幾何學演習指導

薛德炯編譯

上海新亞書

目 次

自修應考準備讀物

幾何學

演習指導

導言

幾何學學習法 '算學'爲現代科學之基礎,其重要自不待言.惟以世俗相傳,算學爲至難之科學,學習者聽信傳聞,未經入門,心已怯懦,因而視爲畏途,不敢問津;強而行之,亦以誘掖無方,終至歧路徘徊,淺嘗即止.此種積習不除,則基礎未安,何能探討科學?故讀本書者,請先排除上述畏難心理,鼓勇前進,自能豁然貫通.

學習幾何時,吾人所最感困難者,乃在無解題實力,於是對於幾何學上形形色色之問題,一以強記爲主.在記憶力旺盛之青年,方以此爲不二法門.細究其實,信仰此種強記主義者,每犯下列二弊:

(1) 對於應行記憶之定義,定理等,反於不知不識之間,因不加注意而拋荒.

(2) 一題到手,祇知搜求前人成解,不肯自加思索,因

而自發的理解力,常形缺乏.

以故,偶遇題意稍異者,便莫知所措.加之,已熟習之問題,設或一旦忘却,苦思焦慮,終不能聯想而得.臨場不能發揮實力以至失敗,此實爲最大原因.故吾人學習幾何,首貴有法.如何思索,如何解答,均應排除從來之不利,定出井然有序之方案,開闢觸類旁通之途徑,以期遣驅如意,頭頭是道.

然則學習幾何,法當如何?可分二步言之:

A. 第一步初讀教科書時,須將定義悉心熟記,定理充分理解,若有忽略,將來暗中索摸,扞格難通.

B. 第二步須知問題解法,自有思索途徑,專事強記,非良好方法,其弊之所在,前已言之.幾何學以定義及定理爲基礎,逐步推求,逐步擴大,由定理化定理,由問題化問題,一若抽絲剝繭,層出不窮.故現代之幾何學範圍至廣大.吾人對此範圍至廣至大之幾何學,單憑強記而欲通曉一切,不思創設方案,以求駕馭,則青年之記憶力,無論如何旺盛,恐亦至難成功.故學習者應先理解緊要定理,基本問題,然後考求有無一定方案,作爲思考程序,藉以闡明新理,探索新題.

於是,幾何學習法上有下列二要項:

(1) 將緊要定理分類熟記.

教科書中定理之排列,大都以理解爲主,對於記憶及解法而言,不能謂爲亦甚適當.本書以便利記憶及解法爲前提,將緊要定理分類列載,用便學者時時省憶,臨用時得驅遣自如.

(2) 選擇基本問題,研究其解法,以融會探索類題或新題之方案而貫通之.

此非一言所能盡,本書側重此點,以後將逐章說明.

緊要問題分類法 本書以便利記憶及解法爲前提,已如上述,故分類上,即一本此旨.

幾何學爲研究圖形性質之學科.

則平面幾何學當然爲研究平面上所畫圖形性質之學科;平面上所畫圖形,有點,有線,故小而言之,亦可謂爲研究點,線性質之學科.惟如'一直線垂直於他直線'雖爲線與線之關係,而常用角表示,故又可謂爲研究點,線,角三者之性質之學科.以是立論,則

平面幾何學問題,就點,線,角三者而分類.

在索解上,研究上,亦屬可通.今先應用組合方法而試行分類,則

(1) 點,線,角三者祇取一種時,可得

點的問題, 線的問題, 角的問題

三種.

(2) 點,線,角三者之中任取二種時,可得

關於點,線之問題, 關於點,角之問題, 關於線,角之問題

三種.

(3) 點線角三者合取時,可得

關於點,線,角之問題

一種;合共七種,惟祇有點一項,決難構成問題,而點與線,點與角之關係亦必藉線聯結;例如定理'過不在一直線之三點,祇可作一圓'雖爲關於點線之問題,而證明之時,必用直線聯結而成三角形,而證此三角形,祇有一外接圓.因此點與線,點與角,或點與線與角之關係問題,證明時皆用線聯結,故解法上若納入關於線角之問題中,亦無甚不便.故將幾何學問題分類,可得三種如下:

第一. 祇關於線之問題

第二. 祇關於角之問題;

第三. 關於線與角之問題.

