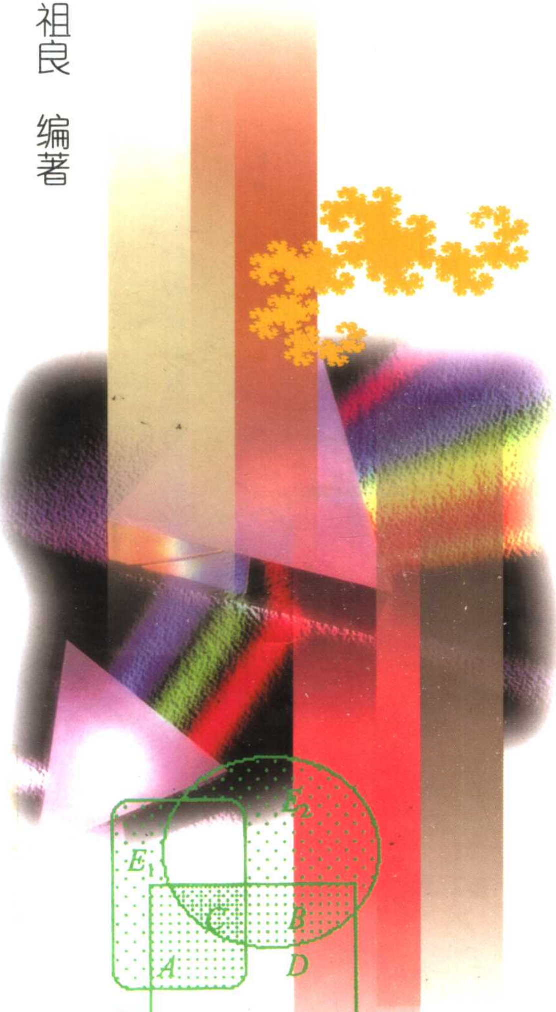
实变函数基础

SHIBIAN HANSHU JICHU SHIBIAN HANSHU JICHU

童武　马祖良　编著



首都师范大学出版社

实变函数基础

童　武　马祖良　编著

首都师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实变函数基础/童武,马祖良著. - 北京:首都师范大学出版社,1999.7(2001 重印)

ISBN 7-81064-088-7

Ⅰ. 实… Ⅱ. ①童… ②马… Ⅲ. 实变函数 Ⅳ. 0174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 29268 号

SHIBIAN HANSHU JICHU

实变函数基础

首都师范大学出版社

(北京西三环北路 105 号 邮政编码 100037)

北京首师大印刷厂印刷 全国新华书店经销

2001 年 7 月第 2 版 2001 年 7 月第 1 次印刷

开本 850×1168 1/32 印张 7.375

字数 183 千 印数 0,001~3,000 册

定价 14.00 元

序

《实变函数基础》是根据教委颁布的《高等师范院校“实变函数与泛函分析”教学大纲》的要求编写而成，并在教学实践中获得了很好的效果．当前我国适用于师范院校本科“实变函数论”课程的教材并不多，本书的出版将会为高等师范院校、教育学院以及续本科成人教育提供一本比较合适的教材．它对广大中学教师、理工类大学生及一般科技工作者也具有参考价值．

我认为本书的一个特色是它在引进重要的概念时能阐明概念的来龙去脉，从而帮助初学者理解其实质，并对数学的抽象与概括能够有正确的认识，这对于提高本课程的教学质量有十分重要的作用．

我还希望我国各类高等院校能够努力加强本课程的教材建设，使今后能有更多更好的适用于不同类型院校的实变函数教材问世，促进我国高等院校实变函数课程教学水平的不断提高，特为之序．

程民德

1993 年 5 月于北京

前　言

本书是编者根据高等师范院校《实变函数与泛函分析》教学大纲，在学习参考兄弟院校及国外同类教材的基础上编写而成. 从 1985 年起，以讲义形式在我校数学系本科各届教学中试用. 其间，我们认真听取了广大师生的意见，先后经过四次较大改动，1996 年底，我校要对《实变函数》课程建设进行全面验收，教材建设是其中一项重要内容. 因此，为了教材更能切合学生实际，同时也为了适应五天工作制，缩短学时的实际需要，1996 年暑假，经教研室集体讨论后，又做了一次修改，最终定稿，形成本书.

全书除引言外，共分六章：集合与点集，测度理论，可测函数，积分理论，微分与不定积分，*函数空间 $L^p(E)(1\leq p\leq+\infty)$.

