上海市
1956-57年中学生数学竞赛
习題汇编

中国数学会上海分会中学数学研究委員会編

新知識出版社

上海市1956—57年中学生
数学竞賽习題汇編

中国数学会上海分会
中学数学研究委員会編

新 知 識 出 版 社

一九五八年·上海

上海市1956—57年中学生
数学竞赛习题汇編
中国数学会上海分会
中学数学研究委員会編
*
新知識出版社出版
(上海湖南路9号)
上海市書刊出版业营业許可証出015号
上海国光印刷厂印刷　新华書店上海发行所总經售
*
开本：787×1092　1/32　印張：3 11/16　字数：84,000
1958年4月第1版　1958年4月第1次印刷
印数：1—55,000本
統一書号：7076·303
定　价：(6)0.30元

目　录

一 关于举办中学生数学竞賽的几点經驗和体会

党号召我們在十二年內把主要的几門科学技术赶上国际水平，中国数学会为了响应这个号召和学习苏联的先进經驗，曾于1956年初指示上海分会举办中学生数学竞賽以提高他們的数学水平．中国数学会上海分会根据总会的指示，并在上海市教育局和中华全国自然科学专門学会联合会上海分会（下面簡称科联）的积极支持下，分别在1956年与1957年的上半年举办了两次中学生数学竞賽．从这两次竞賽的經过情况来看，它对鼓舞青年学生积极向科学进軍和提高中学数学教学质量，都起了良好的推动作用．为了今后更好地和广泛地开展这項竞賽工作，这里簡略地把数学竞賽的意义、步驟和体会写出来，提供同志們参考．

（一）数学竞賽的意义

数学竞賽是苏联的先进經驗，苏联和其他人民民主国家如匈牙利、波兰等已实行很多年了，在我国还是創举．举办数学竞賽对提高数学科学水平及对有特殊才能的学生及早注意他們的培养和发展，都有一定的积极作用．

大家知道，数学是一門很重要的科学．数学是随着生产的需要而发生和发展的，它与其他科学有着密切的联系，尤其是自然科学和工程技术方面就需要足够的数学理論知識，如果沒有足

9·23.14 1·6 17 25 18

够的数学理論知識，一切科学就会寸步难行.特别在当前偉大的建設时期，工农业技术方面必然要向数学提出更高的要求，如果不能及时地把数学科学水平提高，以滿足工农业大跃进的需要，就会影响工农业的迅速发展，所以数学在推动工农业生产发展上具有重大的意义.正因为数学是一門从现实中来，到现实中去的科学，它对树立人們辯証唯物主义世界观就有很大的帮助.此外，数学又是一門邏輯性較强的学科，学习数学可以訓練人們的邏輯思維，誠如加里宁說："数学是鍛炼思想的体操".由于这些原因，举办数学竞賽就有着特别重要的意义.通过数学竞賽将普遍地引起高中学生对数学的兴趣，和对数学問題自覺的鉆研精神；同时通过竞賽也培养了他們的独立思考能力和对学习的頑强性，因此对他們的学习和工作都有好处.数学在中学里是一門教学时数較多的課程，部分学生对数学本来就有着濃厚的兴趣，如果能利用竞賽的推动作用，經常注意培养他們的思考方法，讓他們做一些題目，就能使一般学生更牢固地掌握数学知識，灵活地运用知識，这样就会大大提高数学教学的质量.另一方面，通过数学竞賽，可以发掘一些对数学具有特殊才能的学生，以便更好地加以培养，使他們的才能得到充分的发揮.