因而解題時所常用之緊要問題,亦可本此意義,分

爲三類如下:

第一. 祇關於線之定理;

第二. 祇關於角之定理;

第三. 關於線與角之定理.

惟此種定理分類法,對於各部分,不能認爲絕對便利.例如平行四邊形之性質,若如此分類,反致不便記憶,故本書遇有上述情形者,不強用是法,而於各定理之末,附注(線),(角),(線角)等字,以明其所屬.

【注意】線在三角形或平行四邊形,則爲邊;在圓,則爲周,弦,弧,切線,割線,半徑,直徑等;在面積,則爲底,高等.故講三角形時可用關於邊之定理,關於邊,角之定理等名稱.

第一編　直線形

祇關於線之定理

(1)三角形之一邊,小於他二邊之和,而大於其差.

(2)三角形內之一點與底之兩端聯結之二直線,其和較他二邊之和小.

祇關於角之定理

(1)凡直角皆相等.

(2)一直線與他一直線相交,其二鄰角之和等於二直角. 及其逆定理.

(3)相交二直線,其二鄰角之二等分線,互為垂直.

(4)凡對頂角皆相等.

(5)二平行線以一截線截之,則各雙錯角相等;各雙同位角亦相等;二雙同旁內角皆互為補角. 及其逆定理.

(6)二雙直線若各相平行或互為垂直,則其交角非相等即互為補角.

(7)三角形三內角之和等於二直角,其一外角等於其二內對角之和.

(8)四邊形四內角之和等於四直角.

(9) n 邊凸多角形內角之和等於 $2(n-2)$ 直角;外角之和等於四直角.

關於線與角之定理

第一　邊與角之相等關係.

(甲)恆等三角形之性質

等邊對等角,等角對等邊.

恆等三角形構成之條件

(1)任意三角形中,

I. 三邊相等時;

II. 二邊及其夾角相等時;

III. 二角及其夾邊相等時.

(2)直角三角形中,

I. 斜邊及一銳角相等時;

II. 斜邊及一邊相等時.

(乙)二等邊三角形之性質

(1)等邊對等角,等角對等邊.

(2)頂角之二等分線垂直而等分其底.

(3)聯結頂點與底邊中點之線,垂直於底邊.

第二 邊與角之大小關係.

(1)二邊不等之一三角形中,

大邊之對角較小邊之對角大. 及其逆定理.

(2)二邊各相等而第三邊不等之二三角形中.

大邊之對角較小邊之對角大. 及其逆定理.

(3)由直線外之一點,向之所引各直線中,

I. 垂線最短.

II. 與垂線成等角之斜線相等.

III. 與垂線成大角之斜線較成小角之斜線大.

及其逆定理.

【注意】欲證直線之相等或角之相等,可據(第一)各定理欲證直線之大小或角之大小可據(第二)各定理.

平行四邊形

(甲)平行四邊形之性質

(1)對邊相等.(線)

(2)對角線互爲二等分.(線)

(3)對角線之交點爲對稱之中心.(線)

(4)對角相等(角)

(乙)四邊形構成平行四邊形之條件

(1)二雙對邊各相平行時,

(2)二雙對邊各相等時,

(3)二雙對角各相等時,

(4)對角線互爲二等分時,

(5)一雙之對邊相等且平行時.

(丙)正方形矩形,菱形之性質

(1)正方形之對角線相等,且互相直交.一對角線與一邊所成之角,等於直角之半. [illegible]

(2)矩形之對角線相等.(邊)

系. 由直角三角形之頂點所引之中線等於斜邊之半.

(3)菱形之對角線直交.

