近世代数基础

问题探析

JINSHI DAISHU JICHU WENTI TANXI

齐晓梅　乔凤珠　编著

教育科学出版社

近世代数基础问题探析

齐晓梅　乔凤珠　编著

教育科学出版社
·北　京·

责任编辑　杨晓琳
版式设计　尹明好
责任校对　贾静芳
责任印制　曲凤玲

图书在版编目(CIP)数据

近世代数基础问题探析 / 齐晓梅，乔凤珠编著. —北京：教育科学出版社，2006.9
ISBN 7-5041-3184-9

Ⅰ. 近…　Ⅱ. ①齐…②乔…　Ⅲ. 抽象代数—基础理论—理论研究　Ⅳ. 0153

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 085318 号

出版发行	教育科学出版社	市场部电话	010—64989009
社　址	北京·朝阳区安慧北里安园甲 9 号	编辑部电话	010—64989593
邮　编	100101	网　址	http://www.esph.com.cn
传　真	010—64891796		
经　销	各地新华书店		
印　刷	保定市中画美凯印刷有限公司		
开　本	787 毫米×1092 毫米　1/16		
印　张	25.75	版　次	2006 年 9 月第 1 版
字　数	620 千	印　次	2006 年 9 月第 1 次印刷
定　价	39.00 元	印　数	00 001—2 000 册

前　　言

近世代数是现代数学的基础，也是现代科学的基础．它研究代数系统的代数结构，而代数结构是数学各种研究对象的一个重要的侧面．它介绍了现代代数学的基础知识和基本方法．数学的各个分支都或多或少地用到它的概念、理论和方法，即使应用很广的数值计算和计算机软件也要用到它，而且在理论物理和物理化学的部分分支中也有应用．它还是自然科学、工程科学、管理科学相关专业的重要基础之一．近世代数是高级科技人才进行深造的一个不可缺少的台阶．

近世代数在培养抽象思维能力和逻辑推理能力方面起着特殊的重要作用，不愧被称为抽象概念的宝塔、逻辑推理的楷模．正是由于其中概念的抽象性，推理的严谨性，方法的技巧性，从而给教者与学者带来了相当的困难．因此，依据近世代数基本内容，为了理论的系统与严谨，又不增加本书的篇幅，我们以张禾瑞著《近世代数基础》(1978 年修订本)一书为主，围绕近世代数的一些基本概念和基本定理，针对学习者学习过程中容易出现的问题，有的放矢地精心探索与分析，编写了本书．

本书内容包括：基本概念，群、环与域，整环里的因子分解和扩域．共十七章．每章都有以下四个部分．

一、基本问题问答．对基本概念和基本理论中的疑点和难点进行了详尽的阐述．

二、典型问题分析．根据近世代数基础中的一些代表性问题，进行了详细的剖析与注解．

三、讲与练．这部分包括围绕基础知识的问题的练习与比较重要的一些结论的讲解．

四、思考问题．这部分提供了一些紧密联系基本内容的问题，请读者独立思考．书后解答作为思考后的参考．

本书主要特点如下．

1. 释疑．注重分析基本概念和理论的内在联系与本质区分，释疑解惑．同时注意对基础知识的内涵与外延做出必要的、适当的分析．这样，便于读者对于基本内容能够融会贯通、深刻理解、扎实掌握和灵活应用．

2. 严谨．概念准确，分析论证严密详尽，有根有据．这一特点有助于培养读者深刻思考和缜密推理的能力．

3. 新颖．配有相当数量的命题的多种分析与论证，从各种不同的渠道，给出问题的解决方案．同时针对容易混淆的问题，给出了正、反例子和判断方法．这样，有利于读者开拓思维，发挥独立性和创造性，主动积极地进行思考．

