

● 紧扣新编教材
● 优化训练项目

● 对应高考题型
● 突出学科能力

P A I S H U

G

GAOZHONGXUEKENENGLIXUNLIANTICUI

高中学科能力训练

——九省市重点中学题库联网

题库

刘忠舜 编著

代数

上册

- 训练指要 纲领化
- 典题解析 标准化
- 基础训练 集约化
- 能力训练 综合化
- 综合检测 实战化

辽宁师范大学出版社

38.7351

L2S

21

省市重点中学题库联网

GAOZHONGXUEKENENGLIXUNLIANTICUI

编著 刘忠舜

高中学科能力训练



代 数

上 册

辽宁师范大学出版社

高中学科能力训练题萃
代 数 (上册)

刘志丹 编著

辽宁师范大学出版社出版

(大连市黄河路 850 号 邮编:116029 电话:0411-4206854)

沈阳新华印刷厂印刷

新华书店发行

开本: 787×1092 毫米 1/16 字数: 232 千 印张: 12½

印数: 20001—35000 册

1997 年 8 月第 1 版

1998 年 2 月第 3 次印刷

责任编辑: 张洋 刘文刚

责任校对: 晓 庄

封面设计: 冀贵收

版式设计: 章 铭

ISBN 7-81042-216-2/G·121

定价: 12.00 元

《高中学科能力训练题萃》编委会

主 编:刘忠舜 林淑芬

编 委:谷 丹	北京市第四中学	高级教师
宁潜济	天津市第一中学	特级教师
石寅初	南京市教学研究室	高级教师
康英茂	沈阳市第五中学	特级教师
栾开亮	哈尔滨师范大学附中	特级教师
罗瑞兰	东北师范大学附中	高级教师
高体柱	辽宁师范大学附中	高级教师
李启文	辽宁省本溪市高级中学	特级教师
毛汉华	湖北省黄石市教委教研室主任	特级教师
郭国庆	山东省青岛市普教教研室	特级教师
陈庆军	山东省临沂地区教学研究室主任	特级教师

参编者:(以姓氏笔划为序)

王巧娜	王冰洁	王郁文	齐永成	刘文杰	刘忠舜
杨子玉	李玉成	张向阳	李启文	宋利刚	吴忠文
郎伟岸	赵 伟	赵雅琴	郭海根	魏向阳	

前言

突出学科能力是高中新编教材和教学大纲的基本精神。为了更紧密地配合新编教材和教学大纲的改革和调整,突出学科能力的培养和训练,本书的编写不是按学年来划分,而是以学科来分类的。所谓学科能力是指根据学科特点,通过教学培养学生应具备的特有能力。这种能力不仅是认识、接受能力,更重要的是应用、探索、创造方面的能力。如何测定各有关学科的能力,经专家们近几年的研讨,现已在“考试说明”中有了明确的要求,但各学科教师怎样有针对性地组织教学,培养学生应有的学科能力,而学生在学习和复习过程中,怎样有意识地提高有关学科的能力,仍需一个较长的适应过程。为此,本书的编写不仅是必要的,也是适时的。这不仅是适应素质教育的需要,也是适应高考选拔的需要。从近几年的高考试题调整来看,突出学科特点,深入考查学科思想方法和学科语言,加大能力测试的力度仍将是今后高考命题的主导倾向。

根据上述编写主旨,本书在编写体例上突出基础训练和能力训练这两大块。在基础训练方面,凡教材中涉及到的知识点均全面练,重点知识突出练,具有集约化的特点和很强的针对性。在能力训练方面,根据教学大纲和《考试说明》关于学科能力的要求,特别是1997年国家考试中心提出的对学科能力的分类及要求,针对不同学科对学科能力的不同考查标准,进行全方位的科学训练。同时,为了最大限度地减轻学生负担,提高学习效率,本书所编选和设计的练习题不仅完全对应高考最新题型,而且典型性很强,具有较高的涵盖性、灵活性,有举一反三之效。为确保训练的科学性和系统性,本书在每单元训练之前,均有提纲挈领的指要性说明,而在训练题之前,又设有“典题解析”,即通过一些典型题的具体解析,向学生指出基本的解题思路和方法。本书的“期末测试题”则是期末模拟试卷,对学生进行实战性地综合检测。

参加本书编写的是九省市重点高中的特级教师和高级教师。这种集体编写方式,不仅汇集了各省市教学与科研的最新成果,而且在教辅读物的编写上开创了题库联网的合作方式。毫无疑问,这种方式对于提高编写质量提供了可靠的保证。但是,随着转型教育的深入,随着高考内容和形式的改革和调整,本书的内容也得随时予以调整和修订,我们期待着广大读者为我们多多提出改进意见。

刘忠舜 林淑香

一九九七年六月十八日

目 录

第一章 幂函数、指数函数和对数函数	1
一、集合	1
二、一元二次不等式	9
三、映射与函数	18
四、分数指数幂与根式	27
五、幂函数、函数的单调性与奇偶性	34
六、反函数与互为反函数的函数图象间的关系	42
七、指数函数	51
八、对数、对数的性质和运算法则	59
九、常用对数表及其应用	68
十、对数函数、换底公式、指数方程和对数方程	74
第一章综合训练	86
期末测试题(一)	89
第二章 三角函数	92
十一、 $0^\circ \sim 360^\circ$ 间的角的三角函数、角的概念的推广及弧度制	92
十二、任意角的三角函数与同角三角函数的基本关系式	99
十三、诱导公式、已知三角函数值求角	106
十四、三角函数的图象和性质	112
第二章综合训练	121
第三章 两角和与差的三角函数、解斜三角形	123
十五、两角和与差的三角函数	123
十六、二倍角与半角的正弦、余弦和正切	127
十七、三角函数的积化和差与和差化积	132
十八、解斜三角形	138
第三章综合训练	144
第四章 反三角函数和简单三角方程	146
十九、反三角函数	146
二十、简单三角方程	154
第四章综合训练	159
期末测试题(二)	162
参考答案与提示	165