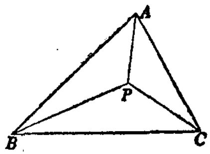
解題之思索法 欲解各種問題,先應辨明從何處下手.如所解問題祇與線有關,則所有祇關於線之定理,即應縈廻腦際;如祇與角有關,則所有祇關於角之定理,即應瞭然胸中.然後將圖形與題意互相闡發,以求假設與終決之聯絡.否則每易誤入歧途,空費時力,而終不得其要領也.

祇關於線之問題解法

例 1. 由三角形內之一點至各角頂之三直線，其和小於其周；而大於其周之半分.

題意 設 P 爲 ΔABC 中之一點，則

$$周>AP+BP+CP>\tfrac{1}{2}周$$



不必問三角形之形狀，大小，及 P 點之位置，祇須從祇與線有關着想. 將祇與線有關之二定理，湧現腦際，應用之於上圖，以求導出適合題意之式. 在代數學演習指導所習得'式之變形'，正可於此處運用之.

證明 ΔABP 中， $AP+BP>AB$

ΔBCP 中， $BP+CP>BC$

ΔACP 中， $CP+AP>AC$

各邊相加，則 $2(AP+BP+CP)>AB+BC+AC$

$$\therefore\ AP+BP+CP>\tfrac{1}{2}周$$

又，ΔBAC 中 $AB+AC>BP+CP$

$$BC+AB>CP+AP$$

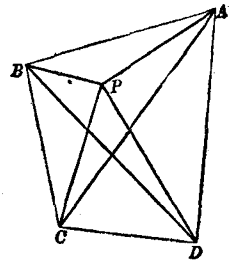
$$AC+BC>AP+BP$$

各邊相加，則 $2(AB+AC+BC)>2(AP+BP+CP)$

$$\therefore\quad 周>AP+BP+CP$$

$$\therefore \quad 周 > AP+BP+CP > \tfrac{1}{2}周$$

例 2. 四邊形之對角線之和,較由其交點外之任意點至角頂所引四線之和小.



題意 設 P 爲四邊形 $ABCD$ 內之任意點,則

$$AC+BD<AP+BP+CP+DP$$

AB, BC, CD, DA 四線,不在本問題內,可以棄置不顧;而易得證明如下:

證明 ΔACP 中 $\quad AC<AP+CP$

ΔBDP 中 $\quad BD<BP+DP$

各邊相加,則 $\quad AC+BD<AP+BP+CP+DP$

【注意】 無用之線棄置不顧,證明之路,反易明辨,習幾何者,常遇此境.

問 1. 與四邊形在同平面內之一點,至其角頂所引之四直線,其和若爲極小,則其點何在?

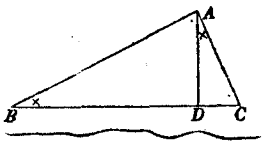
若明此題爲例 2. 之改頭換面者,易知對角線之交點,即爲所求之點. 惟關於極大,極小問題之眞面目,其下手法須參照下文第 64 頁

問 2. 四邊形之周較其對角線之和大,較其和之二倍小.

仿前二例,求證.

祇關於角之問題解法

例 1. 由直角三角形 ABC 之頂點 A 向斜邊 BC 引垂線 AD, 則 $\angle BAD=\angle ACD$, 及 $\angle CAD=\angle ABC$.(重要)



本題祇與角有關而與邊之大小等無關,故先察題意及圖形,就上述祇關於角之定理中,選出與本題有關者,得二定理,(1)凡直角皆相等,(2)三角形三內角之和等於二直角,其一外角等於其二內對角之和.仿代數學中應用問題之立式方法,立出其關係式,試證 $\angle BAD=\angle ACD$. 然後可如豫想,得其證明如下:

證明 因 $\angle BAC$ 及 $\angle ADC$ 均為直角,故

$$\angle BAD+\angle CAD=\angle CAD+\angle ACD$$

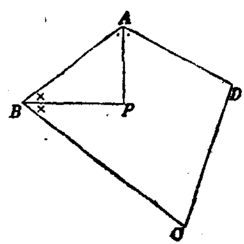
由雙方減去 $\angle CAD$, 則 $\angle BAD=\angle ACD$

同理,得證明　　$\angle CAD=\angle ABC$

例 2. 設四邊形 $ABCD$ 之相鄰二角 A, B, 其二等分線之交點為 P, 則 $\angle P=\frac{1}{2}(\angle C+\angle D)$

又設相對二角 A, C 之二等分線,其交點為 Q, 則

$$\angle Q=\tfrac{1}{2}(\angle B\sim\angle D)$$



先就角之定理中(1),(7),(8)着想,仿上例證之.

