对外经济贸易大学

远程教育系列教材

线性代数

Linear Algebra

李博纳 苏燕玲 编著

清华大学出版社

对外经济贸易大学

远程教育系列教材

线性代数

Linear Algebra

李博纳 苏燕玲 编著

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书是专为以自学为主接受本科高等教育的学生编写的教科书。主要内容有行列式、n维向量、线性方程组、矩阵、向量空间、矩阵的特征值与特征向量、二次型.

本书可作为远程网络学习、高等教育自学考试、学历教育和成人教育等教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/李博纳,苏燕玲编著. —北京: 清华大学出版社,2006.12

(对外经济贸易大学远程教育系列教材)

ISBN 7-302-14208-4

Ⅰ. 线…　Ⅱ. ①李…　②苏…　Ⅲ. 线性代数—高等教育: 远程教育—教材　Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 141354 号

责任编辑: 马庆洲
责任校对: 王凤芝
责任印制: 杜　波
出版发行: 清华大学出版社　　**地　　址**: 北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**: 100084
e-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机: 010-62770175　　**邮购热线**: 010-62786544
投稿咨询: 010-62772015　　**客户服务**: 010-62776969
印 装 者: 北京市清华园胶印厂
经　　销: 全国新华书店
开　　本: 185×230　**印　张**: 14.75　**插页**: 1　**字　数**: 305 千字
版　　次: 2006 年 12 月第 1 版　　**印　　次**: 2006 年 12 月第1 次印刷
书　　号: ISBN 7-302-14208-4/O·588
印　　数: 1～4000
定　　价: 25.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话: (010)62770177 转 3103　　产品编号: 024461-01

对外经济贸易大学远程教育系列教材

编审委员会

P

REFACE

总　序

中国远程教育的发展经历了三代：第一代是函授教育；第二代是广播电视教育；20世纪90年代，随着现代信息技术的发展，以网络为基础的第三代现代远程教育应运而生。到目前为止，教育部批准开展现代远程教育试点的高校共67所。对外经济贸易大学远程教育学院（简称“贸大远程”）是在中国加入WTO后的第一年，2002年3月正式成立的。

现代远程教育作为新生事物，对传统的教学模式、学习习惯、获取新知的途径等产生了巨大的冲击。如何在网络时代打造学习型社会，构筑终身教育体系，是当今时代的重大课题，现代远程教育试点高校为此进行了许多卓有成效的探索。在网络教育的具体实践中，贸大远程始终坚持依托学校的整体优势和特色，坚持知识的内在逻辑性与职业、行业的市场需求的统一，坚持开展面向广大在职人员的现代远程教育，逐步形成了独具我校特色的“7＋1”学习模式（即网络课堂、网上答疑、课程光盘、教材资料、适量面授、网上串讲、成绩检测，以及第二课堂活动），为学生个性化学习提供了广阔的空间。自2003年起，贸大远程连续3年蝉联新浪网、择校网、搜狐网和《中国电脑教育报》联合评出的全国“十佳网络教育学院（机构）”称号。值得一提的是，“国际贸易实务”课程荣获国家级奖项，“商务英语”等7门课程荣获北京市优秀教材一等奖和精品课程称号，另有10余门课程在全国性的远程教育课程展示会上获得大奖。

几年来丰富的现代远程教育实践和教学经验积累，为我们出版成龙配套的贸大远程系列教材奠定了坚实的基础。目前，普通高等学校的现有教材并不完全适合远程教学，市面上真正用于现代远程教育的成规模的网络教材还不多见，与网络课件相配套的系列教材更是寥寥

无几，因此为接受远程教育的广大莘莘学子专门设计符合他们需要的教材已成为现代远程教育发展的迫切需求。

基于以上原因，贸大远程按照学校一级教学管理体制，本着为社会、为学生服务的宗旨，致力于教学质量的保证和提高，特聘请了国际经济与贸易学院、金融学院、国际商学院、英语学院、公共管理学院等学院的优秀教师，以目前开设的两个学历层次的7个专业为依据，以现有的导学课件为基础，编写了这套远程教育系列教材。本套教材共分为外语、经济贸易、工商管理、法律、金融与会计、行政管理、综合7大系列，全面覆盖两个学历层次7个专业的上百门课程。为了打造贸大远程优质教材品牌，我们与清华大学出版社和对外经济贸易大学出版社达成协议，计划3年之内全部出齐。

本套教材在策划编写过程中，严格遵循现代远程教育人才培养的模式与教学客观规律，充分考虑到远程学生在职和成人继续教育业余学习的实际情况，专门为远程学生量身定制而成，具有较强的针对性、实用性和可操作性。本套教材的编写具有如下特点。

