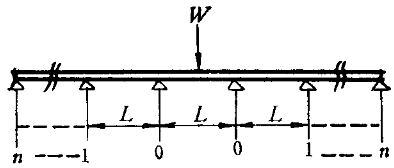


图 1－8

梁端的支承条件为：$M_n=0$，

代入$M_0=C_1+C_2$，$M_1=C_1q_1+C_2q_2$，

$M_n=C_1q_1^n+C_2q_2^n$

$$(5+q_1)C_1+(5+q_2)C_2=\frac{-3}{8}WL$$

$$q_1^nC_1+q_2^nC_2=0$$

联解以上两式，得：

$$C_1=\frac{1}{(5+q_1)-(5q_1+1)q_1^{2n-1}}\left(\frac{-3}{8}WL\right)$$

$$C_2=\frac{1}{(5+q_2)-(5q_2+1)q_2^{2n-1}}\left(\frac{-3}{8}WL\right)$$

和无限长梁相仿，刚性支座上 $2n+1$ 跨连续梁的中间一跨上加任何其他对称荷载如图 1－9。梁力矩M_r表达式的C_1、C_2含q_1、q_2部分都相同，只是含荷载部分不相同，各为它的边界三力矩方程的右端项。图 1－9 的（a）、（b）两种荷载下的解见表 1－1 序号10、11。

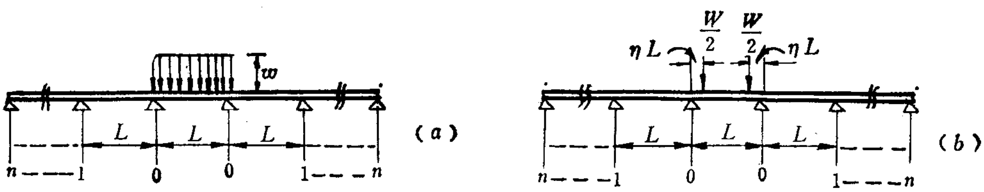


图 1－9

如果在正中一跨加一对反对称半集中荷载$\frac{W}{2}$图 1—10，仿照以上推导得

$$C_1=\frac{1}{(3+q_1)-(3q_1+1)q_1^{2n-1}}\times\left[\frac{-1}{2}\eta(1-\eta)(1-2\eta)WL\right]$$

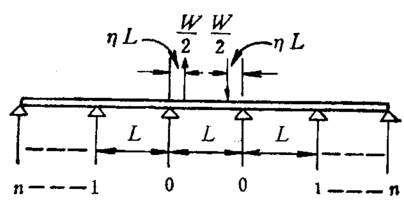


图 1—10

$$C_2=\frac{1}{(3+q_2)-(3q_2+1)q_2^{2n-1}}\left[\frac{-1}{2}\eta(1-\eta)(1-2\eta)WL\right]$$

对于其他反对称荷载图 1—11的解，M_r表达式中的待定常数C_1、C_2值的含q_1、q_2部分和上式相同。含荷载部分各为它边界 0-0-1 跨三力矩方程的右端项（见表 1－1 序号 13、14）。

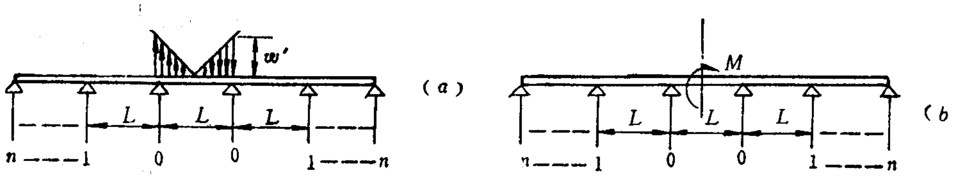


图 1—11

（B）全梁加载

（a）全梁每跨跨中点加一集中荷载W（图 1—12）

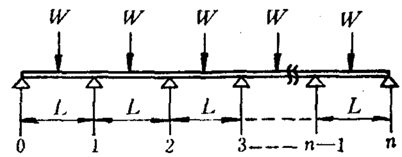


图 1—12

标支座号如图 1—12，由 0 ～ n 号支座间，任何两跨均有三力矩方程：

$$M_{r+2}+4M_{r+1}+M_r=-6\frac{WL}{8}$$

或
$$(\mathbf{E}^2+4\mathbf{E}+1)M_r=-6\frac{WL}{8}$$

上式为一非齐次线性二阶差分方程，先求它的特解$(M_r)_P$。因为方程右端项是个常数，根据前移运算符号$\mathbf{E}$的性质（即对常数进行前移运算，运算结果仍是个常数这一性质），所以这个非齐次差分方程的特解$(M_r)_P$一定也是个常数。由此，