为了突出师范特色，编写时，我们注意了以下原则：第一，取材压缩了集合与点集的内容，使得宏观上，Lebesgue 测度论与 Lebesgue 积分论的主线更为鲜明；第二，除了在引言中介绍(L)积分形成的背景和本课程的框架结构外，分章讨论时努力阐述清楚重要概念形成的历史脉络，核心概念与关键定理的本质特点，相关概念之间的区别与联系，以便于读者自学；第三，我们在书末绘制了一些小结性的框图，以使读者能够更直观，更形象地领悟有关内容；第四，与中学教学有关的内容及有待深入了解的问题分别放在附录中或打上星号以示与正文的区别；第五，习题配置力求难易程度适宜，每节后的练习注意与内容的衔接配套，每章后的习题可供选做，也可作为习题课选题时的参考.

本书在编写和试用过程中得到中国科学院院士程民德教授，北京大学数学科学院函数论教研室主任周民强教授的亲切关怀和热情鼓励. 程民德教授还为本书写了序言，在此，编者对他们表示衷心的感谢.

本书的引言及第一至第六章，附录Ⅳ、Ⅵ由童武编写，附录Ⅰ、Ⅱ、Ⅴ、Ⅶ、Ⅸ（包括小结性的框图）由马祖良编写绘制，附录Ⅲ由樊磊编写.

教研室的王尚志、范秋君、李忠凯、王万良、管冰辛、周祖逵、沈锡文、付珉、刘芸、林萍、尹克新等同志在试用本书过程中，或在讨论修改稿时都提出过许多宝贵意见，在此一并致谢.

尽管我们尽了很大努力，但由于学识浅陋，经验不足，可能未能实现初衷，缺点甚至错误在所难免，恳切地希望读者批评指正.

编者

1996.8.31

目录

引　言

虽然数学分析研究的对象就是实变数的函数，然而《实变函数》所指的并不是数学分析.《实变函数》是以实数理论和集合论为基础的现代分析学科，形成于20世纪初期，它把数学分析（也称作古典分析）中的有关概念、理论精确化，做了更深刻的探讨，它的中心内容是Lebesgue积分论．实变函数对于理解、掌握近代数学思想是必不可少的．对于深入学习后续课程起着承上启下的作用.

实变函数理论是怎样产生的呢？

一、Riemann积分的局限

数学分析中由球面积、变力做功等问题引出的区间$[a, b]$上有界函数$f(x)$的定积分（即一维Riemann积分，简称(R)积分）的理论，在19世纪经过Riemann和Darboux的进一步完善，至今仍然是微积分学的最重要基础理论之一．它对数学理论本身的发展，对其它科学技术的应用都产生着极其深远的影响．然而随着科学技术的发展以及Cantor创始的关于集合论的研究，人们越来越感到(R)积分的严重缺陷，主要表现在

1. (R)可积函数必须是“差不多”连续的，故适用的范围较窄.

设$f(x)$为$[a, b]$上的有界函数，对$[a, b]$做分划Δ:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

后， $f(x)$在$[a, b]$上(R)可积的充分必要条件是$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0$ (*)，其中ω_i是$f(x)$在子区间$[x_{i-1}, x_i]$上的振幅．$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1, 2, \cdots, n)$，$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{x_k\}$是分划$\Delta$的模．这说明$f(x)$在$[a, b]$上是否可积与它的连续性密切相关．因为(*)式表明，当$\lambda\to 0$时，振幅ω_i不能缩小的相应子区间的长度总和必须能够充分小．换言之，这个条件要求函数$f(x)$在$[a, b]$上不连续点全体应该能让总长度可以任意小的区间盖住．若用后面讲到的测度语言表述即：$f(x)$不连续点全体构成一个零测

集．从而(R)可积只适用于与连续函数“差不多”的很窄的一类函数，作为典型的例子，本来[0, 1]上的不太复杂的 Dirichlet 函数

$f(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1]\cap Q\\ 0 & x\in[0,1]\setminus Q\end{cases}$，在[0, 1]上处处不连续，从而(R)不可积．由此可见(R)可积函数类的范围比较窄小．

2. (R)可积函数列的极限与积分交换次序的条件比较严苛，限制了(R)积分运算的灵活性．

如果说，人们在考虑求面积，求重心，求变力作功等问题时，连续函数或具有有限个间断点的函数一般还够用的话，那么，当人们从研究机械运动进一步深入到研究热传导和波的传播等新的运动形式以后，数学上仅仅考察这些函数就不够用了．必须相应地考察函数项级数，特别是收敛的函数项级数的和函数所定义的函数．因此，积分与极限交换次序的问题就显得非常迫切与必要了．而且希望能在比较宽松的条件下进行这种运算次序的交换．