第一章 幂函数、指数函数和对数函数

一、集合

【训练指要】

1. 深刻理解集合、元素、空集、子集、真子集、交集、并集、补集等概念.
2. 掌握集合的表示方法:列举法、描述法.
3. 严格区分并正确使用符号“ $\in$ 、 $\notin$ 、 $\subseteq$ 、 $\subset$ ”.
4. 理解并掌握集合间交、并、补的意义及其简单运算.
5. 通过对元素与集合之间的关系、集合与集合之间的关系、以及将实际问题转为集合问题来求解的训练,使学生形成关于集合的数学思想,这对培养学生的抽象思维能力和逻辑推理能力都具有重要的意义.

【典题解析】

例1 设集合 $A = \{10, y, \lg xy\}$, $B = \{2, |x|, y\}$, 若 $A = B$, 求 x, y .

解:

$$\begin{aligned} \because A &= B, \\ \therefore \begin{cases} \lg xy = 2 \\ |x| = 10 \end{cases} &\quad \text{即} \quad \begin{cases} xy = 100 \\ |x| = 10 \end{cases} \\ \text{解得} \begin{cases} x = 10 \\ y = 10 \end{cases} &\quad \text{或} \quad \begin{cases} x = -10 \\ y = -10 \end{cases} \\ \text{又} \because y &\neq 10, \therefore x = -10, y = -10 \end{aligned}$$

评析:构成集合的元素具有确定性、互异性、无序性,这是集合的基本性质.根据元素的确定性,可知 2、10、-10 都是集合 A 与集合 B 中的元素;根据元素的互异性可知 $y \neq 10$;根据元素的无序性,虽然元素在集合 A 与集合 B 中的顺序不同,但 $A = B$.

例2 已知集合 S 的所有元素都是自然数,并且集合 S 满足:若 $x \in S$, 则 $8-x \in S$, 试回答:(1)写出只有一个元素的集合 S ;

(2)写出所有只有两个元素的集合 S ;

(3)所有满足上述集合条件的集合 S 一共有多少个?

解:(1)只有一个元素的集合 S 是: $\{4\}$;

(2)只有两个元素的集合 S 是: $\{1, 7\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}$;

(3)满足上述集合条件的集合 S 共有 15 个.

评析:根据题设条件,若 $x \in S$, 则 $8-x \in S$, 所以集合 S 最多有 7 个元素,这时 S 为 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 只有一个元素的集合 S 是 $\{4\}$, 显然 4 与 $8-4$ 都是该集中的元素,只有两个元

素的集合 S 是 $\{1,7\}, \{2,6\}, \{3,5\}$; 只有三个元素的集合 S 为 $\{1,4,7\}, \{2,4,6\}, \{3,4,5\}$; 只有四个元素的集合 S 是 $\{1,2,6,7\}, \{1,3,5,7\}, \{2,3,5,6\}$; 有五个元素的集合 S 是 $\{1,2,4,6,7\}, \{1,3,4,5,7\}, \{2,3,4,5,6\}$; 有六个元素的集合 S 是 $\{1,2,3,5,6,7\}$; 有七个元素的集合 S 是 $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. 所以满足上述集合条件的集合 S 共有 15 个.

例 3 下列命题中, 正确的是

A. 若 $I=\mathbf{R}, A\subseteq I$, 则 $A\cup\bar{A}=\{\mathbf{R}\}$

B. 若 $A\cap B=B$, 则 $A\subseteq B$

C. 若 $A=\{1, \emptyset, \{2\}\}$, 则 $\{2\}\subset A$

D. 若 $A=\{1,2,3\}, B=\{x|x\subseteq A\}$, 则 $A\in B$

解: 选择 D. $\because$ 集合 B 中的元素 $x\subseteq A$, 即 x 是集合 A 的子集, A 的子集有: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$, 而 B 是由 A 的子集构成的集合, 集合 A 是集合 B 中的一个元素, $\therefore A\in B$.

评析: $\because \mathbf{R}$ 表示实数集合, $\{\mathbf{R}\}$ 没有意义, $\therefore$ 选 A 是错误的;

$\because A\cap B=B$, 若 $x\in B$, 则一定有 $x\in A$, $\therefore A\supseteq B$, 选 B 是错误的;

又 $\because \{2\}$ 虽然是一个集合, 但 $\{2\}$ 是集合 A 中的元素, $\therefore \{2\}\in A$, 选 C 是错误的.

例 4 试用集合 A, B 表示图 1-1 中的阴影部分.

解: 图中的阴影部分用集合来表示是

$$\overline{(A\cup B)}\cup(A\cap B)$$

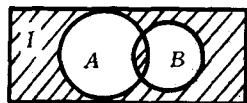


图 1-1

评析: 通过观察和分析, 用数学中集合的语言来表示图形的位置. 这种训练可以提高学生的逻辑思维能力和使用数学语言的表达能力.

