哥德巴赫猜想与优化筛法

Goldbach Hypothesis and Optimization Sieve Method

司钊 司琳 SIZHAO SILIN

西北工業大學出版社

哥德巴赫猜想与优化筛法

司钊　司琳　著

西北工业大学出版社

【内容简介】本书着重推介一种有别于 Brun 筛法和 Selberg 筛法的新型优化筛法。其特点是简单易懂、便于操作、适用性广。

作为该优化筛法的应用实例，书中对至今用其他方法尚未解决的 14 个数论问题逐个进行了论证。同时，对每个命题都给出了具体的求解方法、运算程序及实筛数据。书末附有 20 万以内的素数表用于数据查验。

本书可供相关专业的教学与科研工作者阅读，亦可供大学数理系高年级学生、研究生参考。

图书在版编目（CIP）数据

哥德巴赫猜想与优化筛法/司钊，司琳著. —西安：西北工业大学出版社，2005.9

ISBN 7 - 5612 - 1973 - 3

Ⅰ.哥… Ⅱ.①司… ②司… Ⅲ. ①哥德巴赫猜想 ②筛法 Ⅳ.O156

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 086603 号

出版发行： 西北工业大学出版社
通信地址： 西安市友谊西路 127 号　　**邮编：** 710072
电　　话： 029-88493844　　88491757
网　　址： www.nwpup.com
印 刷 者： 西安新华印刷厂印刷
开　　本： 850 mm×1 168 mm　　1/32
印　　张： 16.625
字　　数： 367 千
版　　次： 2005 年 9 月第 1 版　　2005 年 9 月第 1 次印刷
印　　数： 1~3 000 册
定　　价： 28.00 元

前 言

自 1920 年出现 Brun 筛法后的几十年间，筛法在数论研究中所获得的卓越成效是显而易见的。不过，上个世纪末期至今，面对数论中许多遗留问题，现有筛法似乎遇到了极大困难。由此，自然会促使人们去做出新的思考和尝试，寻求新的突破。在这方面，笔者也做了一些工作，现汇集成册，提供大家参考。

这里主要推介一种新型的优化筛法。该筛法比目前应用最广，效能最强的 Selberg 筛法具有明显的优越性。用该筛法求证的哥德巴赫猜想等 14 个数论问题也是至今用其他方法都没有解决的问题，并且其适用范围绝不局限于这 14 个数论问题，而具有广泛的适用性。希望它能对读者感兴趣的研究课题有所帮助。

此项工作得到航天工业总公司七七一所党政领导的关怀和支持，在此深表谢意。同时，还得到厦门大学姚宗元教授，西北大学胡希正教授、赵宪钟教授，西北工业大学杜文奎教授，航天测控公司廖道文研究员，航天七一〇所张忠洲高工，航天七七一所于伦政研究员、孟小锁研究员、何鸿生研究员、王宇水高工以及裴娟和王艳同志的热情支持和大力帮助，在此一并表示谢意。

最后还要特别感谢西北工业大学出版社的领导和同志们，在编辑和出版工作中给予的大力支持和合作。

书中不妥之处，敬请批评指正。

作　者

2005.7.8

Email：pls33@163.com

目 录

引 言

筛法是数论中常见的一种方法。最早的筛法是由古希腊埃拉托斯染尼氏（Eratosthenes）所创立的用来寻找素数的方法，经过布朗（Brun）和泽尔贝格（Selberg）等人的逐步改进才有了更为普遍的实用价值，并成为数论研究中的一个重要方法。例如，对哥德巴赫猜想的研究，至今几乎所有最好的结果都是利用加权形式的 Selberg 筛法得到的。

不过，现有“筛法”仍存在值得改进之处，大家知道，Eratosthenes 筛法一般形式的数学表达式为

$$|N_B| = \sum_{d|k} \mu(d) |N_d|$$

式中：$|N_B|$ 通常称为筛函数，表示正整数集合 $\boldsymbol{N}$ 中所有与正整数 k 互素的元素的个数；

$|N_d|$ 表示正整数集合 $\boldsymbol{N}$ 中能被正整数 d 整除的元素的个数；

$\mu(d)$ 为茂比乌斯（Mö bius）函数；

k 通常为不超过某一给定数值的全部素数的乘积。

这种筛法的基本构思是：

（1）针对具体命题和欲达到的效果选取合适的被筛对象（即被筛集合）$\boldsymbol{N}$，并确定正整数 k 的所有素因子。

（2）明确筛选条件：即从集合 $\boldsymbol{N}$ 中分选出所有与 k 互素的元素，组成子集 N_B。

（3）对子集 N_B 的基数 $|N_B|$（即筛函数）进行上、下界估计。

遗憾的是，除了个别情况，一般而言上述筛函数表达式中的$|N_d|$不单没有一个直观的显函数表达式，而且也很难找到一个符合要求的近似式给以表述。从而，就产生了对$|N_B|$进行上、下界估计的具体困难，为了解决这一困难，先后出现了 Brun 筛法和 Selberg 筛法。