数学竞賽是一种群众性的活动，它和体育竞賽具有同样的广泛性.如果要充分发揮数学竞賽的作用，就必須把这个工作推向每一个学校，使它和体育运动会一样，普遍地和經常地开展起来.这样就有利于中学的数学教学质量的更迅速的提高.在苏联和各人民民主国家称数学竞賽会为奥林匹克，这就可以想象得出他們开展这項竞賽的普遍程度了.以我国的发展情况来看，要做到这一点也不十分困难.第一年举办数学竞賽的只有北京、上海、天津、汉口这四个大城市，但到了第二年举办数学竞賽的城市就比第一年多得多.根据这种发展速度，不到几年就可以做到

相当普遍的程度，奥林匹克这个称呼在我国也将适用。而我国的数学科学水平随着祖国建設的突飞猛进，也将会很快地达到世界先进的水平。

（二）上海市中学生数学竞賽情况

为了便于今后更好地、更广泛地开展数学竞賽工作，并与各地数学竞賽会交流經驗，現在把竞賽过程比較詳細地叙述于后：

（1）**筹备組織工作** 中国数学会上海分会决定举办数学竞賽以后，即行組織上海市中等学校学生数学竞賽委員会，委員由数学会、科联和上海市教育局三方面推定，共17人，設正副主席各一人，全面領导竞賽工作。委員会設秘書、命題和考試三个組，并各設組长領导該組工作。茲将这三个組的職責簡述如下：

秘書組——負責組織宣傳工作、拟訂簡章、編写竞賽問題集、召集会議、处理报名、发榜以及一切經济管理事务等工作。

命題組——負責复賽和决賽的命題、解答、評分标准、試題保密等工作。

考試組——負責編排試場、监考、評閱試卷、統計成績、提出复决賽优胜者初步名单等工作。

（2）**竞賽对象和内容** 参加竞賽的对象为本市普通中学、业余中学及速成中学高中二、三年級在校学生。各校参加复賽名額規定高中二、三年級都不得超过各該年級在校人数的百分之三（这个百分比是根据上海市学生人数决定的）。①

竞賽内容包括各該年級学过的中学数学各科教材，以中学数学教学大綱所規定的范圍为原則。

（3）**竞賽方式** 竞賽方式采用初賽、复賽、决賽三級制。初賽由各校自行命題举行，选拔优胜者参加复賽。复賽和决賽由

① 中等技术学校与中等师范學校由于教材内容不同，不包括在内。

委員会举办，再在参加复赛的学生中选拔优胜者6%—10%参加决赛．最后选出决赛优胜者各年級十名，以决赛成績排定名次．

（4）**报考手續** 报考手續应力求簡化，先由委員会規定报考办法通知各校，依照規定格式（主要包括年級、姓名、学校名称以及該校高二或高三年級的总人数和这次参加复赛的百分比）填写集体报名单送交委員会．規定参加复赛的学生須携带复赛証和学生手册，使用学生手册的目的是培养学生守紀律的习惯，同时不必另繳照片以避免浪費．参加决赛的学生凭本会的通知及学生手册入場．

（5）**宣傳工作** 因为数学竞赛是一种群众性活动，在初次举办的时候，必須把竞赛的意义講清楚，要发动学生普遍参加学校举办的初赛，这样才能符合竞赛的要求．上海市1956年高三学生参加初赛的有4000余人，1957年参加初赛的学生数要比1956年多得多，但以各个年級的总人数来看，还沒有超过50%．我們是通过报告会、当地各种报紙发布新聞和文章以及电台广播等方式进行宣傳的．要做好宣傳工作，就必須得到有关社团和新聞界的支持才能奏效．

（6）**命題工作** 复赛或决赛的命題工作，是一件相当艰巨的工作，因为試題内容包括算术、代数、几何、三角等科目，題目的广度不能超出教学大綱所指定的范圍，但深度却可以适当加深，同时要避免采用与現行教科書上雷同的題目，和众所周知的熟題目，題目要出得不易也不能过难，否則就很难評定成績．因此命題組就必須通知各委員在討論題目前，先出好一定数量的題目（包括各方面）带到討論会上提出研究和評选．根据我們的几次命題情况，每次总是七八个人討論了一个整天，有一次准备出6个題目临时却只完成了5題．每次复决赛的时間都規定150

分鐘，根据以往几次考試情况来看，150分鐘做5—6題还是比較合适的.