例 5 设全集 $I=\{x|x \text{ 是不大于 } 20 \text{ 的质数}\}$, 且 $A\cap\bar{B}=\{3,5\}, \bar{A}\cap B=\{7,9\}, \bar{A}\cap\bar{B}=\{2,11\}$, 求集合 A, B .

解: 依题意, $I=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$

$\because \bar{A}\cap\bar{B}=\{2,11\}$, $\therefore$ 集合 A 与集合 B 中均不含 2 和 11;

又 $\because \bar{A}\cap B=\{7,9\}$, $\therefore$ 集合 A 不含有元素 7 和 19;

再 $\because A\cap\bar{B}=\{3,5\}$, $\therefore$ 集合 B 不含有元素 3 和 5.

因此, $A=\{3,5,13,17\}, B=\{7,13,17,19\}$

评析: 根据原集合的补集含的元素, 一定不是原集合中的元素, 在全集 I 中找出不属于集合 A 的元素, 剩下的就是集合 A 中的元素, 同理, 找出不属集合 B 的元素, 剩下的就是集合 B 中的元素. 已知补集、交集的运算结果, 求原集合可训练逆向思维能力.

例 6 已知 $A=\{x|x=2n+1, n\in\mathbf{Z}\}, B=\{x|x=3n-1, n\in\mathbf{Z}\}$, 求 $A\cap B$.

解: 设 $n_1\in\mathbf{Z}, 2n_1+1\in A, n_2\in\mathbf{Z}, 3n_2-1\in B$

当 $2n_1+1=3n_2-1$ 时, 有 $n_1=n_2+\frac{n_2-2}{2}$

$\because n_1\in\mathbf{Z}, n_2\in\mathbf{Z}, \therefore \frac{n_2-2}{2}\in\mathbf{Z}$

令 $\frac{n_2-2}{2}=k \quad (k\in\mathbf{Z}) \quad \therefore n_2=2k+2, 3n_2-1=6k+5$

$\therefore A\cap B=\{x|x=6k+5, k\in\mathbf{Z}\}$

评析: $\because A \cap B = \{x | x \in A, \text{且} x \in B\}$, $\therefore$ 令 $2n_1 + 1 = 3n_2 - 1$, 导出 $n_1 = n_2 + \frac{n_2 - 2}{2}$, 由于 n_1 与 n_2 都是自然数, 所以令 $\frac{n_2 - 2}{2} = k$, 求出 $n_2 = 2k + 2$, $n_1 = 3k + 2$, 从而 $2n_1 + 1 = 3n_2 - 1 = 6k + 5$, $\therefore A \cap B = \{x | x = 6k + 5, k \in \mathbb{Z}\}$, 把集合 A 与集合 B 中的相同元素用新的解析式表示出来.

例 7 设集合 $A = \{x | x = 5 - 4a + a^2, a \in \mathbb{N}\}$, $B = \{y | y = 4b^2 + 4b + 2, b \in \mathbb{N}\}$ 则下列关系式中正确的是().

- A. $A = B$ B. $A \supset B$ C. $A \subset B$ D. $A \cap B = \emptyset$

解: 选择 A 为正确选项.

评析: $\because$ 集合 $A = \{x | x = 5 - 4a + a^2, a \in \mathbb{N}\}$ 可化成 $A = \{x | x = (2 - a)^2 + 1, a \in \mathbb{N}\}$ 即 A 中元素 $x \geq 1$; 又 $\because$ 集合 $B = \{y | y = 4b^2 + 4b + 2, b \in \mathbb{N}\}$, 可化成 $B = \{y | y = (2b + 1)^2 + 1, b \in \mathbb{N}\}$, 即 B 中的元素 $y \geq 1$, $\therefore A = B$.

例 8 设集合 $M = \{a | a \leq \sqrt{10}\}$, $b = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, 那么

- A. $b \subset M$ B. $b \notin M$ C. $\{b\} \in M$ D. $\{b\} \subset M$

解: 选择 D 为正确选项.

评析: $\because 24 < 25 \therefore 2\sqrt{6} < 5, 5 + 2\sqrt{6} < 10$, 即 $\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$, $\therefore b \in M$, 选项 B 是错的; 又 $\because b$ 是集合 M 中的一个元素, $\therefore b \subset M$ 是错的, 再 $\because \{b\}$ 是含有一个元素的集合, $\therefore \{b\} \in M$ 是错误的. 因此, $\{b\}$ 是集合 M 的子集, $\{b\} \subset M$ 正确.

例 9 满足集合 $\{1, 2, 3\} \subset M \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的集合 M 的个数是()

- A. 8 B. 7 C. 6 D. 5

解: 选择 C 为正确选项.

评析: 根据题中条件可知, 集合 M 是集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的真子集, 而且 M 中的元素除 1, 2, 3 之外, 还至少含有 4, 5, 6 中的一个. 所以符合条件的 M 的集合有: $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 3, 6\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 5, 6\}$, $\{1, 2, 3, 4, 6\}$, 共有 6 个.

例 10 满足 $A \cup B = \{a, b\}$ 的集合 A, B 的组数是()

- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

解: 选择 C 为正确选项.

评析: 设 $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $A \cup B = \{a, b\}$, $\therefore A = \{a\}$, $B = \{b\}$ 就是符合条件的一组, 除此而外还有: $A = \{b\}$, $B = \{a\}$; $A = \emptyset$, $B = \{a, b\}$; $A = \{a, b\}$, $B = \emptyset$; $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$; $A = \{a, b\}$, $B = \{a\}$; $A = \{b\}$, $B = \{a, b\}$; $A = \{a, b\}$, $B = \{b\}$; $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b\}$. 所以一共有 9 组.