大家熟知，在数学分析中，都是用(R)可积函数列在所给区间上一致收敛来保证极限运算与积分运算可以交换次序，但是实际上这一要求太过严苛，往往得不到满足．

例 1 设$f_n(x)=\begin{cases}1 & 1/n\le x\le 1 \text{或} x=0\\ 0 & 0< x<1/n\end{cases}$ $(n=1, 2, \cdots)$，有$\{f_n(x)\}$在[0, 1]上点点收敛于 0， 但不一致收敛于$f(x)\equiv 0\ (x\in[0, 1])$，然而仍然有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0=\int_0^1 f(x)dx\ .$$

将条件减弱一些，也只有(R)积分意义下的有界收敛定理(见 Amer. Math. Monthly, 78, 1980)，这个定理要求(R)可积函数列$\{f_n(x)\}$在区间$[a, b]$上一致有界，点点收敛于$f(x)$，且极限函数$f(x)$在$[a, b]$上必须(R)可积，则有$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$．正象我们知道的，一列非负、渐升、一致有界的(R)可积函数列的极限函数未必具有(R)可积性．

例 2 将[0, 1]中的有理数全体$[0, 1]\cap Q$排成数列为$\{r_n\}$，令

$$f_n(x)=\begin{cases}1 & x=r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n \\ 0 & x\neq r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n\end{cases} \quad (n=1, 2, \cdots),$$

显然$\{f_n(x)\}$在$[0, 1]$上非负、渐升、一致有界，且对每个固定的 n，

$$\int_a^b f_n(x)dx = 0 \quad (n=1, 2, \cdots),$$

但是 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1]\cap Q \\ 0 & x\in[0,1]\setminus Q\end{cases}$ 即极限函数为 Dirichlet 函数，(R)不可积．从而谈不上积分号下取极限．

从例 2 不难发现，若对$[0, 1]$中有理数给出另一排法，即$[0, 1]\cap Q=\{u_n\}$，令

$$g_n(x)=\begin{cases}1 & x=y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n \\ 0 & x\neq y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n\end{cases} \quad (n=1, 2, \cdots),$$

则$\{g_n(x)\}$也在$[0, 1]$上非负、渐升、一致有界，对每个固定的 n，$\int_0^1 g_n(x)dx=0(n=1,2,\cdots)$,同时有 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)=f(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1]\cap Q \\ 0 & x\in[0,1]\setminus Q\end{cases}$，容易得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)dx$，但$\int_0^1 f(x)dx$ 仍不存在．这里积分列的极限值对不同函数列相同，说明此极限值不依赖于选取的函数列，而依赖于极限函数 $f(x)$．为了使积分与极限交换次序畅通无阻何必不干脆定义极限函数 $f(x)$的积分为$\int_0^1 f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$ 呢！这表明(R)积分原有的定义限制了极限运算的灵活性．

3. (R)积分运算不完全是微分运算的逆运算，Newton–Leibniz 公式的使用也受到局限．

微积分学基本定理是微积分学的中枢．它有两层意思：一方面，(R)可积函数 $f(x)$在所有连续点处成立着$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$．

另一方面，就是 Newton–Leibniz 公式

$$F(x)-F(a)=\int_a^x F'(t)dt.$$

它表明可微函数 $F(x)$的导函数 $F'(x)$必须在$[a, b]$上(R)可积时，N–L

公式成立．不过我们注意到导函数并非永远(R)可积．

例 3 设

$$F(x)=\begin{cases} x^2\sin(x^{-2}) & 0<x\le 1 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

在[0, 1]上有

$$F'(x)=\begin{cases} 2x\sin(x^{-2})-2x^{-1}\cos(x^{-2}) & 0<x\le 1 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

因为 $F'(x)$在[0, 1]无界，故(R)不可积，此时$\int_0^x F'(t)dt$ 无意义，更无从谈 N–L 公式成立．

早在 1881 年意大利数学家 Volterra，已经给出 $F'(x)$在$[a, b]$有界但 Riemann 不可积的例子(见文献[8]P343–345)．于是对于这类 (R) 不可积函数 $F'(x)$，无法使用 N–L 公式．因此(R)积分运算只能部分地成为微分运算的逆运算．

