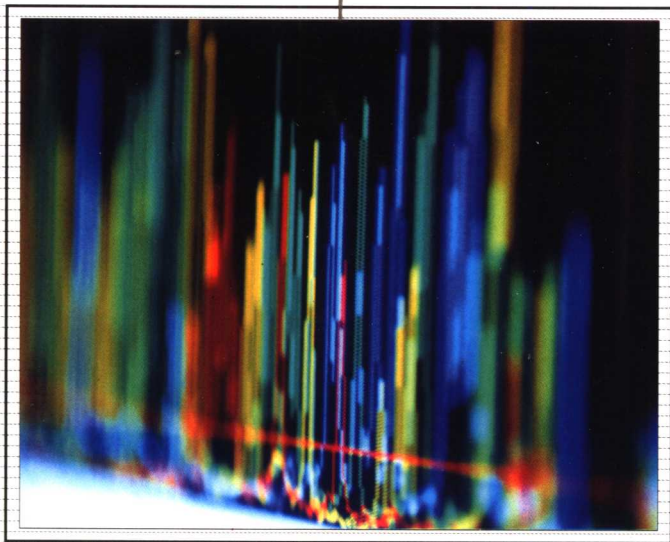


— 研究生系列规划教材 —

光学原理教程

Basic Course on Principles of Optics

吴健 严高师 编著



国防工业出版社

National Defense Industry Press

内 容 简 介

本书以经典电磁理论的观点,较详细地分析了光学学科的一些基本问题——干涉、衍射、成像、像差等,详细地分析和推演了近年来学术界十分感兴趣的部分相干光理论,并简要论述了部分相干性理论在光束质量方面的应用。最后,用经典统计理论,阐述了光辐射的统计特性。

本书可作为光学学科和光学工程学科的硕士研究生的基础教材,也可供从事光学工程研究的研究人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

光学原理教程 / 吴健, 严高师编著. —北京: 国防工业出版社, 2007. 1

研究生系列规划教材

ISBN 7-118-04848-8

I. 光... II. ①吴...②严... III. 光学-研究生-教材 IV. 043

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 131616 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 印张 23 字数 414 千字

2007 年 1 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 36.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422

发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535

发行业务:(010)68472764

序 言

从 20 世纪 80 年代至今的 20 多年来,信息电子科学技术的发展令人瞩目。以无线通信和互联网技术为代表的现代信息电子技术极大地促进了经济、社会的发展,并深刻地改变了人类生活。如今,信息电子技术不仅自身已蓬勃发展为强大的新兴产业,它对各传统产业在技术进步上的促进也是有目共睹的。而在国防建设和军事技术的发展中,信息电子技术的重要性更为突出,因为现代化战争最关键的环节就是信息的获取、控制与对抗等电子技术的较量。

正因为迅猛发展的信息电子技术对当今社会发展具有如此重要的意义,因此,国内各高校都极其重视信息电子类相关学科的发展、相关专业的成长和相关专业教学水平的提高。而在这一巨大的努力和付出中,研究生教育质量的提升和研究生教材建设则是至关重要的一环。

电子科技大学正是基于上述认识,近年来加大了电子信息类教材建设的力度。我校的学科专业涵盖了从电子材料、电子器件、电路、信号、控制直到各种电子系统的较为完整的电子信息领域,学校极为重视国内外研究生课程的设置和教材内容的比较研究,并建立了专项基金,用于资助具有一定学术水平的研究生教材的编写与出版。

当然,教材建设也是一项学术性很强的工作。研究生教材既要体现理论上的基础性和系统性,又要尽可能地反映本领域研究的最新成果和进展,要求较高。另一方面,高校的骨干师资力量大多既要承担繁重的科研工作,又要承担大量的教学任务,加之各位教授的专业背景不同,教材的最终质量和使用效果仍需通过实践去检验。因此,我们诚恳希望使用这些教材的各个院校的广大师生直言批评,不吝指正,使我校的教材建设能够越做越好。

电子科技大学
二〇〇五年十月十九日

前 言

近年来,报考光学或光学工程学科的研究生越来越多,其中跨学科报考的学生占了很大的比例。研究生的基础状况参差不齐,专业基础课的讲授必须适应这样一种新的情况。一方面,使从光学本科出身的学生,能通过课程的讲授,对光学的基础原理有更深入的理解;另一方面,让缺少光学基础的学生,也能通过课程的学习,获得必要的基础知识和光学学科的基本思维方法。