例 11 方程 $x^2 + 4ax - 4a + 3 = 0$, $x^2 + (a - 1)x + a^2 = 0$, $x^2 + 2ax - 2a = 0$, 至少有一个方程有实数解, 则实数 a 属于集合()

- A. $\{a | a \leq -\frac{3}{2} \text{ 或 } a \geq \frac{1}{2}\}$ B. $\{a | -1 \leq a \leq \frac{1}{3}\}$
C. $\{a | a \leq -2, \text{ 或 } a \geq 0\}$ D. $\{a | a \leq -\frac{3}{2} \text{ 或 } a \geq -1\}$

解: 选择 D 为正确选项.

评析: 若方程 $x^2 + 4ax - 4a + 3 = 0$ 有实数解, 那么 $16a^2 - 4(3 - 4a) \geq 0$, 整理得: $(2a + 3)(2a - 1) \geq 0$, 解得 $a > \frac{1}{2}$ 或 $a < -\frac{3}{2}$ (1)

若方程 $x^2 + (a - 1)x + a^2 = 0$ 有实数解, $(a - 1)^2 - 4a^2 \geq 0$, 解得 $-1 \leq a \leq \frac{1}{3}$ (2)

若方程 $x^2 + 2ax - 2a = 0$ 有实数解, $4a^2 + 8a \geq 0$, 解得 $a \geq 0$ 或 $a \leq -2$ (3)

三个方程至少有一个方程有实数解, 求(1), (2), (3)的并集, 可得集合 $\{a | a \leq -\frac{3}{2} \text{ 或 } a \geq -1\}$, 所以选择 D.

【基础训练】

一、选择题

1. 设 $a = \lg 0.8$, 则下列各式中正确的是()
A. $a \in \mathbf{Z}$ B. $a \in \mathbf{N}$ C. $\{a\} \subset \mathbf{N}$ D. $a \in \mathbf{R}$
2. 集合 $\{0\}$ 与 $\emptyset$ 的关系是()
A. $\{0\} \in \emptyset$ B. $\emptyset = \{0\}$ C. $\emptyset \in \{0\}$ D. $\emptyset \subset \{0\}$
3. 设 $A = \{x | x^2 + 5x + 6 = 0\}$, 则下列各式中正确的是()
A. $-2 \in A$ B. $\{-2, -3\} \subset A$
C. $\{-3\} \in A$ D. $A \subset \{-2, -3\}$
4. 下列给出的集合中, 有限集是()
A. $\{\text{周长等于 12 厘米的三角形}\}$ B. $\{\pi\}$
C. $\{x | x^2 + 5x + 6 < 0\}$ D. $\{\text{不大于 4 的偶数}\}$
5. 下列各式中, 正确的是()
A. $\{\mathbf{R}\} = \mathbf{R}$ B. $\{1, 2\} = \{(1, 2)\}$
C. $\emptyset = \{x | x + 1 = 1\}$ D. $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\} = \{(x, y) | \begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases} \alpha \in \mathbf{R}\}$
6. 集合 $\{a, b, c, d\}$ 的真子集的个数是()
A. 14 B. 15 C. 16 D. 17
7. 下列各式中, 不正确的是()
A. $\{\text{等腰直角三角形}\} \subset \{\text{等腰三角形}\}$
B. $\{\text{合数}\} \subset \{\text{偶数}\}$
C. $\{\text{除 2 以外的质数}\} \subset \{\text{奇数}\}$
D. $\{\text{奇数}\} \subset \mathbf{Z}$
8. 已知 $A = \{(x, y) | 2x + 3y = 1\}$, $B = \{(x, y) | 3x - 2y = 3\}$, 则 $A \cap B$ 是()
A. $\{(2, -1)\}$ B. $\{(3, 3)\}$
C. $\{\frac{11}{13}, -\frac{3}{13}\}$ D. $\{(\frac{11}{13}, -\frac{3}{13})\}$
9. 设集合 $A = \{(x, y) | y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, x, y \in \mathbf{R}\}$, $B = \{(x, y) | y = x + 1, x, y \in \mathbf{R}\}$, 则 A, B 的关系是()
A. $A \subset B$ B. $A \subseteq B$ C. $A \supset B$ D. $A \supseteq B$
10. 已知集合 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 6\}$, 那么集合 $\{2, 7, 8\}$ 是()
A. $A \cup B$ B. $A \cap B$ C. $\bar{A} \cup \bar{B}$ D. $\bar{A} \cap \bar{B}$
11. 设集合 $A = \{x | f(x) = 0\}$, $B = \{x | g(x) = 0\}$, 则方程组 $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$ 的根用集合 A, B 表

示的正确的表达式是()

- A. $A \cap B$ B. $A \cup B$ C. A D. B

12. 已知集合 $M = \{m | m \in \mathbf{N}, \text{且 } 8 - m \in \mathbf{N}\}$, 则 M 中含有两个元素的子集的个数为()

- A. 42 B. 21 C. 15 D. 13

13. 设 $A = \{a^2, a+1, -3\}$, $B = \{a-3, 2a-1, a^2+1\}$, 且 $A \cap B = -3$, 则 a 的值为()