$$(\mathbf{E}^2+4\mathbf{E}+1)(M_r)_P=6(M_r)_P=-\frac{6WL}{8}$$

$$\therefore \qquad (M_r)_P=\frac{-WL}{8}$$

方程的全解：

$$M_r=(M_r)_C+(M_r)_P=C_1q_1^r+C_2q_2^r-\frac{WL}{8}$$

上式中$(M_r)_C$为方程的齐次解，即

$$(M_r)_C=C_1q_1^r+C_2q_2^r。$$

由边界条件$M_0=0$，$M_n=0$，得：

$$C_1+C_2-\frac{WL}{8}=0$$

$$C_1q_1^n+C_2q_2^n-\frac{WL}{8}=0$$

联解以上两式得：

$$C_1=\frac{1}{q_1^n+1}\cdot\frac{WL}{8}$$

$$C_2=\frac{1}{q_2^n+1}\cdot\frac{WL}{8}$$

全梁加匀布荷载w的解，可以将以上两式中的$\frac{WL}{8}$改为$\frac{wL^2}{12}$，即得C_1，C_2值（见表 1—1 序号16）。

（b）全梁加一个三角形荷载（图 1—13）

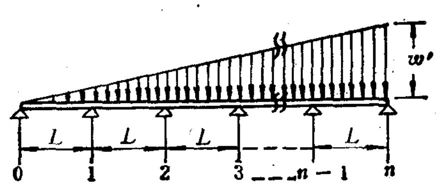


图 1—13

梁的任何两跨有三力矩方程：

$$M_{r+1}+4M_r+M_{r-1}=-6\frac{w'L^2}{12n}\cdot r$$

或
$$(\mathbf{E}+4+\mathbf{E}^{-1})M_r=-6\frac{w'L^2}{12n}r$$

上式是个非齐次线性二阶差分方程，先求它的特解$(M_r)_P$。因为方程右端是变量r的一次式，

由E的运算性质，$\mathbf{E}r=r+1$，$\mathbf{E}^{-1}r=r-1$ 可知，特解 $(M_r)_P$ 一定也是个 r 的一次式。今以 $(M_r)_P=K_Pr$，K_P为待求常数，则

$$(\mathbf{E}+4+\mathbf{E}^{-1})(M_r)_P=(\mathbf{E}+4+\mathbf{E}^{-1})K_Pr=6K_Pr=-6\frac{w'L^2}{12n}\cdot r$$