对于基础课和专业基础课,作者一向认为,最重要的是通过对课程内容的讲授,传达给学生一种思想,一种科学的思维方法,即观察、假设、推理、预测、验证,而不仅仅是内容的罗列、分类、归纳和应用。本着这一宗旨,本书在编写的时候,注意了以下几点。

(1) 在选材方面,以光学宏观理论的基本问题,即光的电磁理论,几何光学和成像理论,干涉和衍射,像差和传递函数以及对相干性理论的深入演绎为基点。

(2) 在阐述中,着重阐述清楚基本概念及其数学基础。对于推演而得出的结论,有些过于繁琐的数学过程就从简了;但对于结论中体现出的物理含义,则尽可能讲得详细、清楚一点,并结合一些实际应用加以展开。

(3) 学科在发展过程中的重大历史事件,是启发学生思维的重要内容。结合课程内容的展开,本书叙述了光学学科发展历史的一些逸事,希望对活跃读者的思想有所帮助。

本教材的前8章,供硕士研究生60个学时的教学所用。后3章较深入地分析了光的部分相干性理论,可以作为硕士生的补充读物,也可以作为博士生专业基础课的参考教材。

编著者水平有限,恳请光学界的同仁、专家提出宝贵意见。

在教材的编写过程中,作者曾与王仕墀教授、叶玉堂教授、郭永康教授、华欣生研究员、张雨东研究员、陈亦庆研究员、许冰研究员等进行过有启发性的讨论,许冰研究员还提供了他们的相关研究成果。卞学丽、付嫻嫻两位女士为书稿的录入和插图的制作做了大量工作,郑春艳同学对习题付出了很多努力,电子科技大学研究生院和国防工业出版社的孙严冰编辑对本教材的编写给予了大量的支持。同时,本书得到了“电子科技大学研究生教材建设基金”的资助,在此一并表示感谢。

编著者 2006年10月

目 录

第 1 章 光的电磁理论	1
1.1 电磁场	2
1.1.1 麦克斯韦电磁方程	2
1.1.2 物质方程	3
1.1.3 突变面处的边界条件	4
1.1.4 电磁场的能量定律	7
1.2 波动方程和光速	8
1.3 标量波	10
1.3.1 平面波	10
1.3.2 球面波	12
1.3.3 相速度、群速度	13
1.4 矢量波	17
1.4.1 光的横波特性	17
1.4.2 光波的偏振态	18
1.4.3 任意形式的谐矢量波	24
1.5 平面光波在各向同性介质界面上的反射和折射	26
1.5.1 反射定律和折射定律	26
1.5.2 菲涅耳公式	27
1.5.3 反射率和透射率	32
1.5.4 反射和透射的偏振特性	35
1.5.5 全反射与倏逝波	38
1.6 光在分层介质上的传播	42
1.6.1 单层膜的特征矩阵	42
1.6.2 多层膜的特征矩阵	45
1.6.3 反射系数和透射系数	45
1.6.4 周期性分层介质	49
第 2 章 几何光学基础	53

2.1	几何光学与电磁理论	53
2.1.1	程函方程	53
2.1.2	光线和几何光学的强度定律	55
2.2	光线的一般性质	57
2.2.1	光线方程	57
2.2.2	折射定律和反射定律	60
2.3	几何光学的其它基本定律	61
2.3.1	拉格朗日(Lagrange)积分不变式	61
2.3.2	费马(Fermat)原理	61
2.3.3	马吕斯(Malus)—杜平(Dupin)定理	62
第3章	光学成像的几何理论	64
3.1	理想成像和投影变换(Projective Transformation)	64
3.1.1	投影变换的一般考虑	64
3.1.2	轴对称投影变换	65
3.2	共轴投影变换成像的一般描述	67
3.2.1	符号规定	67
3.2.2	共轴投影系统的基点和基面	68
3.2.3	共轴投影光学系统的成像关系	69
3.2.4	共轴投影光学系统的组合	71
3.3	哈密顿特征函数	72
3.3.1	点特征函数	72
3.3.2	混合特征函数	73
3.3.3	角特征函数	75
3.3.4	旋转折射面的角特征函数的近似	76
3.4	高斯光学	79
3.4.1	旋转折射面	80
3.4.2	单透镜	82
3.4.3	薄透镜	83
3.4.4	物像空间不变式(拉—亥不变式)	84
3.5	光线追迹	85
3.5.1	斜子午光线	85
3.5.2	傍轴光线	87
3.5.3	弧矢光线	87
第4章	光波的干涉和干涉系统	91