4. $[a, b]$上(R)可积函数全体 R$[a, b]$是不完备的度量空间．

对任意 $f, g\in$ R$[a, b]$，规定距离为

$$\rho(f, g)=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

则 R$[a, b]$成为度量空间，但不完备，这是指如果$\{f_n\}$是 R$[a, b]$中基本列(Cauchy 列)，即

$$\lim_{n,m\to\infty}\rho(f_n, f_m)=0$$

但$\{f_n\}$不一定是 R$[a, b]$中的收敛点列，即不一定存在 $f\in$ R$[a, b]$使

$$\lim_{n\to\infty}\rho(f_n, f)=0$$

而近代泛函分析的许多基本技巧，最终都要用到所讨论空间的完备性．

由于 Riemann 积分存在着诸多的缺陷，使得人们长期以来致力于对它进行改进．直到 1902 年法国数学家 Lebesgue 成功地引入一种积分，后人称之为 Lebesgue 积分，简称为(L)积分，在很大程度上改进了 Riemann 积分．

二、Lebesgue 积分的产生

有界函数 $f(x)$在$[a, b]$上(R)可积的关键在于，把$[a, b]$分划成几个小子区间后，$f(x)$在多数子区间$[x_{i-1}, x_i]$上的振幅ω_i要很小，这样必然把在多数子区间上振幅不能缩小的函数排除在可积函数之外，这时分划加细，无非就是所有子区间长度缩短，由于不顾及子区间上函数值分布状况，即使加细分划，也于事无补.

Lebesgue 仍然采用分划、求和、取极限的方法定义积分，不过他分划$[a, b]$的方法不同．设 m, M 是 $f(x)$在$[a, b]$上的下界与上界，对任意的$\lambda>0$，令

$$m=y_0<y_1<\cdots<y_{i-1}<y_i<\cdots<y_n=M$$

使 $y_i-y_{i-1}<\lambda$，记

$$E_i=\{x|\ x\in[a, b]\ 且\ y_{i-1}\leq f(x)<y_i\}\quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

于是$[a, b]$被分划成$\{E_i\}$的并集，即$[a, b]=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$，这样通过在值域中插入分点的方法，把那些在其上函数值差异不大的点 x 组合起来，用点集 E_i 代替(R)积分分划中的子区间$[x_{i-1}, x_i]$，显然可以实现 $f(x)$在 E_i 上振幅不大的目的($i=1, 2, \cdots, n$).

求和时，与第i 个子区间长度$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ 相应的应该是 E_i 的“长度”，由于 E_i 并不一定是区间，而可能是杂乱无章的点集，作为长度概念的推广，姑且称为点集 E_i 的测度，记为 mE_i．于是首先要求建立一种测量点集测度的方法，这必须符合人们认识事物的常理．比如，应该有

①当 $E=[0, 1]$时，$m([0, 1])=1$

②当 $E_1\subset E_2$ 时，$mE_1\leq mE_2$

③当 $E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j)$时，$m(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}mE_i$．在这些限制下，人们不能设计出使一切点集都能有测度的方案．不过要使新的积分思想能够实现，我们要求形如 E_i 的那种点集必须具有测度，即 E_i 必须是“可测的”，这个要求与函数 $f(x)$的性质有关．除了要求 $f(x)$具有有界性之外，还自然应当满足点集 $E=\{x|\ x\in[a, b]且\alpha\leq f(x)<\beta\}$对任意实数 α,β ($\alpha<\beta$)为可测集．称这种函数为可测函数，这表明新的积分中考

察的函数对象属于可测函数范围.

于是对$[a, b]$作了新的分划之后，再作和（依赖于测度的实数值）

$$\underline{S}=\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\cdot mE_{i,}\qquad \overline{S}=\sum_{i=1}^{n} y_{i}\cdot mE_{i}$$

类似于(R)积分对和式的处理，当$\lambda\to 0$时，取其共同的极限值（如果存在的话）为$f(x)$在$[a, b]$上的(L)积分，记为$\int_{[a,b]}f(x)dx$.

Lebesgue 曾经用十分生动的语言对他建立的积分思想作了个比喻："我必须偿还一笔钱，我在口袋中摸出来各种不同票面的钞票和分币，在我逐一依次地数给债主直到全部应还的数目，这就是 Riemann 积分. 但是我可以有另外一种做法：把我的钱全部拿出来，先按票面值加以分类，把同币值的钞票叠到一起，同样币值的分币放到一块，然后再一起付清应还的数目，这就是我的积分."

因此，为了建立起(L)积分理论，我们应当做以下几件事情：

1.将"区间长度"的概念推广到 n 维欧氏空间中相当一般的点集（即可测集），建立起集合测度的概念. 而为了研究点集的可测性，应该先对 $\mathbf{R}^n$ 中点集的性质加以分析讨论；作为准备知识和基础知识，首先应该对集合及其运算，集合的对等及可数集等知识做一些了解.