本书适用于大专院校数学专业的相关教师与学生，以及有关的科学技术人员，而且十分有助于电大师生、函授生与自学成才者．

本书为海南大学学术著作出版基金资助出版，我们深表感谢．

对于错误和不妥之处，恭请读者指正．

编　者

符　　号

$a\in A$	元 a 属于集 A
$a\overline{\in}A$	元 a 不属于集 A
$B\subset A$	集 B 是集 A 的子集（或 A 包含 B）
$B\not\subset A$	集 B 不是集 A 的子集（或 A 不包含 B）
$A\cup B$	集 A 与集 B 的并
$A\cap B$	集 A 与集 B 的交
$\varnothing$	空集
ϕ	法则
$\forall$	对于任意的
$\exists$	存在
$\overline{\exists}$	不存在
$\exists\vert$	存在唯一
$\mathbb{N}$	自然数集
$\mathbb{Z}$	整数集
$\mathbb{Q}$	有理数集
$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{C}$	复数集
$\mathbb{Z}^+$	正整数集
$\mathbb{Q}^+$	正有理数集
$\mathbb{R}^+$	正实数集
$P(A)$	集 A 的一切子集的集（A 的幂集）
$M_n(R)$	环 R 上的一切 n 阶方阵的集
$GL_n(F)$	数域 F 上的一切 n 阶可逆方阵的集
$\sim$	同态
$\not\sim$	不同态
$\cong$	同构
$\not\cong$	不同构
$a\equiv b(n)$	a 同余 b 模 n（或 a,b 对模 n 同余）
$\max\{a,b\}$	a 与 b 中的较大者
$\min\{a,b\}$	a 与 b 中的较小者
$\sum$	和
$\prod$	积
$\vert G\vert$	群 G 的阶
$\vert a\vert$	元 a 的阶
$(i_1\ i_2\cdots i_k)$	k-循环置换
S_n	n 次对称群
A_n	n 次交错群（或 n 次交代群）
$\mathbb{Z}_n$	整数模 n 的剩余类加群
(a)	由 a 生成的循环群或由 a 生成的主理想
(a,b)	由 a,b 生成的理想或 a,b 的最大公因数
$H<G$	H 是群 G 的子群
Ha,aH	子群 H 的右陪集，左陪集
$N\lhd G$	N 是群 G 的不变子群
$\ker\phi$	同态映射 ϕ 的核
G/N	群 G 对于不变子群 N 的商群
$\mathrm{ch}R$	环 R 的特征
$R[x]$	环 R 上的未定元 x 的多项式环
$R[x_1,x_2,\cdots,x_n]$	环 R 上无关未定元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的多项式环
$\deg f(x)$	多项式 $f(x)$ 的次数
$a\mid b$	a 整除 b（或 b 能被 a 整除）
$a\nmid b$	a 不整除 b（或 b 不能被 a 整除）
$[x]$	不大于实数 x 的最大整数
$F(S)$	添加集合 S 于域 F 所得的扩域
$F(a_1,a_2,\cdots,a_n)$	添加元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 于域 F 所得的扩域
$F(\alpha)$	单扩域
$(E:F)$	扩域 E 在域 F 上的次数

目　　录

前言 …… 1
符号 …… 1

第一章　集合、映射、代数运算 …… 1
第二章　一一映射、同态、同构 …… 11
第三章　等价关系与集合的分类 …… 27
第四章　群的定义、有限群的另一定义 …… 36
第五章　群的同态、变换群 …… 54
第六章　置换群、循环群 …… 72
第七章　子群、子群的陪集 …… 89
第八章　不变子群、商群、同态与不变子群 …… 106
第九章　加群、环的定义、整环 …… 132
第十章　除环、域、无零因子环的特征 …… 153
第十一章　子环、环的同态、多项式环 …… 166
第十二章　理想、剩余类环、同态与理想 …… 195
第十三章　最大理想、商域 …… 220
第十四章　素元、唯一分解环、主理想环 …… 236
第十五章　欧氏环、多项式环的因子分解 …… 254
第十六章　扩域、素域、单扩域、代数扩域 …… 269
第十七章　多项式的分裂域、有限域、可离扩域 …… 296

思考问题解答 …… 322

第一章　集合、映射、代数运算

一、基本问题问答

1. B 不是 A 的子集的定义是什么？

答　$B\not\subset A \Leftrightarrow \exists a\in B$，使得 $a\overline{\in} A$.

2. B 不是 A 的真子集的定义是什么？

答　B 不是 A 的真子集

$\Leftrightarrow B\not\subset A$

或 $B\subset A$ 而 $\forall a\in A$ 有 $a\in B$

$\Leftrightarrow B\not\subset A$

或 $B=A$.