一、在教材体系和章节的安排上，严格遵循循序渐进、由浅入深的教学规律；在对内容深度的把握上，考虑远程教育教学对象的培养要求和接受基础，其专业深度比本科有所降低，基础面相对拓宽，不是盲目将内容加深、加多，而是做到深浅适中、难易适度。

二、在每章开篇给出明确的学习目标与重点难点提示，涵盖了教学大纲的重点或主要内容。相对于传统的学校教育，远程教育更倚重于学生的自学能力和自控能力。明确的教学目标有利于学生带着任务有目的地学习。同时，教材中充分考虑到了学生学习时可能遇到的问题，给他们以提示和建议。由于本套教材的作者都是经过挑选的具有长期教学经验的优秀教师，且大多数作者都来自远程教学的第一线，是远程网络课件的主讲老师，能够为学生提供比较丰富的、切中要害的问题解答，从而使远程学生在学习时少走弯路。

三、在章后和书后分别设置“同步测练与解析”和“综合测练与解析”栏目，涵盖了本章及本书的重要知识点，并给出了详尽的参考答案，对难题还进行分析点评，列出解题思路与要点，更加方便学生自学。测验是检验教学目标是否达到的有效手段。由于远程学生是在虚拟的网络课堂上课，远离教师，处于相对独立的学习环境：教师不能通过直接交流了解学生对学习内容的掌握情况；学生也由于与教师、同学之间的分离，无法判断自己的学习状况。针对这种情况，我们在教材中设置了大量自测自练题目。旨在通过这种自测自练方式，积极引导学生及时消化和吸收所学知识，不断加深对教材内容的理解，阶段性检查学习效果，全面复习和掌握所学知识，综合评判自己对知识的掌握程度，巩固最终学习成果。

四、考虑到有些专业课程具有较强的社会实践性，在教材的编写上也力争做到理论联系实际，注重案例的引入。尽可能安排一个或多个案例，并进行详细的分析讲解。旨在通过案例教学，对课程重点难点进行深化分析和实操训练，加强学生对知识点的理解和记忆，强化学生分析问题、解决问题的能力以及动手操作能力。

在本套教材的编写与出版过程中，我们得到了众多业界专家学者的真诚理解与支持，得

到了清华大学出版社与对外经济贸易大学出版社的通力合作,在此向他们一并致以衷心的感谢。在前所未有的战略机遇期和“十一五”期间,相信本套教材的出版,必将是全国远程教育界一件很有意义的事情。衷心祝愿现代远程教育在建立学习型社会、构筑终身教育体系的进程中,在推动中国教育事业向现代化大教育形态的历史转变中,迈出更大更坚实的脚步。

对外经济贸易大学远程教育学院院长

谢毅斌

2006 年 7 月于北京

F

FOREWORD

前　言

对"代数"读者都不陌生，通俗地说代数就是用字母代替数，定义运算规则而建立起来的一套理论．数学的发展源于实践的需要，实践中很多数是以数组出现的，由字母代替一个数，引申到代替一个数组或多个数组，定义运算规则并建立的一套理论，即"线性代数"研究的内容．

"线性代数"是经过几百年的探讨建立起来的一门学科．例如，17世纪莱布尼茨(Leibniz)即开始研究用消元法解线性方程组．18世纪范德蒙德(Vandenmonde)在前人n阶行列式定义的基础上，提出行列式展开的理论，后经拉普拉斯(Laplace)证明．19世纪凯莱(Cayley)提出矩阵概念，并建立了矩阵运算的法则．"线性代数"知识的古典，正说明了它是基础，也是将其列为基础课的原因．在经济管理中"线性代数"知识得到广泛应用．

为了方便学习，本书按小节配备了练习题．难度较大的内容与题目前标有符号(B)，读者可根据要求选作．

本书可作为有中学数学基础的学生作为学习的教材．

书中内容由李博纳编著，题目由苏燕玲编著．由于水平、能力所限，书中错误与不足之处，恳请读者批评指正．

编　者

2006年10月

CONTENTS

目　录

CONTENTS

第一章

CHAPTER ONE

行　列　式

学习目标

1. 理解 n 阶行列式定义及其性质.
2. 熟练掌握二阶、三阶行列式的计算.
3. 会用行列式的定义、性质和有关定理计算较简单的 n 阶行列式.
4. 了解克拉默法则.

重点难点提示

准确运用行列式性质计算行列式是这一章的重点. n 阶行列式的计算由于抽象,是学习中困难较大之处,可以通过多写出几行几列增加感性认识,找出规律.