4.1	两平面单色光波的干涉	92
4.2	光波产生干涉的条件	94
4.3	分波阵面法干涉	95
4.3.1	杨氏干涉实验	95
4.3.2	干涉条纹的可见度	99
4.3.3	光源尺度的影响	101
4.3.4	光源的非单色性的影响和时间相干性	103
4.4	分振幅法——平板的双光束干涉	106
4.4.1	平行平板产生的等倾干涉	107
4.4.2	薄膜产生的等厚干涉	110
4.4.3	条纹的定域	114
4.5	双光束干涉仪器	118
4.5.1	迈克尔逊(Michelson)干涉仪	118
4.5.2	斐索(Fizeau)干涉仪	120
4.5.3	泰曼—格林(Twyman - Green)干涉仪	121
4.5.4	傅里叶变换光谱仪	122
4.5.5	马赫—泽德(Mach - Zehnder)干涉仪	123
4.6	多光束干涉	125
4.6.1	平行平板的强度分布公式	125
4.6.2	干涉条纹的特征	128
4.6.3	干涉条纹锐度和条纹细度	129
4.6.4	频率特性	130
4.7	法布里—珀罗(Fabry - Perot)干涉仪	131
4.7.1	F-P干涉仪的结构与工作原理	132
4.7.2	F-P干涉仪用做光谱线的精细结构研究	134
4.7.3	角色散	137
4.8	干涉滤光片	137
第5章	衍射理论基础	141
5.1	惠更斯—菲涅耳原理	142
5.2	基尔霍夫衍射公式	143
5.2.1	基尔霍夫积分定理	144
5.2.2	基尔霍夫衍射理论	146
5.2.3	菲涅耳近似和夫琅和费近似	149
5.3	夫琅和费衍射	153

5.3.1	矩形孔衍射	153
5.3.2	单狭缝衍射	156
5.3.3	圆孔衍射	157
5.3.4	其它形状光孔的衍射	160
5.4	夫琅和费衍射和傅里叶变换	161
5.4.1	夫琅和费衍射的意义	162
5.4.2	夫琅和费衍射图样的特点	163
5.5	光学成像系统的分辨本领	165
5.5.1	瑞利判据	165
5.5.2	几种光学成像系统的分辨本领	167
5.6	夫琅和费多缝衍射	170
5.6.1	多缝衍射的光强分布	171
5.6.2	光强分布公式的讨论	172
5.7	衍射光栅	174
5.7.1	光栅的分布特性	175
5.7.2	正弦(振幅)光栅	177
5.7.3	闪耀光栅	180
5.7.4	光栅光谱仪	182
5.8	菲涅耳衍射	183
5.8.1	衍射积分	183
5.8.2	菲涅耳积分	184
5.8.3	菲涅耳直边衍射	188
第6章	像差概论	190
6.1	广角光锥的无像散条件	190
6.1.1	关于理想成像光学系统的概要	190
6.1.2	正弦(Sine)条件和赫谢尔(Herschel)条件	191
6.1.3	像散光锥(Astigmatic Pencils of Rays)	193
6.2	波像差与光线像差	194
6.2.1	研究几何像差的前提条件	194
6.2.2	几种常见的几何像差	196
6.2.3	波像差与光线像差	200
6.3	衍射像差	208
6.4	像差函数的展开	211
6.4.1	像差函数的泽尼克(Zernike)圆多项式的展开	211