3. 空集 $\varnothing$ 是任一集 A 的真子集吗？

答　不是．因为 $\varnothing$ 不是 $\varnothing$ 的真子集．应说 $\varnothing$ 是任一非空集 A 的真子集.

4. 我们已经知道

$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\left\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\,\middle|\,a_i\in A_i\right\}$ 是 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的卡氏积.

1)　若某 $A_i=\varnothing$，则 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=$？

2)　若 A_i 含 s_i 个元，$i=1,2,\cdots,n$，则 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 含多少个元？

答　1)　某 $A_i=\varnothing$ 时，$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\varnothing$.

2)　A_i 含 s_i 个元时，$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 含 $s_1\times s_2\times\cdots\times s_n$ 个元.

5. $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 到 D 的映射的定义是什么？

答　ϕ 是 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 到 D 的一个映射

$\Leftrightarrow$ 1)　$\forall(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$，$\exists d\in D$，使得

$\phi(a_1,a_2,\cdots,a_n)=d$；

2)　$\forall(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$，

若 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，

则 $\phi(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\phi(b_1,b_2,\cdots,b_n)$.

注　这里要突出强调 $\forall(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$，象 d 的存在性、唯一性以及 $d\in D$，尤其要注意唯一性的验证方法.

6. $\circ$ 是 A 的代数运算的定义是什么？

答　$\circ$ 是 A 的代数运算

$\Leftrightarrow\circ$ 是一个 $A\times A$ 到 A 的映射

$\Leftrightarrow\circ$ 是一个 $A\times A$ 到 A 的代数运算．

注 $\circ$是 A 的代数运算

$\Leftrightarrow A$ 对于$\circ$封闭

$\Leftrightarrow\circ$是 A 的二元运算．

二、典型问题分析

1. $A=\{1,2,3,\cdots,100\}$. 找一个 $A\times A$ 到 A 的映射.

解 $\forall a,b\in A$,

$(a,b)\to a$;

$(a,b)\to b$;

$(a,b)\to 1$;

$(a,b)\to \max\{a,b\}$;

$$\begin{cases}(a,b)\to a+1, & a\neq 100 \text{ 时},\\ (a,b)\to 1, & a=100 \text{ 时};\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a,b)\to b-1, & b\neq 1 \text{ 时},\\ (a,b)\to 1, & b=1 \text{ 时};\end{cases}$$

$(a,b)\to (-1)^{a+b}+2$;

$(a,b)\to |a-b|+1$;

$(a,b)\to \max\{a,b\}-\min\{a,b\}+1$;

	1	2	3	⋯	99	100
1	1	2	3	⋯	99	100
2	2	3	4	⋯	100	1
3	3	4	5	⋯	1	2
⋮	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
100	100	1	2	⋯	98	100

都是 $A\times A$ 到 A 的映射.

注 1) 读者应尽量多找出一些映射．

2) 下面命题"$A\times A$ 到 A 的映射是$(a,b)\to a$."不对，应说：

$$(a,b)\to a$$

是 $A\times A$ 到 A 的映射，因为 $A\times A$ 到 A 的映射不仅仅有

$$(a,b)\to a.$$

2. $A=\{$所有不等于零的偶数$\}$. 找一个集合 D，使得普通除法是 $A\times A$ 到 D 的代数运算．是不是找得到一个以上的这样的 D?

解 因为一个不等于零的偶数除以一个不等于零的偶数，所得的商永远是一个不等于零的有理数，所以 D 可取$\{$所有不等于零的有理数$\}$.

包含集$\{$所有不等于零的有理数$\}$的一切数集都可作为这样的 D.

3. $A=\{$所有不等于零的实数$\}$. $\circ$是普通除法：$a\circ b=\dfrac{a}{b}$. 这个代数运算适合不适合结合律？

解一　$\forall a,b,c\in A$，

$$(a\circ b)\circ c=\frac{a}{bc},\quad a\circ(b\circ c)=\frac{ac}{b}.$$

当 $c\neq\pm 1$ 时，

$$(a\circ b)\circ c\neq a\circ(b\circ c),$$

从而$\circ$不适合结合律.