行列式的研究起源于解线性方程组.顾名思义,行列式是一个式子,它代表着一种运算.这一章来探讨 n 阶行列式的计算及其性质,进而介绍求 n 个未知数 n 个方程线性方程组解的法则——克拉默法则.

1.1 n 阶行列式

1.1.1 二阶、三阶行列式

1. 二阶行列式

看二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & ② \end{cases}$$

此处用双角码记未知数的系数,如 a_{11} 为第一个方程第一个未知数 x_1 的系数.可以使系数符号的意义更明了.此方程组经过消元:第①个方程两边同乘 a_{22},第②个方程两边同乘 a_{12},得到同解方程组

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}, & ③ \\ a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_2a_{12}. & ④ \end{cases}$$

用方程③减方程④,消去 x_2 得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

用同样的方法可以得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,有

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

分析两个解:分母相同,由未知数 x_1, x_2 在两个方程中的系数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 计算得来.为了便于记忆,将它们按在方程组的位置排好加上两条竖道,记作 D 并令

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1}$$

再记 $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$,则

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

D_1 是将 D 中 x_1 的系数 a_{11}, a_{21} 换为方程组等号右边的常数项 b_1, b_2 得到. D_2 是将 D 中 x_2 的系数 a_{12}, a_{22} 换为方程组等号右边的常数项 b_1, b_2 得到. 于是当 $D \neq 0$ 时,方程组的解可以表示成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

D、D_1、D_2 都称为**二阶行列式**,它们由 2^2 个数,排成两行两列构成,其中的数称为**元素**.

2. 三阶行列式

同样对于一个三元线性方程组

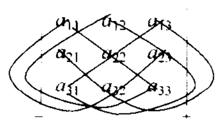
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

得到四个**三阶行列式**,且规定计算法则如下



例如, $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

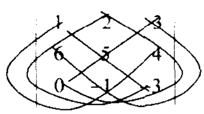
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{2}$$

当 $D \neq 0$ 时,同样得方程组的解(推导略)

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

三阶行列式这一计算规则用起来很方便,称为对角线法则,应该掌握. 例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$



$$= 1 \times 5 \times (-3) + 2 \times 4 \times 0 + 3 \times 6 \times (-1)$$

$$-1\times4\times(-1)-2\times6\times(-3)-3\times5\times0=7.$$

例 1.1 解三元线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+\quad\quad x_3=1,\\ x_1-2x_2-x_3=2,\\ -x_1+3x_2+2x_3=3.\end{cases}$$

解析 由于未知数的系数构成三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&0&1\\1&-2&-1\\-1&3&2\end{vmatrix}=-1\neq0.$$

再用等号右边的常数项分别换三个未知数的系数得到三个三阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&-2&-1\\3&3&2\end{vmatrix}=11,\quad D_2=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\-1&3&2\end{vmatrix}=18.$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&0&1\\1&-2&2\\-1&3&3\end{vmatrix}=-23.$$

则方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=-11, x_2=\dfrac{D_2}{D}=-18, x_3=\dfrac{D_3}{D}=23.$

当然希望用行列式表达线性方程组解的这一规律具有普遍性,即对于 n 个未知数 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}$$

令

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\b_2&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_n&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&b_2&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&b_n&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},\quad\cdots,\quad D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&b_2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&b_n\end{vmatrix}.$$

当 $D\neq0$ 时,得方程组的解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots\quad ,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

问题是像三阶行列式那样，用对角线法则转着计算，不能使上面解的表达式成立. 于是提出问题：如何定义 n 阶行列式的计算，才能使线性方程组的解 $x_j=\dfrac{D_j}{D}$ 具有普遍意义.

1.1.2　n 阶行列式

先分析三阶行列式的结果，由式(2)以第一行的元素为标准，提取公因式重新整理，得到

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

第一项中 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 恰为行列式 D 划掉 a_{11} 所在的第 1 行、第 1 列，余下元素按原来顺序构成的二阶行列式. 第二项中 $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ 恰为行列式 D 划掉 a_{12} 所在的第 1 行、第 2 列，余下元素按原来顺序构成的二阶行列式. 第三项中二阶行列式的构成同理.

分析各项符号的规律，恰有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

能够证明按照这一规律给出的 n 阶行列式的计算法则，可以使得用行列式表示方程组的解具有了普遍性.

1. 定义与术语

称由 n^2 个数构成的式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为 n **阶行列式**(determinants of order n)，它有 n 行、n 列，$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为行列式的**元素**. n 阶行列式也记作 $D=|a_{ij}|_n$.

定义 1.1　n 阶行列式中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行，第 j 列，余下的元素按原来顺序构