證明　四邊形 $ABCD$ 中

$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4\angle R \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ΔABC 中因 AP, BP 各爲 $\angle A, \angle B$ 之二等分線, 故

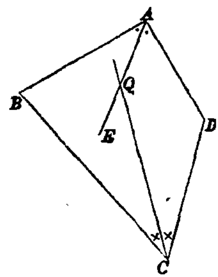
$$\tfrac{1}{2}\angle A+\tfrac{1}{2}\angle B+\angle P=2\angle R$$

即
$$\angle A+\angle B+2\angle P=4\angle R \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1),(2)兩式,得　$2\angle P=\angle C+\angle D$

$$\therefore\quad \angle P=\tfrac{1}{2}(\angle C+\angle D)$$

又凹四邊形 $ABCQ$ 及凸四邊形 $ADCQ$ 中, 因 AQ, CQ 各爲 $\angle A, \angle C$ 之二等分線, 故



$$\tfrac{1}{2}\angle A+\angle B+\tfrac{1}{2}\angle C+\text{優}\angle AQC=4\angle R$$

$$\tfrac{1}{2}\angle A+\angle D+\tfrac{1}{2}\angle C+\text{劣}\angle AQC=4\angle R$$

各邊相減, 則

$$\angle B-\angle D+\text{優}\angle AQC-\text{劣}\angle AQC=0$$

然　$\text{優}\angle AQC-\text{劣}\angle AQC=2\angle CQE$

代入上式,　$\therefore\quad 2\angle CQE=\angle D-\angle B$

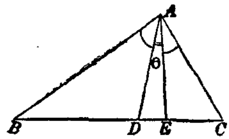
$$\therefore\quad \angle CQE=\tfrac{1}{2}(\angle D-\angle B)$$

【注意】本題之 $ABCQ$ 爲凹四邊形,若爲凸四邊形,其證法仍完全相同,惟結果變爲 $\angle Q=\frac{1}{2}(\angle B-\angle D)$ 而已;故一般的多採 $\angle Q=\frac{1}{2}(\angle B\sim\angle D)$ 形式.

例 3.　三角形頂角之二等分線與向其對邊所引之

垂線所成之角,等於二底角之差之半分.(重要)

題意 設AD爲二等分線,AE爲垂線,則 $\theta=\angle EAD=\frac{1}{2}(\angle B\sim\angle C)$



將圖形與題意細加比對,從可以援引之定理(1),(7)等着想,仿前例立其關係式.惟因思想之巧拙,所得之證法,亦有種種.茲姑揭示二種,試細味之!

證明一 因ΔABE爲直角三角形,AD爲$\angle BAC$之二等分線,故

$$\angle BAE+\angle B=\angle R$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\angle A+\theta+\angle B=\angle R \cdots\cdots(1)$$

又由直角三角形ACE,得

$$\angle CAE+\angle C=\angle R$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\angle A-\theta+\angle C=\angle R \cdots\cdots(2)$$

由(1)減(2),得 $\quad 2\theta+\angle B-\angle C=0$

$$\therefore\quad \theta=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$$

證明二 由ΔADC, $\frac{1}{2}\angle A+\angle C=\angle ADB$

又 $\quad \frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C)=\angle AED$

各邊相減,得 $\quad \frac{1}{2}(\angle C-\angle B)=\angle ADB-\angle AED$

$$\therefore\quad \theta=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$$

【注意】證題之時,凡遇「偶然證出來」「不知怎樣的給我做出來