解二　取 $1,2,3\in A$，

$$(1\circ 2)\circ 3=\frac{1}{6},\quad 1\circ(2\circ 3)=\frac{3}{2},$$

从而

$$(1\circ 2)\circ 3\neq 1\circ(2\circ 3).$$

所以$\circ$不适合结合律.

注　1)　在指出$(a\circ b)\circ c\neq a\circ(b\circ c)$时，必须明确是在 $c\neq\pm 1$ 的条件下.

2)　不能说“A 不适合结合律”，因为运算律的主语是代数运算而不是集合．要说“$\circ$不适合结合律”.

3)　在肯定$\circ$适合结合律时要按定义做出一般证明；否定时，举出一个反例即可.

4)　下面的说法是错误的：“当 $c=\pm 1$ 时，$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$，此时$\circ$适合结合律；当 $c\neq\pm 1$时，$(a\circ b)\circ c\neq a\circ(b\circ c)$，此时$\circ$不适合结合律．因此$\circ$不一定适合结合律．”$\circ$只有适合结合律与不适合这两种情况．适合时，要求 $\forall a,b,c\in A$，都有$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$；不适合时，只要有某一特殊情况，如 $c=2$ 时，$(a\circ b)\circ 2\neq a\circ(b\circ 2)$.

4. $A=\{a,b,c\}$. 由表

	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

所给的代数运算适合不适合结合律？

解　所给代数运算$\circ$适合结合律，即 $\forall x,y,z\in A$，都有

$$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z).$$

为了证明这个结论，需要验证 $3\times 3\times 3=27$ 个（即三个不同元素允许重复的三元排列的个数）等式．我们要尽量简化计算，仔细观察一下这个代数运算有什么特点，我们发现表中第一行、第一列分别与表头的行、列相同，即 $\forall x\in A$，

$$a\circ x=x,\quad x\circ a=x.$$

也就是说 a 左乘、右乘任何元不变，从而 $\forall x,y\in A$，

$$(a\circ x)\circ y=x\circ y=a\circ(x\circ y);$$
$$(x\circ a)\circ y=x\circ y=x\circ(a\circ y);$$
$$(x\circ y)\circ a=x\circ y=x\circ(y\circ a).$$

这样，三个元中只要出现 a，我们就已验证完了．下面我们只需验证三个元中不出现 a 的情况，从而只剩下 $2\times2\times2=8$ 个(即两个相异元素允许重复的三元排列的个数)等式了．验证如下．

$$(b\circ b)\circ b=a=b\circ(b\circ b);$$
$$(b\circ b)\circ c=b=b\circ(b\circ c);$$
$$(b\circ c)\circ b=b=b\circ(c\circ b);$$
$$(b\circ c)\circ c=c=b\circ(c\circ c);$$
$$(c\circ b)\circ b=b=c\circ(b\circ b);$$
$$(c\circ b)\circ c=c=c\circ(b\circ c);$$
$$(c\circ c)\circ b=c=c\circ(c\circ b);$$
$$(c\circ c)\circ c=a=c\circ(c\circ c).$$

从而$\circ$适合结合律.

注 1) 验证结合律是一项基本训练．验证时，要对集中任意三个元素的一切可能的结合，一一加以检验，不要遗漏．对于有限集合，更要特别注意．当然应该尽量找出规律，几种情况可以集中一次验证.

2) 本题中的 a,b,c 是 A 中的确定的元，而不是任意元．因此取 A 中任意三个元时，不能用 a,b,c 表之，而要用其他符号，如 x,y,z 表之．不能由 $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$ 就得出$\circ$适合结合律的结论．

三、讲与练

1. 下列所述是否能组成集合？

1) 和他相貌相像的人.

2) 某城市里较大的商店.

3) 一些多项式.

4) 平面几何中的所有难题.

5) 分子是偶数的一切分数.

解 1)～5)都不能组成集合．因为所述事物是不清晰、不确定、含糊的.

2. 判断下列各命题是否正确.

1) 一架飞机是飞机场集合的一个元素.

2) $\{(0,1)\}$是方程 $x+y=1$ 的解的集合.

3) $\left\{x\,\middle|\,x-2=0\right\}=2$.