- A. 2 B. 1 C. 0 D. -1

14. 若 $A = \{x | x^2 + px + q = 0\}$, $B = \{x | x^2 - px - 2q = 0\}$, 且 $A \cap B = \{-1\}$, 则 $A \cup B$ 等于()

- A. $\{-1, 2, 4\}$ B. $\{-1, -2, 4\}$
C. $\{-1, 2, -4\}$ D. $\{-1, -2, -4\}$

15. 设全集为 I , 集合 P , 及满足 $P \subset Q$, 则下面结论中错误的是()

- A. $P \cup Q = Q$ B. $\bar{P} \cup Q = I$
C. $P \cap \bar{Q} = \emptyset$ D. $\bar{P} \cap \bar{Q} = \bar{P}$

16. 集合 $A = \{x | x \neq 1, x \in \mathbf{R}\} \cup \{y | y \neq 2, y \in \mathbf{R}\}$, 集合 $B = \{x | x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)\}$, 则集合 A 和 B 之间的关系是()

- A. $A = B$ B. $B \subset A$ C. $A \subset B$ D. $B \subseteq A$

17. 条件甲: $A \supseteq B \supseteq C$, 条件乙: $A \cap B \cap C = C$, 则甲是乙的()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

18. 设全集 $I = \{0, 1, 2, 3\}$, $M = \{1, 2, 3\}$, $N = \{0, 3\}$, $P = \{0\}$, 则()

- A. $P = M \cap N$ B. $P = M \cup N$ C. $P \subset N$ D. $P = \bar{M} \cap N$

19. 集合 $A = \{x | x \neq 1, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{-1\}$ 则 $A \cap \bar{B}$ 等于()

- A. $\emptyset$ B. $\{1, -1\}$
C. $(-1, 1)$ D. $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

20. 满足 $\{a, b\} \subseteq A \subseteq \{a, b, c, d\}$ 的集合 A 的个数是()

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

二、填空题

1. 对于集合 A, B, C , 如果 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 那么集合 A 与集合 C 之间的关系是_____.

2. 设 $A = \{x | x \geq -3\}$, $B = \{x | x < 5\}$, $C = \mathbf{Z}, I = \mathbf{R}$, 则

(1) $A \cap B =$ _____, (2) $A \cup B =$ _____,

(3) $\bar{A} \cap \bar{B} =$ _____, (4) $\bar{A} \cup \bar{B} =$ _____,

(5) $(A \cap B) \cap C =$ _____.

3. 设 $I = \{\text{三角形}\}$, $A = \{\text{钝角三角形}\}$, 则 $\bar{A} =$ _____.

4. 如果 $I = \{a, b, c, d, e\}$, $M = \{a, c, d\}$, $N = \{b, d, e\}$, 那么 $\bar{M} \cap \bar{N} =$ _____.

5. 已知 $I = \{x | x < 10, x \in \mathbf{N}\}$, $A \cap B = \{2, 5\}$, $\bar{B} \cap A = \{1, 7\}$, $\bar{A} \cap B = \{3, 8, 9\}$, 则 $A =$ _____, $B =$ _____.

6. 若 $A = \{0, 1\}$, $B = \{x | x \subseteq A\}$, 则 A 与 B 的关系为_____.

7. 设 $I = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x^2 + px + 12 = 0, x \in \mathbf{N}\}$, 集合 $B = \{x | x^2 - 5x + q = 0, x \in \mathbf{N}\}$, 而且

$\overline{A} \cap B = \{2\}, A \cap \overline{B} = \{4\}, p, q \in \mathbf{Z}$, 则 $p+q$ 的值等于_____.

8. 已知集合 $A = \{y | y = 2x + 1, x \in \mathbf{R}^+\}$, 集合 $B = \{y | y = -x^2 + 9, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

9. 已知集合 $A = \{5, 7, 8, 10\}, B = \{3, 5, 6, 8\}$, 全集 $I = A \cup B$. 集合 $\overline{A \cap B} =$ _____.

10. 已知集合 $M = \{x | x - 2 < 2, x \in \mathbf{R}\}, N = \{x | \frac{1}{x-3} \leq 0, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

三、解答题

1. 设全集 $I = \mathbf{R}, A = \{x | x = -t^2, t \in \mathbf{R}\}, B = \{x | x = |t| + 5, t \in \mathbf{R}\}$, 求 $\overline{A \cup B}$.

2. 设 $I = \{x | x^2 \leq 50, x \in \mathbf{N}\}, \overline{M} \cap L = \{1, 6\}, M \cap \overline{L} = \{2, 3\}, \overline{M} \cap \overline{L} = \{5\}$, 求 M 和 L .

3. 已知 $M = \{a, ab, \lg ab\}, N = \{0, |a|, b\}$, 且 $M = N$, 求 a, b 的值.

4. 集合 $A = \{x | -1 \leq x < 2\}$, 集合 $B = \{x | x \leq a\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是多少.

5. 已知两个不同的集合 $A = \{2, 3, a^2 - a + 3\}, B = \{2, 5, a^3 - a^2 - 4a + 7\}, A \cap B = \{2, 3\}$, 求: (1) a 及集合 A 和 B .

(2) 满足 $A \cap B \subset C \subset A \cup B$ 的集合 C 的子集的个数.