6.4.2	初级像差的容差条件	212
6.5	出瞳波阵面的校正——自适应光学简介	213
第7章	扩展物体的成像	217
7.1	相干照明成像	217
7.2	非相干照明成像	220
第8章	光度学与色度学	225
8.1	光度学的基本概念	225
8.1.1	一般描述	225
8.1.2	光度学参数的物理考虑	227
8.1.3	辐射度量的实用单位	229
8.2	传播过程中的辐射度量	230
8.2.1	传播过程中的辐照度	230
8.2.2	传播过程中的辐射亮度	231
8.2.3	介质交界面的辐射亮度	232
8.2.4	成像光学系统的光照度	233
8.3	色度学初步	236
8.3.1	颜色的基本描述参数	236
8.3.2	色光混合和色料混合	238
8.3.3	色度坐标和色度图	239
8.3.4	1931CIE 标准色度系统	240
8.3.5	CIE 1964 补充标准色度系统	249
8.3.6	在 CIE 色度图中的颜色参量	250
第9章	光场的二阶相干性基础——标量场理论	253
9.1	二阶相干性的基本描述	254
9.1.1	时间相干性	254
9.1.2	空间相干性	255
9.2	典型相干实验的数学描述	256
9.3	准单色条件和互谱纯条件	261
9.4	互相干性的传播	267
9.4.1	传播方程的一般考虑	267
9.4.2	互相干函数的极限形式	270
9.4.3	范西特—泽尼克(Van Cittert - Zernike)定理	273
第10章	相干性与辐射	277
10.1	一般考虑	277

10.2	Schell 模型光源,准均匀源	280
10.3	平面上的辐射,二次源	284
10.3.1	一般形式	284
10.3.2	准均匀平面光源的辐射	287
10.3.3	逆问题	289
10.4	等效理论	293
10.5	光束	298
10.5.1	光波场的角谱表述	298
10.5.2	单色高斯光束	301
10.5.3	一般意义上的部分相干光束	304
10.5.4	Gaussian - Schell 模型光束	306
10.5.5	应用实例:激光束的光束质量	313
第 11 章	辐射的统计特性	316
11.1	典型光源的一阶统计特性	316
11.1.1	偏振热光	316
11.1.2	非偏振热光	318
11.1.3	部分偏振热光的数学描述	318
11.1.4	部分偏振热光的一阶统计	327
11.1.5	激光	328
11.2	积分时间问题	330
11.2.1	一般考虑	330
11.2.2	强度积分的概率密度函数	333
11.2.3	互强度与积分时间	334
11.3	光辐射探测的统计基础	340
11.3.1	基本考虑	340
11.3.2	经典随机涨落	342
11.3.3	简并参量	345
附录	习题	347
	参考文献	358

第 1 章 光的电磁理论

光是自然界中最广泛存在的物质之一,人们对光的研究已经有了数千年的历史。当前,人们普遍认为光在本质上是一种波长极短的电磁波,但这种认识至今只有一百多年的经历。最早猜测光与电磁之间有关联的是英国著名科学家法拉第(Faraday)。法拉第的主要研究领域是电磁感应,多年的研究生涯使他相信光与电磁之间存在某种直接的联系,但要证实这个猜想并不容易。经过多次的失败之后,终于在 1845 年,他获得了首次实验上的支持。法拉第自己写道:“我终于成功地使磁曲线或磁力线发了光,并磁化了一条光线。”28 年以后,麦克斯韦(Maxwell)从研究电磁感应出发,进一步发展了法拉第的思想,发表了著名的奠基性的论文《论电和磁》。在这篇论文中,麦克斯韦提出了在空间存在电磁波(论文中称为周期性的位移波)的可能,并计算出“这样一种波的速度非常接近于光速”。由此,麦克斯韦推断电磁现象和光现象在本质上的性质是相同的。光的电磁本质的最后确立,是由洛伦兹在研究光与物质界面作用时完成的。1875 年,洛伦兹发表学位论文《光的反射、折射理论》,在论文中他把光看成是电磁振动,并认为在介质分界面上, D (电位移矢量)、 B (磁感应强度矢量)的法线分量和 E (电场强度矢量)、 H (磁场强度矢量)的切线分量应保持连续,成功地推出当时已知的各种界面上的光学性质。该论文还讨论了晶体光学和金属光学的问题。1892 年,洛伦兹发表《麦克斯韦理论及其在运动物体上的应用》,全面地站在麦克斯韦理论的立场上,把已获得的电磁光学的主要结果公式化,最终形成了光的经典电磁场理论。