4) 当 A 是空集时，A 的子集组成的集合也是空集.

5) $\varnothing\subset\varnothing$.

6) $\varnothing\in\left\{\{\varnothing\}\right\}$.

7)　$\{\varnothing\} \not\subset \left\{\{\varnothing\}\right\}$.

8)　$\{\varnothing\} \in \left\{\{\varnothing\}\right\}$.

9)　$\left\{n \middle| 2<n<3, n\in\mathbb{N}\right\}=\varnothing$.

10)　$2\in\left\{\{2\}\right\}$.

11)　$\{3\}\subset\left\{\{3\}\right\}$.

12)　若 $x\in B, B\in C$，则 $x\in C$.

解　1)～4)都错，5)～9)都对，10)～12)都错.

3. 证明：若集 A 含有 n 个不同元素，则 A 共有 2^n 个不同的子集.

证一　空集是 A 的子集，有 $1=C_n^0$ 个．由一个元素组成的子集有 C_n^1 个；由两个元素组成的子集有 C_n^2 个；由 i 个元素组成的子集有 C_n^i 个，$i=1,2,\cdots,n$. 因此 A 的所有子集的个数是

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n.$$

证二　对 A 的元的个数作数学归纳法.

1)　$n=0$ 时，即 $A=\varnothing$，A 共有 $2^0=1$ 个子集.

2)　假设 $n=k$ 时，命题成立．今看 $n=k+1$ 时.

设 A_1 恰有 $k+1$ 个元，取 $a\in A_1$，但 $a\,\overline{\in}\,A$ 且 $A_1=A\cup\{a\}$. 对于 A 的每一子集 H 都有 A_1 的两个子集 H 或 $H\cup\{a\}$，由这一过程可以获得 A_1 的所有子集．因此 A_1 的子集的个数恰为 A 的子集的个数的 2 倍．由归纳假设，A 的子集的个数为 2^k，从而 A_1 的子集的个数为 $2\cdot 2^k=2^{k+1}$.

由归纳原理，命题得证.

证三　当 $n=0$ 时，命题显然成立。当 $n\neq 0$ 时，设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，即 $a_i\in$子集或 $a_i\,\overline{\in}$子集($i=1,2,\cdots,n$)，共有两种状态．因此 A 有 $\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{n个}=2^n$ 个子集.

4. 若集 A 与 B 分别含有 n 与 m 个不同的元，问共有多少个不同的 A 到 B 的映射？

解　因为对于每一个 $a_i\in A, i=1,2,\cdots,n$，在 B 中取象的方法都有 m 个，所以 A 到 B 的全部映射的个数是

$$\underbrace{m\cdot m\cdot\cdots\cdot m}_{n个}=m^n.$$

5. 普通除法是不是复数集 $\mathbb{C}$ 的一个代数运算？

解　不是．因为 $1,0\in\mathbb{C}$，但 $\frac{1}{0}$ 无意义.

6. 设 $A=B=\mathbb{Z}$.

$\oplus$：普通加法是 A 的代数运算．

$\odot$：$b\odot a=b+1$ 是 $B\times A$ 到 A 的代数运算．

问 $\odot$，$\oplus$是否适合第一分配律？

解一　$\forall a_1,a_2\in A, b\in B$，

$$b\odot(a_1\oplus a_2)=b+1.$$

$$(b\odot a_1)\oplus(b\odot a_2)=(b+1)+(b+1)=2(b+1).$$

当 $b\neq -1$ 时，

$$b+1\neq 2(b+1).$$

所以$\odot$，$\oplus$不适合第一分配律.

解二 取 $2,3\in A,1\in B$，

$$1\odot(2\oplus 3)=1+1=2,$$

$$(1\odot 2)\oplus(1\odot 3)=(1+1)+(1+1)=4,$$

从而

$$1\odot(2\oplus 3)\neq(1\odot 2)\oplus(1\odot 3).$$

所以$\odot$，$\oplus$不适合第一分配律.