$$\therefore \qquad K_p=\frac{-w'L^2}{12n}$$

方程的全解为 $\quad M_r=(M_r)_C+(M_r)_P=C_1q_1^r+C_2q_2^r-\dfrac{w'L^2}{12}r$

由边界条件 $\quad M_0=0$，$M_n=0$，得：

$$M_0=C_1+C_2=0$$

$$M_n=C_1q_1^n+C_2q_2^n-\frac{w'L^2}{12}=0$$

联解以上两式得：

$$C_1=\frac{q_1^n}{q_1^{2n}-1}\cdot\frac{w'L^2}{12}$$

$$C_2=\frac{q_2^n}{q_2^{2n}-1}\cdot\frac{w'L^2}{12}$$

1—2—2 两端固定

（A）$2n+1$跨梁的正中一跨，加集中荷载W（图 1—14）

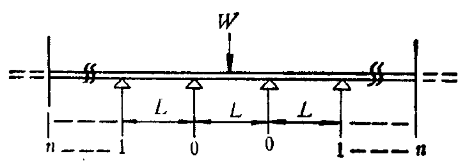


图 1—14

求M_r表达式的两个待定常数C_1、C_2的两个方程，一个仍是0-0-1两跨的三力矩方程：

$$5M_0+M_1=\frac{-3}{8}WL,$$

另一个方程是梁端支承条件，梁的挠角$\psi_n=0$，即

$$\frac{M_nL}{3EJ}+\frac{M_{n-1}L}{6EJ}=0$$

或 $$2M_n+M_{n-1}=0$$

将M_0、M_1、M_{n-1}、M_n的表达式代入到以上两方程中，得：

$$(5+q_1)C_1+(5+q_2)C_2=\frac{-3}{8}WL$$

$$(2q_1^n+q_1^{n-1})C_1+(2q_2^n+q_2^{n-1})C_2=0$$

联解以上两式得：

$$C_1=\frac{2+q_1}{(10+7q_1+q_1^2)-(10q_1^2+7q_1+1)q_1^{2(n-1)}}\left(\frac{-3}{8}WL\right)$$

$$C_2=\frac{2+q_2}{(10+7q_2+q_2^2)-(10q_2^2+7q_2+1)q_2^{2(n-1)}}\left(\frac{-3}{8}WL\right)$$

其他对称荷载下的M_r中的C_1、C_2值，只须将以上两式中的$\left(\dfrac{-3}{8}WL\right)$换为对应荷载的0-0-1两跨三力矩方程的右端项即可（见表 1—1 序号22、23）。

$2n+1$ 跨连续梁的正中一跨加一对反对称半荷载$\dfrac{W}{2}$（图 1—15），求 M_r 表达式中的两

个待定常数C_1、C_2时，参照以上推导得：

$$(3+q_1)C_1+(3+q_2)C_2=\frac{-1}{2}\eta(1-\eta)(1-2\eta)WL$$

$$(2q_1^n+q_1^{n-1})C_1+(2q_2^n+q_2^{n-1})C_2=0$$

联解以上两式得：

$$C_1=\frac{2+q_1}{(6+5q_1+q_1^2)-(6q_1^2+5q_1+1)q_1^{2(n-1)}}\left[\frac{-1}{2}\eta(1-\eta)(1-2\eta)WL\right]$$

$$C_2=\frac{2+q_2}{(6+5q_2+q_2^2)-(6q_2^2+5q_2+1)q_2^{2(n-1)}}\left[\frac{-1}{2}\eta(1-\eta)(1-2\eta)WL\right]$$

另外两种反对称荷载的解，只须将上式中的荷载部分换为相应荷载的0-0-1两跨三力矩方程的右端项，就得C_1、C_2值（见表1—1序号25、26）。

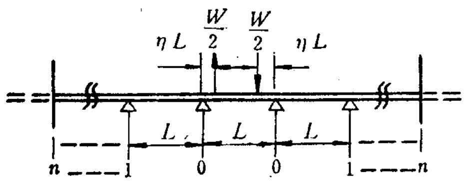


图 1—15

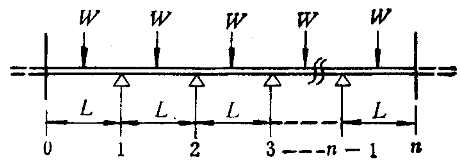


图 1—16

（B）全梁加荷载

（a）全梁每跨跨中点加集中荷载W（图1—16）

梁的任何两跨仍有三力矩方程的差分形式：

$$(\mathbf{E}^2+4\mathbf{E}+1)M_r=-6\frac{WL}{8}$$

在1—2—1(B)(a)中已证实这个方程的全解为：

$$M_r=C_1q_1^r+C_2q_2^r-\frac{WL}{8}$$

求待定常数C_1、C_2值，用以下梁端支承条件：

$$\psi_0=0 \quad 即 \quad \frac{1}{6EI}(2M_0L+M_1L)+\frac{WL^2}{16EI}=0$$

$$\psi_n=0 \quad 即 \quad \frac{1}{6EI}(2M_nL+M_{n-1}L)+\frac{WL^2}{16EI}=0$$

代入M_0、M_1、M_n、M_{n-1}表达式，得：

$$(2+q_1)C_1+(2+q_2)C_2=0$$

$$(2q_1^n+q_1^{n-1})C_1+(2q_2^n+q_2^{n-1})C_2=0$$

以上两式的解的必要条件，是它们的C_1、C_2的系数行列式$\varDelta$应等于0，但上两式的

$$\varDelta=\begin{vmatrix}2+q_1 & 2+q_2\\ 2q_1^n+q_1^{n-1} & 2q_2^n+q_2^{n-1}\end{vmatrix}\neq 0$$