(7) **成績評定工作** 复賽和决賽的成績評定工作，因为要决定名次，所以采用百分制記分法来評分，但是我們仍根据五級記分制的精神，着重解題的思想方法和步驟，对偶然性的計算錯誤，扣分較少，并分別題目的难易和分量，規定各題的分数.在評閱試卷时分为6組，每組专看一題，以便尽量做到公平合理，另外还专設一組做核对檢查工作，最后排定名次交委員会审查选取．对决賽成績相同的学生，則參考他們的复賽成績来决定先后.

(8) **授奖大会** 为了使參加竞賽的学生得到更大的鼓励，同时使其他中学生今后积极地投入数学竞賽运动，每一次竞賽結束时都举行了授奖大会.出席授奖大会的包括本届初賽、复賽和决賽的优胜者，高一学生代表、教师、校长及决賽优胜者家長和社会人士等.在会上宣布复賽和决賽优胜者名单，給予复賽和决賽优胜者的光荣称号，并由高等教育局代表宣讀中央高等教育部的命令：决賽优胜者的前三名(指高中三年級学生)，只要他們的政治条件和健康条件符合于本年高等学校招生的标准，准予免試升入指定地区的任何綜合性大学的数学、数学力学、物理、天文等专业学习．复賽和决賽优胜者都发給奖状和奖品等．在会上除首長勉励学生积极向科学进軍的講話外，优胜者代表向党、学校、老一輩数学家以及教师致以感謝和敬意，并表示他們向科学进軍的决心.

(9) **准备与总結工作** 在准备竞賽工作的开始，編写了数学竞賽問題集，內容和要求跟命題标准是一致的.問題集必須在初賽前出版，这样可以提供学生測驗自己的独立思考能力和独立鉆研問題的毅力的标准．而且这不仅对參加竞賽的学生有好

处，就是对其他学生独立思考能力的培养也有好处。准备工作必須有計划有步驟地进行，从上述过程中就可以知道，举办数学竞賽是一件比較复杂細致的工作，只要有一个环节准备不充分（例如命題不当，評分标准不合适）或者考虑不周到，就会影响竞賽的作用。

对每一次竞賽都做了总結工作，为下一次竞賽提供了改进意見。这里特別需要吸收群众的意見，研究改进存在的問題。例如第一屆竞賽对象包括中等师范学校学生，后来才知道中等师范学校的教材內容与普通中学不同，对此，在第二屆时就加以糾正。其次就竞賽的成績作了分析，这項工作对整个数学教学可以提供改进意見，对普遍提高中学数学教学質量，有很大的参考价值。我們把每次的成績分析和試題解答刊登在“数学教学”上，以供大家参考。

（三）几点体会和意見

（1）举办数学竞賽，必須取得当地教育行政部門、科联、社会团体、报社等的支持，在工作中要发动群众，这样对工作的开展有很大的便利。如本会得到上海市教育局、科联以及各方面的支持，并撥給一定的經費，使工作能够順利展开。同时各校行政和数学教研組重視这項工作，做到广泛动員学生，使他們积极投入这个运动，并且使运动普遍經常起来，这样就达到了展开数学竞賽运动的主要目的。此外，复旦大学、华东师大、上海第二师范学院、上海中学教师进修学院和上海市各中学的許多教师同志多方面的协助，也是保証竞賽順利完成的重要因素。

（2）从这两次竞賽情况和成績来看，竞賽的成績是优良的，优胜者的分布面也較广，如第二屆竞賽中高三决賽前十名就分布在9个学校，复賽优胜者44名分布在26个学校，高二的也有