7. 若集 A 的代数运算$\odot$，$\oplus$适合第一分配律，则$\odot$，$\oplus$一定适合第二分配律吗？

解 未必．例，取 A 为正实数集 $\mathbb{R}^+$.

$$\odot:a\odot b=\frac{b}{a},\quad \oplus:a\oplus b=a+b$$

是 $\mathbb{R}^+$ 的两个代数运算．因

$$b\odot(a_1\oplus a_2)=b\odot(a_1+a_2)=\frac{a_1+a_2}{b}=\frac{a_1}{b}+\frac{a_2}{b}=(b\odot a_1)\oplus(b\odot a_2).$$

故$\odot$，$\oplus$适合第一分配律．取 $a_1=1,a_2=1,b=2$，

$$(a_1\oplus a_2)\odot b=(1+1)\odot 2=\frac{2}{2}=1,\quad (a_1\odot b)\oplus(a_2\odot b)=\frac{2}{1}+\frac{2}{1}=4,$$

从而$\odot$，$\oplus$不适合第二分配律．

四、思考问题

1. 下列所述是否能组成集合.

1） 和他是好朋友的人.

2） 好玩的玩具.

3） 平面上与某点靠近的点.

4） 很小的整数.

5） 某次数学考试所有高分数的人.

6） 老年人.

2. 判断下列各命题是否正确.

1） 一枝铅笔是铅笔盒集合的一个元素.

2） 赵杰是北京市中学集合的一个元素.

3） $\varnothing\in\varnothing$.

4） $\varnothing\subset\{\varnothing\}$.

5)　$\varnothing \in \{\varnothing\}$.

6)　$\varnothing \subset \big\{\{\varnothing\}\big\}$.

7)　$\varnothing \in \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}$.

8)　$\varnothing \subset \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}$.

9)　$\{\varnothing\} \overline{\in} \varnothing$.

10)　$\{\varnothing\} \subset \{\varnothing\}$.

11)　$\{\varnothing\} \overline{\in} \{\varnothing\}$.

12)　$\{\varnothing\} \in \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}$.

13)　$\big\{\{\varnothing\}\big\} \subset \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}$.

14)　$\big\{x \,\big|\, x = x+1, x \in \mathbb{Z}\big\} = \varnothing$.

15)　$\{3\} \subset \{3, 1\}$.

16)　若 $A \in B, B \not\subset C$,则 $A \overline{\in} C$.

17)　若 $x \in A \cup B$,则 $a \in A$.

18)　若 $x \in A$,则 $a \in A \cap B$.

19)　$\varnothing \in A$.

20)　$(\varnothing \cap A) \subset A$.

21)　$A \in (\varnothing \cup A)$.

22)　$\{a, b\} \subset \big\{\{a, b\}, c\big\}$.

23)　$\{a, b\} \in \big\{a, b, c\big\}$.

24)　$\varnothing \subset \big\{a, \varnothing\big\}$.

25)　$\varnothing \in \big\{a, \varnothing\big\}$.

26)　$\{a, b\} \cap \{b, c\} \subset \{a, b\} \cup \{b, c\}$.

27)　任何一个集合都存在真子集.

3. 从以下五个命题中选出正确的命题．$A \times B$

1)　总含有比 A 多的元素.

2)　与 $B \times A$ 的交总是空的.

3)　含有 A 与 B 的全部元素.

4)　有与 $B \times A$ 一样多的元素.

5)　与 $B \times A$ 相等.

4. 设 $A_n = (n, +\infty) = \big\{x \in \mathbf{R} \,\big|\, n < x < +\infty\big\}, n = 0, 1, 2, \cdots$,求 $\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} A_i, \bigcap\limits_{i=0}^{+\infty} A_i$.

5. 设 $A_n = \left\{x \in \mathbf{Q} \,\middle|\, |x| < \dfrac{1}{n}\right\}, n = 1, 2, \cdots$,求 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i, \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$.

6. 求证：$A=B \Leftrightarrow A\cup B\subset A\cap B$.

7. 设 $A=\left\{x \,\middle|\, x^2-16<0\right\}$，$B=\left\{x \,\middle|\, x^2-4x+3\geqslant 0\right\}$，求 $A\cap B$.

8. 设 $f(x)$，$g(x)$是实多项式，其实根集合分别记为 A 和 B，求证：

1) 多项式 $f(x)g(x)$实根的集合为 $A\cup B$.