当前对电磁波的划分见表 1.1.1。

表 1.1.1 电磁波谱

辐射波		频率范围/Hz	波长范围
无线电波 微波		$< 10^9$ $10^9 \sim 10^{12}$	$> 300\text{mm}$ $300\text{mm} \sim 0.3\text{mm}$
光波	红外光	$10^{12} \sim 4.3 \times 10^{14}$	$300\mu\text{m} \sim 0.7\mu\text{m}$
	可见光	$4.3 \times 10^{14} \sim 7.5 \times 10^{14}$	$0.7\mu\text{m} \sim 0.4\mu\text{m}$
	紫外光	$7.5 \times 10^{14} \sim 10^{16}$	$0.4\mu\text{m} \sim 0.03\mu\text{m}$
射线	X 射线	$10^{16} \sim 10^{19}$	$30\text{nm} \sim 0.03\text{nm}$
	γ 射线	$> 10^{19}$	$< 0.03\text{nm}$

光波是一种电磁波,这是限制在经典讨论的范围内,用电磁波理论来解释光波的传播、干涉、衍射,偏振、反射、折射、色散、成像等。而对于发光机理、光与物质的作用、非线性现象等,常常需要借助于光的量子理论。光的电磁理论有时也被称为光的宏观理论,或者称为唯像理论,以有别于描述微观机理现象的微观理论。

本章从麦克斯韦方程组开始讨论光的电磁理论基础。

1.1 电磁场

1.1.1 麦克斯韦电磁方程

在研究电磁场时,会涉及 4 个场矢量:电场强度矢量 \mathbf{E} ,单位是伏特每米(V/m);电位移矢量 \mathbf{D} ,单位是库仑每平方米(C/m^2);磁感应强度矢量 \mathbf{B} ,单位是特斯拉(T);磁场强度矢量 \mathbf{H} ,单位是安培每米(A/m)。

一般情况下,这些矢量既是空间坐标的函数,又是时间的函数。电场、磁场之间紧密联系,其中 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 是电磁场的基本构成量, \mathbf{D} 和 \mathbf{H} 是描述电磁场与物质之间相互作用的辅助量。在线性介质中, \mathbf{D} 与 \mathbf{E} 成正比, \mathbf{H} 与 \mathbf{B} 成正比。场矢量 \mathbf{E} 、 \mathbf{D} 、 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 服从麦克斯韦方程组,其微分形式为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.1.4)$$

式中: \mathbf{J} 为传导电流密度(A/m^2); ρ 为电荷密度(C/m^3)。

式(1.1.1)来自安培(Ampere)环路定律,但增加了一项 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$,这是麦克斯韦对电磁理论的主要贡献,他将其称为位移电流密度。公式表明,不仅传导电流会产生磁场,而且随时间变化的电场也会产生磁场,式(1.1.1)描述了它们之间的定量关系:磁场强度的旋度等于引起该磁场的传导电流密度和位移电流密度之和。

式(1.1.2)来自法拉第电磁感应定律,它表明随时间变化的磁场也会产生电场。

式(1.1.3)来自磁场的高斯(Gauss)定理,它表明磁场是一个无源场,不存

在独立的“磁荷”，磁通量一定是封闭曲线。

式(1.1.4)来自自由电场的高斯定理,它表明电场是一个有源场,电荷是产生电场的源,电位移矢量的散度就等于空间同一处的自由电荷面密度。

如果对式(1.1.1)取散度,则可推得:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.1.5)$$

利用式(1.1.4),则有:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.1.6)$$

式(1.1.6)是电流连续性方程的微分形式,它表明从任一个点流出的电流应等于该点电荷的减少率 $-\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 。

通常电场和磁场都是空间坐标和时间的函数,但对于静态场,场矢量不随时间变化,因此麦克斯韦方程组简化为:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.1.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.1.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.1.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.1.10)$$

可见,在静态场情况下, \mathbf{E} 、 \mathbf{D} 和 \mathbf{B} 、 \mathbf{H} 是相互独立的,静态场仅由电荷产生。此外,在静态场情况下, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, 由电流连续性方程即式(1.1.6)可得:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.1.11)$$