2.对主要函数对象—可测函数的概念与性质进行研究.

3.在此基础上建立起(L)积分理论，它是实变函数的中心内容.

4.在(L)积分意义下，研究一维微分与不定积分的关系.

5.* 将函数空间 $L^p(E)(1\le p\le\infty)$作为实例，讨论(L)积分的应用.

第一章　集合与点集

§1　集合及其运算

在中学里，关于集合及集合的并、交、差与补差运算均已学过，作为复习，也为了叙述的完整，我们将有关概念和定理仅写出，而不作证明.

一、集合及其运算

定义 1.1　若 A，B 为二集合，如果 A 的每个元素都属于 B，则称 A 是 B 的子集，也称 A 含于 B(或 B 包含 A)，记为 $A\subset B$(或 $B\supset A$)，若 $A\subset B$ 且至少有一个元素 $x\in B$ 而 $x\notin A$，则称 A 是 B 的真子集，记为 $A\subsetneqq B$.

若 $A\subset B$ 或 $B\subset A$ 同时成立，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

定理 1.1　设 A，B，C 为三个集合，则有

①$A\subset A$，$A=A$

②$A\subset B$，$B\subset C$, 则 $A\subset C$；$A=B$，$B=C$，则 $A=C$.

定义 1.2　设有一族集合$\{A_\alpha | \alpha\in J\}$，其中 J 为指标集，α 在 J 中取值，称集合$\{x|$ 存在某个$\alpha\in J$,使 $x\in A_\alpha\}$为这族集合的并集，记为$\bigcup\limits_{\alpha\in J}A_\alpha$.

特别，两个集合 A，B 的并集为 $A\cup B=\{x|\ x\in A$ 或 $x\in B\}$

定义 1.3　设有一族集合$\{A_\alpha | \alpha\in J\}$，其中 J 为指标集，α在 J 中取值，称集合$\{x|$对一切 $\alpha\in J$,有 $x\in A_\alpha\}$为这族集合的交集，记为$\bigcap\limits_{\alpha\in J}A_\alpha$. 当$\bigcap\limits_{\alpha\in J}A_\alpha=\varnothing$时，称这族集合不交，对任意$\alpha$，$\beta\in J$，若当$\alpha\neq\beta$ 时，总有 $A_\alpha\cap A_\beta=\varnothing$，称这族集合两两不交.

特别，两个集合 A，B 的交集为 $A\cap B=\{x|\ x\in A$ 且 $x\in B\}$.

定理 1.2

① $A\cup A=A$，$A\cap A=A$

② $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

③ $(A\cap B)\subset A\subset(A\cup B)$

④ $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

⑤ 若 $A_\alpha\supset C(\forall\alpha\in J)$，则 $\bigcap_{\alpha\in J}A_\alpha\supset C$

⑥ 若 $A_\alpha\subset C(\forall\alpha\in J)$，则 $\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha\subset C$.

⑦ $\bigcup_{\alpha\in J}(A_\alpha\cup B_\alpha)=\left(\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha\right)\cup\left(\bigcup_{\alpha\in J}B_\alpha\right)$

⑧ $A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in J}B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in J}(A\cap B_\alpha)$

定义 1.4　设 A，B 为二集合，称集合 $\{x|\ x\in A$ 且 $x\bar{\in} B\}$ 为 A 减 B 的差集，记作 $A\backslash B$，或者 $A-B$.

又若 $A\subset X$，则 $X\backslash A$ 称作 A 对 X 的补集，记作 A_X^c，没有必要标明集合 X 时，就简记为 A^c.

通常，在我们考察的问题中，一切集合都是某个确定的“大”集合 X 的子集．此时称 X 为全集．于是任一集合 A 取补集 A^c 后，就将全集 X 一分为二：$X=A\cup A^c$．A 和 A^c 相反相成，经常可通过这一面来研究另一面.

定理 1.3

① $X^c=\varnothing$,　$\varnothing^c=X$

② $A\cup A^c=X$，$A\cap A^c=\varnothing$

③ $(A^c)^c=A$

④ $A\backslash B=A\cap B^c$

⑤ 若 $A\supset B$，则 $A^c\subset B^c$

⑥ $\left(\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in J}(A_\alpha^c)$；$\left(\bigcap_{\alpha\in J}A_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha\in J}(A_\alpha^c)$

其中⑥式称作 de Morgan 公式，或对偶原理，是一个很有用的公式.