2) 多项式 $f^2(x)+g^2(x)$实根的集合为 $A\cap B$.

9. 设集 A 恰含 n 个元，试将 A 分成两个不相交的子集 A_1 与 A_2，使 $A_1\times A_2$ 含的元的个数最多.

10. 试判断下列各法则ϕ是否为 A 到 B 的映射.

1) $A=B=\mathbb{Z}$，$\phi: n\to n+1$.

2) $A=B=\mathbb{N}$，$\phi: x\to x^2-1$.

3) $A=\mathbb{N}$，$B=\left\{x\in\mathbb{Z} \,\middle|\, x>0\right\}$，$\phi: n\to |n|$.

4) $A=B=\mathbb{N}$，

$$\phi:\begin{cases} n\to 1, & \text{当 } 2\mid n \text{ 时；}\\ n\to 2, & \text{当 } 2\nmid n \text{ 时.}\end{cases}$$

5) $A=B=\mathbb{R}$，$\phi: a\to \dfrac{a+1}{a-1}$.

6) $A=\mathbb{Z}$，$B=\mathbb{Q}$，$\phi: x\to y=\dfrac{1}{x}$.

7) $A=B=\mathbb{R}$，$\phi: a\to\sqrt{a+1}$.

8) $A=B=\mathbb{R}$，$\phi: x\to\sqrt{x}$.

9) $A=\{4,6,8\}$，$B=\{1,2,3\}$，

$\phi: a\to b$，b 是 a 的约数 .

10) $A=B=\mathbb{R}$，$\phi: a\to \lg(a+1)$.

11) $A=$数域 F 上一元多项式集合 $F[x]$，

$B=$非负整数集$\{0,1,2,\cdots\}$，

$\phi: f(x)\to \deg f(x)$.

12) $A=$数域 F 上的 n 阶方阵的集合 $M_n(F)$，

$B=\{0,1,2,\cdots,n\}$，

$\phi: (a_{ij})\to$秩(a_{ij}).

11. 问下列ϕ_1 与ϕ_2 有何关系？

1) $A=\{0,2\}$，$B=\{0,4\}$，

$\phi_1: x\to x^2$，$\phi_2: x\to 2x$.

2) $A=\mathbb{R}$，$B=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, x\geqslant 0\right\}$，

$\phi_1: a\to |a|$，$\phi_2: a\to\sqrt{a^2}$.

12. 下列各法则$\circ$是不是集 A 的代数运算？

1) $A=\{a,b\}$，

$\circ: (a,b)\to a\circ b=a$，

$(b,a)\to b\circ a=b$.

2)　$A=\mathbb{Q}$,

$\circ:(a,b)\to a\circ b=a$,当 $a>0$ 时;

$(a,b)\to a\circ b=b$,当 $a<0$ 时.

3)　$A=$数域 F 上的一元多项式集合 $F[x]$,

$\circ:(f(x),g(x))\to f(x)\circ g(x)=d(x)$,其中 $d(x)$是 $f(x)$,$g(x)$的最大公因式.

4)　$A=\mathbb{Z}$,

$\circ:(a,b)\to a\circ b=a^b$.

5)　$A=\mathbb{Q}$,

$\circ:(a,b)\to a\circ b=10^{a+b}$.

6)　$A=\mathbb{Q}$,

$\circ:(a,b)\to a\circ b=b\sqrt{a}+2b^2$.

7)　$A=$正有理数集$\mathbb{Q}^+$,

$\circ:(a,b)\to a\circ b=\sqrt{ab}$.

8)　$A=\mathbb{Q}$,

$\circ:(\frac{b}{a},\frac{d}{c})\to \frac{b}{a}\circ\frac{d}{c}=\frac{b+d}{ac}$.

9)　$A=$集 B 的一切子集的集 $P(B)$,

$\circ:(H,K)\to H\circ K=H\cap K$.

10)　$A=P(B)$,

$\circ:(H,K)\to H\circ K=H\cup K$.

11)　$A=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$,$\circ$是普通矩阵乘法.

12)　$A=$数域 F 上 n 维向量空间,$e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 A 的一个基,$\forall(a,b)\in A\times A$,

$$a=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n,$$
$$b=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\cdots+\beta_ne_n.$$
$$\circ:(a,b)\to a\circ b=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n.$$

13. 设集 A 恰含 n 个元,问 A 中最多有多少种代数运算?