因此这一组方程只有一组零解，即$C_1=C_2=0$

$$\therefore \quad M_r=\frac{-WL}{8} \qquad r=0、1、2\cdots n$$

即不论支座是什么号，全梁任一支座上梁的力矩M_r都相同，等于$\frac{-WL}{8}$。

同理，全梁加匀布荷载w的解为：

$$M_r=\frac{-wL^2}{12} \qquad r=0、1、2\cdots n$$

（b）全梁加三角形荷载（图 1—16）

全梁任何两跨都有三力矩方程：

$$M_{r+1}+4M_r+M_{r-1}=-6\frac{w'L^2}{12n}r$$

这方程的全解已在 1—2—1（B）（b）证得为：

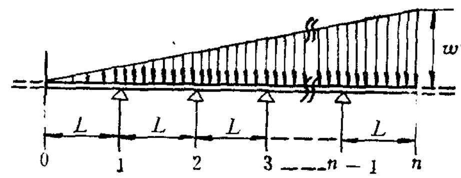


图 1—17

$$M_r=C_1q_1^r+C_2q_2^r-\frac{w'L^2}{12n}\cdot r$$

求待定常数C_1、C_2，由边界条件：①

$$\psi_0=0 \quad 即 \quad \frac{L}{3EI}\left(M_0+\frac{1}{2}M_1\right)+\frac{7}{360n}\cdot\frac{w'L^3}{EI}=0$$

$$\psi_n=0 \quad 即 \quad \frac{L}{3EI}\left(M_n+\frac{1}{2}M_{n-1}\right)+\frac{w'L^3}{24EI}-\frac{7}{360n}\cdot\frac{w'L^3}{EI}=0$$

代入M_0、M_1、M_n、M_{n-1}表达式，化简后，得：

$$(2+q_1)C_1+(2+q_2)C_2=\frac{-w'L^2}{30n}$$

$$(2q_1^n+q_1^{n-1})C_1+(2q_2^n+q_2^{n-1})C_2=\frac{w'L^2}{30n}$$

联解以上两式，得：

$$C_1=\frac{(2+q_1)+(2q_1+1)q_1^{n-1}}{(2+q_1)^2-(2q_1+1)^2q_1^{2(n-1)}}\left(\frac{-w'L^2}{30n}\right)$$

$$C_2=\frac{(2+q_2)+(2q_2+1)q_2^{n-1}}{(2+q_2)^2-(2q_2+1)^2q_2^{2(n-1)}}\left(-\frac{w'L^2}{30n}\right)$$

§1—3 公式表与例题

以上已推导得的几种基本荷载下刚性支座上多跨、等距、匀截连续梁的解，与未写出推导最终C_1、C_2值公式过程的其他荷载的解，为便于计算查用，把它们汇列成表 1—1。此外，为便于计算C_1、C_2值，将$n=1\sim20$的q_1^n、q_2^n值列于表 1—2。

在工程计算中，一部分题可以直接取用表 1—1 的C_1、C_2公式。有些问题可以

（1）分解梁为两个梁，各取用表 1—1 的公式，计算各自的M值，再叠加；

（2）用截断梁的方法，即先算一个梁的M_r和支座边的剪力$Q_{r\sim r+1}$，再把这两个数值的负值作为外荷载加到截断后的r支座上的梁上，再计算这个截断后大半个梁的各支座上的梁的力矩，将两个计算结果叠加，即得到解；

（3）用联解的方法，联解一个连续梁上有两种荷载的情况。

以下举例说明这些方法的运用。

【例题一】求刚性支座上无限长连续梁的连续两跨跨中点各加一个集中荷载W的支座梁力矩公式（图 1—18（a））

① 边界条件两式由来参见附录B序号29。