式(1.1.11)表明:恒定电流是连续的,其电流线总是闭合曲线。

在光场中,场矢量是时间的函数,变化频率非常快,在 $10^{12} \sim 10^{14}$ 量级。在考虑光场的性质时,往往只考虑其各阶矩的平均性质,如 $|\mathbf{E}|^2$ 。如果场的各阶矩与取平均的时刻无关,则场的性质可看做是“稳定的”。例如,来自遥远的恒星的星光,在不考虑大气不稳定因素时就是一个稳定场。

1.1.2 物质方程

在麦克斯韦方程组即式(1.1.1)~式(1.1.4)中,没有限定 \mathbf{E} 和 \mathbf{D} 以及 \mathbf{H} 和 \mathbf{B} 之间的关系,所以它被称为麦克斯韦方程的非限定形式。即使给出了电流 \mathbf{J} 和电荷 ρ 的分布,从非限定形式并不能唯一地确定矢量 \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{D} 的值。 \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{D} 之间的关系与介质在场的作用下的性质有关。从各矢量之间的对应关系,可以将它们概括为如下简单的形式:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.1.12)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (1.1.13)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.1.14)$$

式(1.1.12)~式(1.1.14)称为物质方程。式中: ε 为介电常数,描述介质的电学性质, $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, ε_0 为真空中的介电常数, ε_r 为相对介电常数; μ 为介质的磁导率,描述物质的磁学性质, $\mu = \mu_0 \mu_r$, μ_0 为真空中的磁导率, μ_r 为相对磁导率; σ 为电导率,描述物质的导电特性。

一般地说,式(1.1.12)~式(1.1.14)中的 ε 、 μ 、 σ 3个参数是比较复杂的,它们应该是空间位置的坐标函数,即应当表示为 $\varepsilon(x, y, z)$ 、 $\mu(x, y, z)$ 和 $\sigma(x, y, z)$ 。当介质的光学特性是各向异性的情况时, ε 、 μ 和 σ 还将是张量,在不同的坐标方向上有不同的数值。当光的强度很强时,它们还会表现出非线性特性,即会随着光强变化而发生变异。

对于各向同性的均匀介质,若介质对场作用的响应没有明显的滞后效应,则在线性范围内, ε 、 μ 和 σ 都可以看做是常数。在透明、无损耗的介质中,如玻璃、空气等, $\sigma = 0$;非铁磁性材料的 μ_r 可视为1。本书主要处理 $\sigma = 0$ 、 $\mu_r = 1$ 的情况。

1.1.3 突变面处的边界条件

式(1.1.1)~式(1.1.4)描述了介质特性是连续的区间的状况。如果介质性质在一个或多个面处存在突变,就有可能导致矢量 \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{D} 在这些面处发生突变。下面推导在不同介质的界面上,场矢量 \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 、 \mathbf{B} 和 \mathbf{D} 应遵从的关系。

1. \mathbf{B} 的边界条件

如图1.1.1所示,在分界面上取一个上、下底面积分别为 ΔA_2 和 ΔA_1 ,高为 Δh 的圆柱型封闭曲面 S 。这样,就用了一个很薄的过渡层 Δh 来研究突变面 T 处的状态。

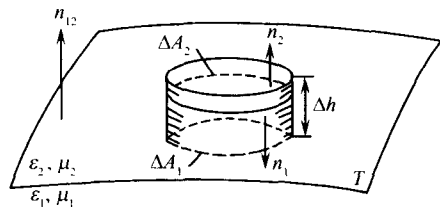


图 1.1.1 \mathbf{B} 和 \mathbf{D} 的法线分量
边界条件的推导

此时在圆柱体内, \mathbf{B} 和它的微商都可以设为连续的,所以可以把高斯定理应用到对整个圆柱体体积的形式:

$$\int \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (1.1.15)$$

第2个积分遍及整个圆柱体表面, \mathbf{n} 是圆柱体表面的法线单位矢量,方向指向圆柱体体积之外。下表面上的 \mathbf{B} 值记为 $\mathbf{B}^{(1)}$,上表面则记为 $\mathbf{B}^{(2)}$ 。设 ΔS 很小,使