14. 设 $A=\{a,b,c,d\}$,$\circ$是 A 的代数运算. 问在不交换元素次序的情况下,a,b,c,d 共有多少种不同的加括号步骤?

15. 以下各代数运算$\circ$是否适合结合律和交换律?

1)　$\mathbb{Z}$的代数运算:$a\circ b=a^2+b^2$.

2)　$\mathbb{N}$的代数运算:$a\circ b=a^b$.

3)　$\mathbb{Q}$的代数运算:$a\circ b=b$.

4)　$\mathbb{R}$的代数运算:$a\circ b=ab^2$.

16. 设 $A=\{a,b,c,d\}$,其运算表如下:

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

证明：$\circ$适合结合律.

17. 设集 A 对于$\circ$封闭，且$\circ$适合结合律，$\forall a,b\in A$，若 $a\neq b$，有 $a\circ b\neq b\circ a$. 证明：

1) $\forall a\in A$，有 $a\circ a=a$.

2) $\forall a,b\in A$，有 $a\circ b\circ a=a$.

3) $\forall a,b,c\in A$，有 $a\circ b\circ c=a\circ c$.

18. 设集 A 对于$\circ$封闭，且$\circ$适合结合律，交换律，若 $a\circ a=a$，$b\circ b=b$，证明：

$$(a\circ b)\circ(a\circ b)=a\circ b.$$

19. 修改以下各命题中错误的表示方法.

1) 从 A 中任意取出三个元素可表为

$$\forall a、b、c\in A.$$

2) 卡氏积 $A_1\times A_2$ 的元素可表为$(a_1\ a_2)$，$a_i\in A_i$，$i=12$.

3) A 中含 n 个元素 $a_1\ a_2\cdots a_n$，即

$$A=\{a_i\,|\,i=1,2\cdots\}.$$

4) a,b 都不等于零，即 $a\neq b\neq 0$.

第二章　一一映射、同态、同构

一、基本问题问答

1. A 到 $\overline{A}$ 的满射的定义是什么？

答　ϕ是 A 到 $\overline{A}$ 的一个满射

$\Leftrightarrow$ 1)　ϕ是 A 到 $\overline{A}$ 的一个映射；

2)　$\forall \bar{a}\in\overline{A}$，$\exists a\in A$，使得$\phi(a)=\bar{a}$

（即 $\overline{A}$ 的每一个元在ϕ下都在 A 中有逆象）.

2. A 到 $\overline{A}$ 的单射的定义是什么？

答　ϕ是 A 到 $\overline{A}$ 的一个单射

$\Leftrightarrow$ 1)　ϕ是 A 到 $\overline{A}$ 的一个映射；

2)　$\forall a,b\in A$，若$\phi(a)=\phi(b)$，则 $a=b$

（即 $\overline{A}$ 的每一个元在ϕ下若有逆象，则逆象唯一）.

注　映射要求象唯一，而单射还要求逆象唯一．

二、典型问题分析

1. $A=\{$所有大于零的实数$\}$，$\overline{A}=\{$所有实数$\}$. 找一个 A 与 $\overline{A}$ 间的一一映射.

解　$\forall a\in A$，

$$a\to \ln a;$$

$$a\to \log_x a,$$

其中 x 是一个固定的不等于 1 的正实数；

$$a\to a-\frac{1}{a};$$

$$\begin{cases} a\to \dfrac{1}{a}, & 0<a\leqslant 1 \text{ 时}, \\ a\to 2-a, & a>1 \text{ 时} \end{cases}$$

都是 A 与 $\overline{A}$ 间的一一映射.

注　为了训练分析能力，可进一步思考以下问题：$A=\{$所有大于零的实数$\}$，$\overline{A}=\{$所有实数$\}$.

1)　找一个 $\overline{A}$ 与 A 间的一一映射，也就是找一个 A 与 $\overline{A}$ 间的一一映射的逆映射.

2)　找一个 $\overline{A}$ 到 A 的单射，但不是满射.

3)　找一个 $\overline{A}$ 到 A 的满射，但不是单射.