同样的情况．从这两点就可以說明上海市各中学的数学教学质量已有了显著的提高．这应当归功于老师們的辛勤教导和同学們的积极努力，如各校都成立了数学小組，有的組織了校际数学小組，如延安、格致、南洋模范、51中学、上中、市西等六校高二学生組織了校际数学小組，他們除鉆研数学教材外，并自覺地开展小型数学竞赛、专题报告以及专题研究等活动，这对相互学习、相互提高都有很大的益处．虽然如此，但是根据目前情况，学生的数学知識水平还是很不够的．今后还应当更广泛地开展数学竞赛活动，以便发揮它应有的作用．不但大城市可以举办，就是中小城市也可以举办．最好各省市成立永久性的数学竞赛委員会来領导竞赛工作．竞赛方式可由各省市統一命题，采用各地分散、同时举行、集中評定的办法．至于委員人选可由当地数学会、科联和教育行政部門遴选．組織工作由教育行政部門担任較为合适．同时我們还建議举办定期性的全国中学生数学竞赛，由全国数学竞赛委員会統一領导．这样使它象体育竞赛一样，广泛地在全国范圍内开展起来，掀起向科学进軍的热潮．

（3）举办数学竞赛是一件好事，这样的竞赛今后还要普遍經常地展开，因此，必須防止为数学竞赛而造成学生的忙乱現象．要防止参加竞赛的学生单純地为了追求个人的优胜，开早車开晚車地鉆题目，这样不仅影响了学校的正規学习生活制度，也会損害学生的健康．对此必須向学生进行广泛的宣傳教育，說明学习是經常的艰苦的劳动，应着重于平时不断的努力和鉆研，而不是单凭几天或較短时間的突击所能奏效的．同时应特别注意学生鉆一些超过大綱要求的题目或教材，会造成一知半解地理解教材，而忽視了适合于他們知識水平的教材．如果发現有类似的情况，应当及时加以糾正，否则它的危害性是很严重的．

（4）培养青年的目标是又紅又专，除大力培养和提高学生

的数学知識外，更必須培养他們的共产主义品德.因此今后在选拔参加复赛和决赛的学生时，应注意他們的政治条件，也就是应当依照全面发展的原则来考虑它的选拔标准。这样就可避免发生学生死鉆数学題目而不問政治和忽視其他学科的偏向，也就貫彻了中学教育全面发展的方針.

(5) 关于竞赛成績优良的高三学生免試保送升大学的办法，对竞赛虽起了一些推动和鼓舞作用，但我們認为可以改变保送办法，給予优胜学生以实物奖励，并且要特别重視报考学生的政治条件和健康条件．这一点过去是沒有十分注意的．因为只有这样才符合于我們的培养目标，就是使他們成为又紅又专并具有健康体质的新型的为社会主义事业奋斗到底的科学家．

二　上海市1956年数学竞赛复赛試題解答

1. (a) 設 n 为正整数，証明 $13^{2n}-1$ 是 168 的倍数.

解：$\because$ a^n-1 能被 $a-1$ 整除，

又 $\because$ $13^{2n}-1=(13^2)^n-1$，$13^2-1=168$，而 $(13^2)^n-1$ 能被 13^2-1 整除，故 $13^{2n}-1$ 能被 168 整除.

即 $13^{2n}-1$ 是 168 的倍数.

(b) 問具有那种性质的自然数 n，能使 $1+2+\cdots\cdots+n$ 整除 $1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n$?

解法一：根据算术級数求和公式，知

$$1+2+\cdots\cdots+n=\frac{n(1+n)}{2},$$

又 $1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n$ 可以写成 $n!$.

$\dfrac{n!}{\dfrac{n(1+n)}{2}}$是否整数，可以分下列各种情形来討論：

（1）当 n 是奇数时，

如 $n=1$，　　则 $n!=1$，$\dfrac{n(1+n)}{2}=1$，

$$\therefore \qquad \frac{n!}{\dfrac{n(1+n)}{2}}=\frac{1}{1}=1, \text{是整数．}$$

如 $n\geqslant 3$，　　则 $\dfrac{n!}{\dfrac{n(1+n)}{2}}=\dfrac{2\cdot(n-1)!}{1+n}$，

而 $1+n$ 是偶数，它可以分解成两个因数 2 与 $\dfrac{1+n}{2}$．

$$\text{且} \qquad n-1=\frac{n+1}{2}+\frac{n-3}{2}\geqslant\frac{n+1}{2},$$

因此在分子 $2\times(n-1)!$ 中找到与 2 和 $\dfrac{1+n}{2}$ 相同的因数，約簡后

使分母为 1，所以 $\dfrac{n!}{\dfrac{n(1+n)}{2}}$ 是整数。

（2）当 n 是偶数，且 $n+1$ 是可以分成两个不同因数 a, b 的合数时（如 $n=14$，$n+1=15=3\times5$），这个情况与 n 是奇数时相仿．

$$\frac{n!}{\dfrac{n(1+n)}{2}}=\frac{2\times(n-1)!}{1+n}=\frac{2\times(n-1)!}{a\cdot b},$$ a 与 b 都小于 $\dfrac{1+n}{2}$．