【能力训练】

一、选择题

1. 下列各项中, A 与 B 表示同一集合的是()

- A. $A=\emptyset, B=\{\emptyset\}$ B. $A=\{0, -1\}, B=\{-1, 0\}$
 C. $A=\{(0, -1)\}, B=\{0, -1\}$ D. $A=\emptyset, B=\{0\}$
2. 下列各式中, 正确的是()
 A. $A \cap B \supset A$ B. $A \cap B \subset B \cap A$
 C. $B \supset A \cap B$ D. $\emptyset \subset A \cap B$
3. 若集合 $A=\{y|y=3-x^2\}, B=\{y|y=2x^2-3\}$, 则 $A \cap B$ 是()
 A. $\{1\}$ B. $\{(-\sqrt{2}, 1), (\sqrt{2}, 1)\}$
 C. $(-3, 3)$ D. $[-3, 3]$
4. 设 S, T 是两个非零集合, 且 $S \subset T$, 全集为 I , 如图 1-2 所示, 则下列各项中表示 $\emptyset$ 的是()
 A. $\bar{S} \cap T$ B. $\bar{T} \cap S$
 C. $\bar{S} \cap \bar{T}$ D. $\bar{S} \cup \bar{T}$
5. 已知集合 $P=\{x|x^2=x, x \in \mathbf{R}\}$, 则满足条件 $P \cup S = P$ 的所有集合 S 的个数()
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
6. 已知集合 $M=\{m|m \in \mathbf{N} \text{ 且 } 6-m \in \mathbf{N}\}$, 则集合 M 的真子集的个数是()
 A. 5 B. 30 C. 31 D. 32
7. 若全集 $I=\mathbf{R}, A=\{x|x=-\lg(a+\frac{1}{a}), a>0\}, B=\{x|\sqrt{x+1} \leq 0\}$, 则 $A \cap B$ 是()
 A. $\{x|x \leq -1\}$ B. $\{x|x < -1\}$
 C. $\{-1\}$ D. $\emptyset$
8. 非零实数 a, b, c 构成数 $\frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b} + \frac{c}{|c|} + \frac{|abc|}{abc}$ 的集合 A 的子集共有()
 A. 4 个 B. 5 个 C. 7 个 D. 8 个
9. 若 $\emptyset \subset A \subset B \subset I$, 则下列集合中, 空集是()
 A. $A \cap B$ B. $A \cap \bar{B}$ C. $\bar{A} \cap B$ D. $\bar{A} \cap \bar{B}$
10. 已知 $A=\{0, 1, 2, 3\}, B=\{x|x=\frac{a}{b}, a, b \in A\}$, 那么 B 的子集的个数是()
 A. 18 B. 128 C. 256 D. 512
11. 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 且 $A \not\subset B$, 则 $a \in A$ 是 $a \in A \cap B$ 的()
 A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件
 C. 充分且必要条件 D. 既不充分也不必要条件
12. 非空集合 $S \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 且 S 还满足条件: 若 $a \in S$, 则 $(6-a) \in S$, 符合上述要求的集合个数是()
 A. 4 B. 5 C. 7 D. 8
13. 用阴影区域表示集合 $A \cap \bar{B}$ 的图 1-3 中是()
14. 若 $A=\{1, 3, x\}, B=\{x^2, 1\}$, 且 $A \cup B = \{1, 3, x\}$, 则满足上述条件的集合 A 的个数是()
 A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
15. 设集合 $E=\{2n|n \in \mathbf{N}\}, F=\{4n|n \in \mathbf{N}\}$, 全集 I 为自然数 $\mathbf{N}$, 那么集合 $\mathbf{N}$ 可以表示为()

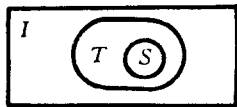
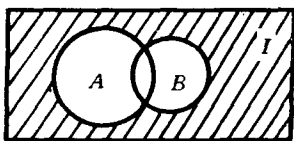
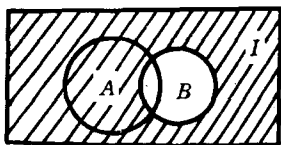


图 1-2

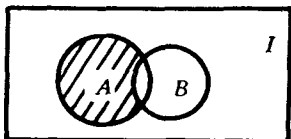
A.



B.



C.



D.

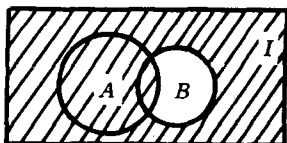


图 1-3

A. $E \cap F$ B. $\bar{E} \cap F$ C. $E \cap \bar{F}$ D. $\bar{E} \cap \bar{F}$

16. 满足条件 $\{2, 3\} \cup A = \{2, 3, 5, 7\}$ 的所有集合 A 的个数是()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

17. 设 A, B 是两个非空集合, 且 $a \in A, a \notin B$, 则下列结论中一定正确的是()

A. $a \in A \cap B$ B. $a \in \bar{A} \cup \bar{B}$ C. $A \cap B \subset A$ D. $A \supset B$

18. 设 S, T 是两个非空集合, 且 $S \not\subset T, T \not\subset S$, 令 $X = S \cap T$, 那么 $S \cup X$ 等于()

A. X B. T C. $\emptyset$ D. S

19. 设全集为 $\mathbf{R}$, $f(x) = x, g(x) = x^2 - 1, M = \{x | f(x) \neq 0\}, N = \{x | g(x) \neq 0\}$, 那么集合 $\{f(x) \cdot g(x) = 0\}$ 等于()

A. $\bar{M} \cup \bar{N}$ B. $\bar{M} \cap \bar{N}$ C. $\bar{M} \cap N$ D. $M \cup \bar{N}$

20. 对任意两个集合 A 和 B , 下列命题中正确的是()

A. 若 $A \cap B = \emptyset$, 则 $(A \cup B) \neq (A \cap B)$

B. 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则 $(A \cap B) \supset (A \cup B)$

C. 若 $A \subset (A \cup B)$, 则 $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

D. 若 $A \cap B \subset A$, 则 $A \subset (A \cup B)$

二、填空题

1. 设全集 $I = \mathbf{Z}, A = \{x | \frac{x}{2} \in \mathbf{Z}\}, B = \{x | \frac{x}{3} \in \mathbf{Z}\}$, 则 $A \cap \bar{B} =$ _____.