$\mathbf{B}^{(1)}$ 和 $\mathbf{B}^{(2)}$ 在表面上都可以看做常数,于是式(1.1.15)改写为

$$\mathbf{B}^{(1)} \cdot \mathbf{n}_1 \Delta A_1 + \mathbf{B}^{(2)} \cdot \mathbf{n}_2 \Delta A_2 + \text{壁的贡献} = 0 \quad (1.1.16)$$

将圆柱体的高度 Δh 无限减小,则过渡层收缩为一个面 ΔA ,圆柱壁的贡献趋向于零,因而有:

$$(\mathbf{B}^{(1)} \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{B}^{(2)} \cdot \mathbf{n}_2) \Delta A = 0 \quad (1.1.17)$$

令 \mathbf{n}_{12} 为单位法线,方向从介质 1 指向介质 2,则 $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_{12}$, $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_{12}$,式(1.1.17)即变为

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{B}^{(2)} - \mathbf{B}^{(1)}) = 0 \quad (1.1.18)$$

式(1.1.18)说明在通过突变面时磁感应强度 \mathbf{B} 的法线分量是连续的。

2. \mathbf{D} 的边界条件

\mathbf{D} 可用同样的方法加以处理,但由于电位移与电荷有关系,需要增加一项电荷的影响。对式(1.1.4)按积分形式处理,得到:

$$\int \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int \rho dV \quad (1.1.19)$$

因有电荷存在,当 $\Delta h \rightarrow 0$ 时,总电荷保持不变,将导致体电荷密度趋向于 ∞ ,这在数学上难以处理,故引入面电荷密度 $\hat{\rho}$ 代替体电荷密度 ρ 。 $\hat{\rho}$ 的定义是:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int \rho dV = \int \hat{\rho} dS。$$

如果面积 ΔS 和高度 Δh 都是足够小,则按照 \mathbf{B} 进行同样处理:

$$\mathbf{D}^{(1)} \cdot \mathbf{n}_1 \Delta A_1 + \mathbf{D}^{(2)} \cdot \mathbf{n}_2 \Delta A_2 + \text{壁的贡献} = \hat{\rho} \Delta S \quad (1.1.20)$$

壁的贡献随 Δh 趋向于零,因此得到

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{D}^{(2)} - \mathbf{D}^{(1)}) = \hat{\rho} \quad (1.1.21)$$

说明当面上存在电荷时,电位移法线分量通过此面时要发生突变,改变量为 $\hat{\rho}$ 。

3. \mathbf{E} 的边界条件

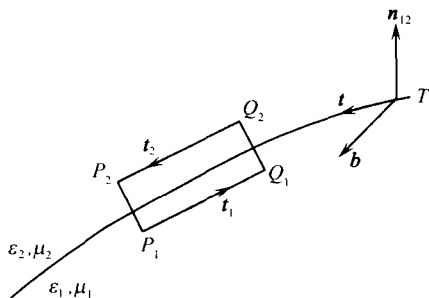
前面讨论的均为法向分量的行为,下面讨论切向分量的行为。仍然用一个过渡层代替突变层,如图 1.1.2 所示。

在界面上取一个长方形:四边分别与突变界面 T 平行或垂直。 \mathbf{b} 为垂直于长方形平面的单位矢量,则由式(1.1.2)和斯托克斯(Stokes)定理可以得到:

$$\int \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{b} dS = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{b} dS \quad (1.1.22)$$

其中第 1 个积分和第 3 个积分是对长方形围成的面积分,而第 2 个积分是沿着长方形周长积分。

沿着 $P_1 Q_1$ 的场用 $\mathbf{E}^{(1)}$ 表示,沿 $P_2 Q_2$ 的场则用 $\mathbf{E}^{(2)}$ 表示。当 $P_1 Q_1$ 和 $P_2 Q_2$ 的长度很小时, $\mathbf{E}^{(1)}$ 和 $\mathbf{E}^{(2)}$ 都可以看做常数,同样 $-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 也可看做常数,于是有:

图 1.1.2 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 切线分量边界条件的推导

$$\mathbf{E}^{(1)} \cdot \mathbf{t}_1 \Delta s + \mathbf{E}^{(2)} \cdot \mathbf{t}_2 \Delta s + \text{两端的贡献} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{b} \Delta s \Delta h \quad (1.1.23)$$