$\therefore\quad n-1\geqslant\frac{n+1}{2}>a,\ n-1>b$ ($n>2$ 的偶数).

在 $(n-1)!$ 中一定可以找到两个因数 a 与 b, 因此

$\dfrac{n!}{\dfrac{n(1+n)}{2}}$ 是整数.

(3) 当 n 是偶数, 且 $n+1$ 可以分成两个相同因数 a 的平方数时(最小的可能是 $n=8,\ n+1=9=3\times3$),

则
$$\frac{n!}{\dfrac{n(1+n)}{2}}=\frac{2\times(n-1)!}{1+n}=\frac{2\times(n-1)!}{a^2},$$

$$a\leqslant\frac{n+1}{3}.$$

又 $n-1=\dfrac{2(1+n)}{3}+\dfrac{n-5}{3}$, 当 $n\geqslant8$ 时, 则 $\dfrac{n-5}{3}>1$,

因此得
$$n-1>\frac{2(1+n)}{3}\geqslant2a.$$

故在 $(n-1)!$ 中一定可以找到两个因数 a 与 $2a$ 与分母中的 a^2 相約簡, 因此 $\dfrac{n!}{\dfrac{n(1+n)}{2}}$ 是整数.

(4) 当 n 是偶数, 且 $n+1$ 是質数时, 在 $(n-1)!$ 中, 任何一个因数都小于 $1+n$, 因此 $2\times(n-1)!$ 不可能被 $1+n$ 整除.

$\therefore$ 本題的結論是: n 为一个自然数, 当 $n+1$ 不是質数时(但是 2 除外), 则 $1+2+\cdots\cdots n$ 能整除 $1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n$.

解法二: 由算术級数求和公式, 知

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(1+n)}{2}.$$

$\dfrac{n!}{\dfrac{n}{2}(1+n)}$是否整数，可以从下列情况进行討論：

(1) 当 n 是奇数，即 $n=2k+1$ 时（k 为正整数），则

$$\frac{n!}{\dfrac{n}{2}(1+n)}=\frac{(n-1)!}{\left(\dfrac{1+n}{2}\right)}=\frac{(2k)!}{(k+1)}.$$

因 $2k\geqslant k+1$，故 $k+1$ 必可整除 $(2k)!$。如果 $k=0$，即 $n=1$，只要假定 $0!=1$ 亦不例外。

(2) 当 n 是偶数，即 $n=2k$ 时（k 为正整数），则又要分两种情况进行研究。

(i) 当 $n=2k$，$1+n=2k+1$，而 $2k+1$ 为合数时。

設 $2k+1=a\cdot b$，$a\neq b$，则 a，b 必为奇数，均不大于 $\dfrac{2k+1}{3}$.

$$\therefore\quad \frac{n!}{\dfrac{n}{2}(1+n)}=\frac{2(n-1)!}{1+n}=\frac{2(2k-1)!}{2k+1}=\frac{2(2k-1)!}{a\cdot b}$$

$$=\frac{2[1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots\cdots(2k-4)(2k-3)(2k-2)(2k-1)]}{a\cdot b}$$

$$=2\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2k-3)(2k-1)}{a}\right]$$

$$\cdot2\left[\frac{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(k-2)(k-1)}{b}\right],$$

但 $2k-1\geqslant\dfrac{2k+1}{3}$，和 $k-1\geqslant\dfrac{2k+1}{3}$ $(k\geqslant4)$；

因 $k<4$ 就不适合所設条件.