Brun 筛法和 Selberg 筛法在基本构思上与 Eratosthenes 筛法是完全一致的，所不同的只是后来者在筛函数$|N_B|$的上、下界估计方法上作了有效的改进。所以 Brun 筛法和 Selberg 筛法比 Eratosthenes 筛法虽然具有更为普遍的实用价值，但仍显不足。关键在于此类筛法的共同缺陷——即被筛集合的多样性和复杂性与筛选条件的相对单调，影响了筛法更为广阔的应用范围和更为理想的使用效果。

实际上，对于 Eratosthenes 筛法还可以开阔思路，从多个角度进行思考和改进。循此，我们作了以下几方面的工作。

（1）简化被筛集合，尽量使其单一化和简单化。

（2）采用灵活多样的筛选条件以适应各种命题的具体要求来达到予期的效果。

（3）寻求一种相对简单又易于操作的筛函数通用表示形式。

（4）寻求一种相对简单又易于操作的筛函数通用边界公式。

自 2000 年以来，我们所进行的这些工作已经有了明显的进展。应用经过改进之后的这种筛选方法，曾先后对十余个数论命题进行试证皆取得了满意的效果。这些命题基本上都是至今用其他方法尚未能解决的，其中 包括“哥德巴赫猜想”、“孪生素数猜想”、“相邻等差三素数问题”、“素数等差级数问题”……这些公认的共同关注问题。

特别值得指出的是，此新筛法不仅简单易懂，便于操作，而

且在求证所论命题时，若有必要，还能给出全解的具体求解方法。

书中第一章所论是后面各章节的基础。从第二章以后，每一章都独立阐述求证一个命题，相互之间没有关联，故每一章的各种表示符号都仅限于本章的定义范围。

为了便于读者对书中各章论述内容的验证运算，所有各章的验算筛选程序都可以从网上方便地下载。

网站：www.mathsfancy.com

第一章 通用筛函数

1.1 概述

相对于随意有限正整数集合（元素可重复）而言，有限正整数等差数列集合是比较简单的一种。而在有限正整数等差数列集合中，公差为 1 的有限自然数列集合最为简单。

显然，任何一种筛法，其筛函数的复杂程度和难易水平都与下面两个因素有关：①被筛集合②筛选条件。被筛集合越简单对应的筛函数则相应简单且易于处理操作。从这个意义上讲，当选择被筛集合时，在能达到同样效果的前题下，自然应该选择最简单的被筛集合。基于这一考虑，以下讨论中所涉及到的“被筛集合”都选择“有限自然数列集合”（或简称为自然数列）。下面再就其它几个问题给以定义和表述。

一、定义。

（1）正整数等差数列集合 N

$$N=(C_i\,,\ i=1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

$$C_i=C_1+(i-1)\varDelta\,, \qquad i=1,2,\ldots \tag{2}$$

式中：C_1 和 $\varDelta$ 为正整数。

C_1 称为该正整数等差数列集合的“首项”。

$\varDelta$ 称为该正整数等差数列集合的“公差”。

（2）自然数列集合即为公差 $\varDelta=1$ 的正整数等差数列集合。

（3）模数集合 P：

$$P=(p_1,p_2,\ldots,p_r)$$

由r个（r为任意给定的正整数）互不相同的素数组成的素数集合P，其中元素做为筛选模数使用时，素数集合P称为模数集合。

二、正整数等差数列集合的基本特征

特征 1：正整数等差数列集合中没有重复的元素。

特征 2：正整数等差数列集合中任意相邻两元素之间的差值都等于公差$\varDelta$。

特征 3：当素数p_i与公差$\varDelta$互素时，公差为$\varDelta$的正整数等差数列集合中任意相邻的p_i个元素都构成模p_i的完全剩余组。

上述前两项特征显而易见，关于第三项特征证明如下。

证：在正整数等差数列集合N中任取相邻的p_i个元素，设其中最小的一个为h，则这p_i个元素分别为

$$h,h+\varDelta,\ldots,h+(p_i-1)\varDelta$$

它们每两两之间的差值可用$\beta\varDelta$统一表示。这里β为不超过(p_i-1)的正整数，故β不能被p_i整除。公差$\varDelta$与p_i互素，故不能被p_i整除。由此可见，乘积$\beta\varDelta$不能被素模数p_i整除。所以，这p_i个元素每两两之间对模p_i皆不同余。自然，对模p_i两两不同余的p_i个元素即构成模p_i的完全剩余组。