Δs 为长方形长边的线元, \mathbf{t}_1 、 \mathbf{t}_2 分别是长方形长边上的单位矢量(见图 1.1.2)。

令长方形的高 Δh 逐渐减小到 0, 则两端的贡献趋向于零。由于 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 为有限值, 式(1.1.23)右边趋于零, 即

$$(\mathbf{E}^{(1)} \cdot \mathbf{t}_1 + \mathbf{E}^{(2)} \cdot \mathbf{t}_2) \Delta s = 0 \quad (1.1.24)$$

令 \mathbf{t} 是界面上的单位切线, 则 $\mathbf{t}_1 = -\mathbf{t} = -\mathbf{b} \times \mathbf{n}_{12}$, $\mathbf{t}_2 = \mathbf{t} = \mathbf{b} \times \mathbf{n}_{12}$, 上式变为

$$\mathbf{b} \cdot [\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)})] = 0 \quad (1.1.25)$$

在假设条件中, 并没有规定小长方形的取向, 故而 \mathbf{b} 的取向并不是确定的。这样, 要使式(1.1.25)对任意的 \mathbf{b} 都满足, 只能是:

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)}) = 0 \quad (1.1.26)$$

式(1.1.26)说明, 在通过突变面时电矢量的切线分量是连续的。

4. \mathbf{H} 的边界条件

磁矢量的切线分量行为的分析与电矢量分析方法相同, 只是此时需考虑在界面上存在的电流, 引入面电流密度 $\hat{\mathbf{J}}$, 则

$$\int \nabla \cdot \mathbf{H} dS = \mathbf{H}^{(1)} \cdot \mathbf{t}_1 dS + \mathbf{H}^{(2)} \cdot \mathbf{t}_2 dS = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left[\int \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{b} dS + \int \hat{\mathbf{J}} \cdot dS \right] \quad (1.1.27)$$

取极限 $\Delta h \rightarrow 0$, 得到

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)}) = \hat{\mathbf{J}} \quad (1.1.28)$$

由此可见, 当存在面电流密度 $\hat{\mathbf{J}}$ 时, 磁矢量切线分量在分界面上发生突变, 是不连续的, 与分界面上的自由电流面密度有关。

在无损耗介质中, 电导率等于零, 故分界面上一般不存在自由电荷和电流, 此时的边界条件为

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)}) = 0 \quad (1.1.29)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)}) = 0 \quad (1.1.30)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}^{(2)} - \mathbf{B}^{(1)}) = 0 \quad (1.1.31)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}^{(2)} - \mathbf{D}^{(1)}) = 0 \quad (1.1.32)$$

1.1.4 电磁场的能量定律

电场与磁场均是有能量的。由于时变场中的电场、磁场都会随时间变化,空间各点的电场能量密度、磁场能量密度也会随时间变化。为了描述电磁能量的关系,从麦克斯韦方程组出发,由式(1.1.1)和式(1.1.2)可以得到:

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1.33)$$

在空间任一体积 V 上对式(1.1.33)积分:

$$\int \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV + \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV + \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (1.1.34)$$

设时变场中的介质是各向同性的,且 ε, μ, σ 不随时间变化,引用物质方程即式(1.1.12)~式(1.1.14),则上式中的

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial(\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right) \quad (1.1.35)$$

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial(\mu \mathbf{H})}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) \quad (1.1.36)$$

令 $w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$, 为电能密度, $w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$, 为磁能密度, 则体积内的总能量为

$$W = \int (w_e + w_m) dV \quad (1.1.37)$$

则式(1.1.34)变为

$$\frac{dW}{dt} + \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV + \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (1.1.38)$$

在式(1.1.38)中, $\frac{dW}{dt}$ 代表体积 V 内的电磁能量的增加率。 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \sigma E^2$, 是单位体积内的焦耳热损耗, 因此 $\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV$ 是体积内的总的损耗功率。根据能量守恒定律, 此二项之和必须等于体积 V 的表面 S 进入该体积的功率, 即第3项 $\int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$ 。

由于 $\int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$ 表示通过曲面 S 进入体积 V 的功率, 所以可以把 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 看做是一个表示“功率流向”的矢量或“能量流”矢量, 用符号 \mathbf{S} 表示, 称为坡印廷(Poynting)矢量。