在 $1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2k-3)(2k-1)$ 中，必能找到一个与 a 相同

的奇数；同理，在 $1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(k-2)(k-1)$ 中，也能找到一个与 b 相同的奇数．故在原式中，$\frac{2(2k-1)!}{a\cdot b}$ 必为整数．

同理，当 $a=b$，或 a、b 再可分解时，所得的結論一样．

(ii) 当 $n=2k$，而 $1+n=2k+1$，而 $2k+1$ 为质数时．

因 $n+1$ 大于 $(n-1)!$ 中每一个数，因此 $2(n-1)!$ 不可能被 $1+n$ 整除．

本題結論：n 为一个自然数，当 $n+1$ 不是质数时（但是 2 除外），則 $1+2+3+\cdots\cdots+n$ 能整除 $1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n$．

2． 解不等式 $10^{2\lg x}+4x-\log_2 32>0$．

解： $10^{2\lg x}=10^{\lg x^2}=x^2$，及 $\log_2 32=5$．

不等式变成 $x^2+4x-5>0$，

得 $x>1$ 或 $x<-5$，

但 $x<-5$ 时，$\lg x$ 无意义，

$\therefore$ 本題的解为 $x>1$．

3． 两块水田之間有一条曲折的水沟（图 1），今要把水沟的两岸变成直綫，而每块水田的面积不变，

(a) 如果 A、A' 两点不变，則水沟应如何配置？

(b) 如果 A 点不变，而要求水沟两岸平行，則水沟又应如何配置？

各說明其方法．

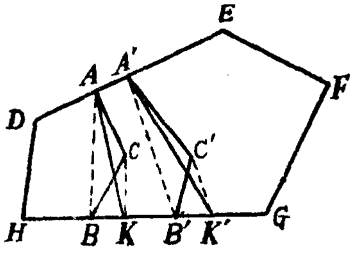

图 1

解： (a) 它的要求是把多边形变成边数少 1 的等积多边形，且 A、A' 两点不变．

作法：联 AB，作 $CK \parallel AB$，联 AK。仿此作出 $A'K'$。

(*b*) 它的要求可从(*a*)所得的四边形 $AA'K'K$ 变成一等积的梯形 $AKNM$，使 $NM \parallel AK$。

解析：令 MN 为所求作的綫(图 2)。

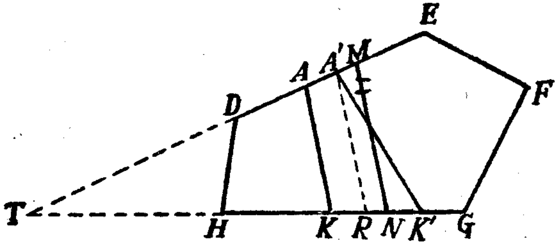

图 2

(1) 如 DA' 不平行于 HK'，则延长 $A'D$ 及 $K'H$ 使相交于 T。

作 $A'R \parallel AK$，

$\triangle TA'R \sim \triangle TMN$，

$\triangle TA'R$ 的面积：$\triangle TMN$ 的面积 $= \overline{TR}^2 : \overline{TN}^2$，

但 $\triangle TMN = \triangle TA'K'$，

$\therefore$ $\triangle TA'R$ 的面积：$\triangle TA'K'$ 的面积 $= \overline{TR}^2 : \overline{TN}^2$；

又 $\triangle TA'R$ 与 $\triangle TA'K'$ 若分别以 TR 与 TK' 为底时，则为等高的三角形，

$\therefore$ $\triangle TA'R$ 的面积：$\triangle TA'K'$ 的面积 $= TR : TK'$。

因此得 $$\overline{TR}^2 : \overline{TN}^2 = TR : TK',$$

或 $$\overline{TN}^2 = \frac{\overline{TR}^2 \cdot TK'}{TR} = TR \cdot TK',$$

$$\therefore \quad TN = \sqrt{TR \cdot TK'}.$$

作法：延长 $A'D$ 与 $K'H$ 相交于 T。