2. 设 $A = \{1, 3, 5\}, B = \{1, 2\}, \bar{A} = \{2, 4, 6\}$, 则 $\bar{B} =$ _____, $\bar{A} \cap \bar{B} =$ _____.

3. 设集合 $A = \{a, b, c\}, B = \{x | x \subseteq A\}$, 试用列举法表示集合 $B =$ _____.

4. 集合 $A = \{-2, 3a-1, a^2\}, B = \{a-5, 1-a, 9\}$, 又 $A \cap B = \{9\}$, 则 $a =$ _____.

5. $A = \{x | x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}, B = \{x | \log_2(x^2 - 5x + 8) = 1\}, C = \{x^2 + 2x - 8 = 0\}$, 若 $A \cap B \supset \emptyset, A \cap C = \emptyset$, 则 $a =$ _____.

6. 已知集合 $A = \{a | a = 5x + 3, x \in \mathbf{N}\}, B = \{b | b = 7y + 2, y \in \mathbf{N}\}$, 则 $A \cap B$ 中最小的元素是_____.

7. 设 $I = \{\text{不大于 9 的非负整数}\}, A = \{2, 5, 7\}, B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, 则 $\bar{A} \cap \bar{B} =$ _____.

8. 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 = 0\}$, 则满足条件: $A \cup B = A$ 的所有集合 B 是_____.

9. 若全集有 17 个元素, 集合 A 有 14 个元素, 集合 B 有 7 个元素, 则 $A \cap B$ 的元素个数的最小值是_____, $A \cup B$ 的元素个数的最小值是_____.

10. 集合 $\{x | x \in \mathbf{N}, x < 7\}$ 的含元素 1, 但不含元素 5 的真子集的个数为_____.

三、解答题

1. 已知方程 $x^2 - px + 15 = 0$, 与 $x^2 - (p+5)x + q + 24 = 0$ 的解集分别是 M 和 S , 且 $M \cap S = \{3\}$, 求 $\frac{p}{q}$ 的值.

2. 已知集合 $A = \{-4, 2a-1, a^2\}$, $B = \{a-5, 1-a, 9\}$, 又 $A \cap B = \{9\}$, 求实数 a , 并求 $A \cup B$.

3. 已知集合 $A = \{x | x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $C = \{x | x^2 + 2x = 8\}$ 且 $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, 求 a 的值.

4. A, B 是以实数为元素的集合, $A = \{1, 2, a^2 - a + 3\}$, $B = \{-2, a + 3, 3a - 2, a^2 - 2a + 2\}$, 且 $A \cap B = \{2, 5\}$, 求 A, B 和 $A \cup B$.

二、一元二次不等式

【训练指要】

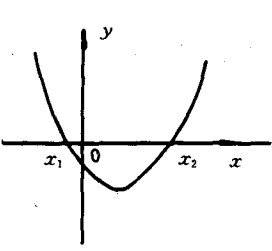
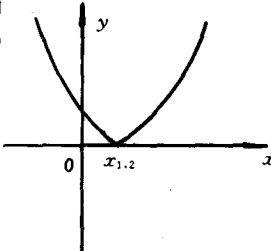
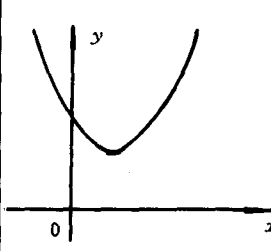
在学习了关于不等式的三条基本性质的基础上, 通过本章训练掌握含绝对值不等式的解法和一元二次不等式的解法.

1. 含有绝对值的不等式的解法, 其关键是去掉绝对值符号, 去掉绝对值的方法有三个, 第一, 设 $a \in \mathbf{R}$, 则 $|a|^2 = a^2$; 第二, 设 $a > 0$, 则 $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$; $a < 0$, 则 $|x| < a$, 无解; 设 $a > 0$, $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ 或 $x < -a$; $a < 0$, x 为任意实数; 第三, 当 $a \geq 0$ 时, $|a| = a$, 当 $a < 0$ 时, $|a| = -a$.

2. 一元二次不等式最后归结为以下两种基本类型:

(1) $ax^2 + bx + c > 0$, ($a > 0$); (2) $ax^2 + bx + c < 0$, ($a > 0$).

利用一元二次方程与一元二次函数的图象求解(如下表)

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$) 的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) 的根	有两个相异实根 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ($x_1<x_2$)	有两个相等实根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	没有实数根
一元二次不等式	$ax^2+bx+c>0$ ($a>0$)	$\{x x<x_1\}\cup\{x x>x_2\}$	所有不等于 $-\frac{b}{2a}$ 的实数
	$ax^2+bx+c<0$ ($a>0$)	$\{x x_1<x<x_2\}$	$\emptyset$

3. 在解决含有绝对值的不等式与一元二次不等式时,要注意数形结合,充分利用它们的解集在数轴上表示的直观性.