不言而喻，自然数列集合是公差$\varDelta=1$的正整数等差数列集合，当然具有正整数等差数列集合的一切特征。

当我们选定自然数列集合为被筛集合以后，可以从如下两个简单实例入手进行探讨。

1.2 欧拉（Euler）函数

根据定义，欧拉函数$\varphi(n)$表示不超过n而与n互素的正整数个数（n为正整数）。将不超过n的全部正整数集合用N表示，

则欧拉函数 $\varphi(n)$ 即是集合 N 中所有与 n 互素的元素的个数。

设 n 的标准的素因子分解式为

$$n=p_1^{\alpha 1}p_2^{\alpha 2}\dots p_s^{\alpha s} \tag{3}$$

将 $p_1, p_2, \dots, p_s$ 构成的素数集合用 P 表示：

$$P=(p_1, p_2, \dots, p_s)$$

因为与 n 互素的元素必然都不含 $(p_1, p_2 \dots, p_s)$ 这些素因子，所以集合 N 中与 n 互素的元素应满足下面的筛选条件：

$$g \neq 0 \pmod{p_i} \quad i=1,2,\dots,s \tag{4}$$

g 表示集合 N 中被选取的元素。

集合 N 称为被筛集合，集合 P 称为模数集合。

显然，这里 N 为公差 $\varDelta=1$ 的“正整数等差数列集合”。其基数 $|N|=n$。

我们知道，集合 N 中全部元素按模 p_i 可分为 p_i 个同余类子集，余数为零的同余类称做“零同余类子集”。余数为 1 的同余类称做“1 同余类子集”，……余数为 p_i-1 的同余类称做“p_i-1 同余类子集”。

命，$N_{ti}(\bmod p_i)$ 表示集合 N 对模 p_i 的“ti 同余类子集”。$(i=1,2,\dots,s$；$ti=0,1,\dots,p_i-1)$

由筛选条件（4）式可知：

$$\varphi(n)=|\bigcap_{i=1}^{s}\bigcup_{ti=1}^{p_i-1}N_{ti}(\bmod p_i)| \tag{5}$$

式中：$|X|$表示集合 X 的基数，（下同）

由于集合 N 为“正整数等差数列集合”且其公差与 n 互素，根据正整数等差数列集合的基本特征可知，若以 n 的素因子 p_i 为模数，集合 N 中恰好含有 n/p_i 个模 p_i 的完全剩余组，每个完全

剩余组中的元素又分别属于 p_i 个同余类子集中的每个子集各一个元素。故模 p_i 的每个同余类子集都有相同的元素个数。

$$\left|N_{ti}(\bmod p_i)\right| = \frac{n}{p_i} \quad (i = 1,2,\ldots,s\ ;\ ti = 0,1,\ldots,p_i - 1) \tag{6}$$

由筛选条件（4）式可见，对模数 p_i 而言，集合 N 中被筛掉的元素仅为零同余类子集的元素，而其它同余类子集中的元素都暂被保留下来，即对模 p_i 而言，被选取的元素应为下述集合中的元素：

$$YN(\bmod p_i) = \bigcup_{ti=1}^{p_i-1} N_{ti}(\bmod p_i) \tag{7}$$

$YN(\bmod p_i)$ 表示集合 N 中按模 p_i 被选取的元素集合。

因为，对同一模数的各同余类子集相互之间的交集皆为空集，即：

$$N_{ti1}(\bmod p_i) \bigcap N_{ti2}(\bmod p_i) = \varnothing \tag{8}$$

$$ti1 \neq ti2$$

所以

$$|YN(\bmod p_i)| = \sum_{ti=1}^{P_i-1} |N_{ti}(\bmod p_i)| = (p_i - 1)\frac{n}{p_i} \tag{9}$$

$$(i = 1,2,\ldots,s)$$

命　$$k_i = \frac{(p_i - 1)}{p_i} \qquad (i = 1,2,\ldots,s) \tag{10}$$

得　$$|YN(\bmod p_i)| = nk_i \qquad (i = 1,2,\ldots,s) \tag{11}$$

$$k_i = |YN(\bmod p_i)|\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (i = 1,2,\ldots,s) \tag{12}$$

由（12）式可见，k_i 表示集合 N 中按模 p_i 被选取的元素个

数与集合 N 中全部元素个数的比值。我们将 k_i 称做按模 p_i 的"分选系数"。

由（6）式知，集合 N 中随意一个模 p_1 的同余类子集的基数为：

$$|N_{t1}(\bmod p_1)|=\frac{n}{p_1} \qquad (t1=0,1,\dots,p_1-1) \tag{13}$$

显然，该子集 $N_{t1}(\bmod p_1)$ 为"正整数等差数列集合"其公差 $\varDelta=p_1$。若以 p_2 为模数，由于模数 p_2 与"正整数等差数列集合" $N_{t1}(\bmod p_1)$ 的公差 p_1 互素，根据正整数等差数列集合的基本特征同前推理，可知集合 $N_{t1}(\bmod p_1)$ 中模 p_2 的同余类子集基数为

$$\begin{aligned}&|\{N_{t1}(\bmod p_1)\}_{t2}(\bmod p_2)|=\\&|N_{t1}(\bmod p_1)|(\frac{1}{p_2})=\frac{n}{p_1p_2}\end{aligned} \tag{14}$$

由于

$$\begin{aligned}&|\{N_{t1}(\bmod p_1)\}_{t2}(\bmod p_2)|=\\&|N_{t1}(\bmod p_1)\bigcap N_{t2}(\bmod p_2)|\end{aligned} \tag{15}$$

知

$$|N_{t1}(\bmod p_1)\bigcap N_{t2}(\bmod p_2)|=\frac{n}{p_1p_2} \tag{16}$$

$$(t1=0,1,\dots,p_1-1 \quad ; \quad t2=0,1,\dots,p_2-1)$$

集合 $N_{t1}(\bmod p_1)$ 中除去模 p_2 的"零同余类子集"外，其余所有模 p_2 的同余类子集的并集基数为

$$|N_{t1}(\bmod p_1)\bigcap\bigcup_{t2=1}^{P_2-1}N_{t2}(\bmod p_2)|=$$

$$|\bigcup_{t2=1}^{P_2-1}\{N_{t1}(\bmod p_1)\bigcap N_{t2}(\bmod p_2)\}|=$$

$$\sum_{t2=1}^{P_2-1}|N_{t1}(\operatorname{mod} p_1)\bigcap N_{t2}(\operatorname{mod} p_2)|=$$

$$\frac{(p_2-1)n}{p_1p_2} \qquad (t1=0,1,\ldots,p_1-1) \tag{17}$$

对于集合 N 中多个模 p_1 的同余类子集而言则有

$$|\bigcup_{t1=1}^{P_1-1}N_{t1}(\operatorname{mod} p_1)\bigcap\bigcup_{t2=1}^{P_2-1}N_{t2}(\operatorname{mod} p_2)|=$$

$$|\bigcup_{t1=1}^{P_1-1}\{N_{t1}(\operatorname{mod} p_1)\bigcap\bigcup_{t2=1}^{P_2-1}N_{t2}(\operatorname{mod} p_2)\}|=$$

$$\sum_{t1=1}^{P_1-1}|N_{t1}(\operatorname{mod} p_1)\bigcap\bigcup_{t2=1}^{P_2-1}N_{t2}(\operatorname{mod} p_2)|=$$

$$(p_1-1)(p_2-1)\frac{n}{p_1p_2}=nk_1k_2 \tag{18}$$

由于 $N_{t1}(\operatorname{mod} p_1)\bigcap N_{t2}(\operatorname{mod} p_2)$ 仍为“正整数等差数列集合”，其公差 $\varDelta=p_1p_2$。若以 p_3 为模数，则模数 p_3 与公差 p_1p_2 互素，根据正整数等差数列集合的基本特征同上推导可得

$$|\bigcap_{i=1}^{3}\bigcup_{ti=1}^{P_i-1}N_{ti}(\operatorname{mod} p_i)|=nk_1k_2k_3 \tag{19}$$

依次类推，即得

$$|\bigcap_{i=1}^{s}\bigcup_{ti=1}^{P_i-1}N_{ti}(\operatorname{mod} p_i)|=n\prod_{i=1}^{s}k_i \tag{20}$$

将（20）式代入（5）式得

$$\varphi(n)=n\prod_{i=1}^{s}k_i \tag{21}$$