【典题解析】

例1 解不等式 $|x+2|+|x-3|\leq 12$

解: 当 $x\geq 3$ 时, 去掉绝对值符号, $x+2+x-3\leq 12$, 即

$$x\leq \frac{13}{2}$$

$$\therefore 3\leq x\leq \frac{13}{2} \quad \text{如图 1-4 所示}$$

当 $-2\leq x<3$ 时, 去掉绝对值符号, $x+2+3-x\leq 12$, 即 $5\leq 12$, x 为任意实数.

$$\therefore -2\leq x<3$$

当 $x<-2$ 时, 去掉绝对值符号, $-x-2+3-x\leq 12$, 即 $x\geq -\frac{11}{2}$

$$\therefore -\frac{11}{2}\leq x<-2, \text{如图 1-5 所示}$$

$$\therefore \text{原不等式的解为 } -\frac{11}{2}\leq x\leq \frac{13}{2}$$

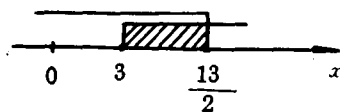


图 1-4

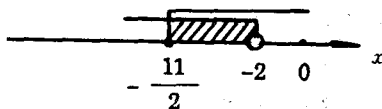


图 1-5

评析: 解绝对值不等式, 可利用数轴标根法确定 x 的取值范围, 分区间去掉绝对值符号, 化成几个不等式组求解, 最后再求出几个不等式组解集的并集为原不等式的解集. 在解题过程要注意理解转化的数学思想和分组讨论的数学方法.

例2 若不等式 $|x-4|+|3-x|<a$ 的解集是空集, 求 a 的取值范围.

解:若 $a \leq 0$, 则 $|x-4|+|3-x| < a$ 的解集一定是空集.

若 $a > 0$, 先求不等式 $|x-4|+|3-x| < a$ 有解时, a 的取值范围.

当 $x \geq 4$, $x-4+x-3 < a$, 即 $2x-7 < a$

$$\text{解不等式组 } \begin{cases} x \geq 4 \\ x < \frac{a+7}{2} \end{cases} \text{ 得 } 4 \leq x < \frac{a+7}{2}, \therefore a > 1$$

当 $3 < x < 4$, $4-x+x-3 < a$, $\therefore a > 1$

当 $x \leq 3$, $4-x+3-x < a$, 即 $-2x+7 < a$

$$\text{解不等式组 } \begin{cases} x \leq 3 \\ x > \frac{7-a}{2} \end{cases} \text{ 得 } \frac{7-a}{2} < x \leq 3, \therefore a > 1$$

当 $a > 1$ 时, 原不等式有解, 所以当 $0 < a \leq 1$ 时, 不等式的解集为空集,

$\therefore |x-4|+|3-x| < a$ 的解集是空集, 则 $a \leq 1$.

评析: 不等式中含有文字系数, 若对文字取值的不同情况分别进行讨论, 集合 $I = \{a | a > 0\}$, 可视为全集, $A = \{a | a > 1\}$ 是不等式有解时, a 的取值范围, 若确定不等式的解集为空集, a 的取值范围就是 $\bar{A} = \{a | 0 < a \leq 1\}$, 再结合 $a \leq 0$ 的情况, 得出使不等式的解为空集的 a 的所有值.

例 3 解不等式 $x^5 - 2x^4 - x + 2 > 0$

解: $x^5 - 2x^4 - x + 2 = x^4(x-2) - (x-2) = (x-2)(x^4+1)(x+1)(x-1)$

$\because x^2+1 > 0 \therefore$ 原不等式可化成 $(x-2)(x+1)(x-1) > 0$

解得 $-1 < x < 2$ 或 $x > 2$

评析: 对特殊一元高次不等式的求解, 先要整理成型如 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$), 然后进行因式分解, 最后可用数轴标根法求解.

例 4 已知方程 $x^2 + 2(m-1)x + 3m^2 - 11 = 0$ 有正的实数根, 试确定 m 的取值范围.

解: 设方程正的实数根分别为 x_1, x_2 , 依题意可列不等式组:

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} m^2 + m - 6 \leq 0 \\ -2(m-1) > 0 \\ 3m^2 - 11 > 0 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} -3 \leq m \leq 2 \\ m < 1 \\ m < -\sqrt{\frac{11}{3}} \text{ 或 } m > \sqrt{\frac{11}{3}} \end{cases}$$

$\therefore$ 当 $-3 \leq m < -\frac{\sqrt{33}}{3}$ 的范围内, 方程 $x^2 - 2(m-1)x + 3m^2 - 11 = 0$ 有正实数根.

评析: 方程有实数根, 则判别式 $\Delta \geq 0$; 方程有正根, 根据韦达定理, 两根之和大于零, 两根之积大于零, 列出关于 m 的不等式组, 以便求解.

例 5 已知 $y_1 = 2x+1, y_2 = -3x+6$

(1) 求使 $y_1 > y_2$ 的 x 的取值范围.

(2) 设抛物线 $y = x^2 - mx + 4$ 的顶点纵坐标为 y_0, y_1, y_2 中的 x 取 x_0 , 使 $y_1 > y_0 > y_2$, 求 m 的取值范围.

解: (1) $\because 2x+1 > -3x+6, \therefore x > 1$

(2) $y = x^2 - mx + 4$, 配方得

$$y = (x - \frac{m}{2})^2 + (4 - \frac{m^2}{4})$$