成人高等教育教材经济应用数学（一）

微积分

张家琦 主编

下册

首都师范大学出版社

成人高等教育教材经济应用数学（一）

微积分

下　册

张家琦　主编

首都师范大学出版社

内容简介

全书共八章，分上、下两册.上册包括函数，极限与连续，导数与微分，基本定理与导数的应用；下册包括不定积分，定积分，多元函数，无穷级数.

本书编写的基本指导思想是便于自学，因此编写时力求深入浅出，条理清楚，概念明确，重点突出.每章后均附有学习要求和内容提要以及习题和部分习题解答，以便学员复习、掌握重点和作习题时参考.

本书是北京市教育委员会推荐的成人高校大专函授教材.

前　言

本书是参照现行高等院校财经类本科学生学习的要求、考虑到成人高等教育教学的特点而编写的教材。

在编写的过程中，我们认真贯彻北京市教育委员会制定的成人高等院校财经类专业《微积分》教学大纲的精神，同时考虑到国家教育委员会1997年制订的全国各类成人高等学校专科起点本科班招生（非师范类）《高等数学（二）》复习考试大纲的要求。书中有些内容加了“※”号，选用本书时可以根据教学的需要和学时安排略去不讲。

参加本书编写的有陈洪育、郑余梅、万重英、胡建国、刘长祥、刘艺菁、张泳、张家琦等同志，由张家琦任主编。

限于编者的水平，书中难免有不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

1998年1月

目　　录

第五章　不定积分

本书的第五章和第六章将要讲一元函数的积分学.积分学的基本问题之一是求不定积分,他是求导数(或微分)的逆运算.本章主要介绍不定积分的概念、性质及求不定积分的一些基本方法.

§5.1　不定积分的概念

一、原函数

微分学的中心问题是,对于一个给定的函数,如何去求他的导数或微分.例如,已知函数 $f(x)=\sin x$,要求他的导数 $f'(x)$,那么由前面所学的求导法可知 $f'(x)=\cos x$.但是在许多实际问题中,我们常常会遇到正好相反的情形,就是已知一个函数的导数(或微分),而要求这个函数.

例如　已知函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)=\cos x$,要求出原来的函数 $f(x)$.由上面的例子可知 $f(x)=\sin x$.这个例子就是与求导数相反的问题,即由已知函数的导数,求这个函数.

于是,我们引进原函数的概念.一般地,有以下的定义.

定义:　设已知 $f(x)$ 是定义在某区间上的一个函数,如果存在一个函数 $F(x)$,使得在该区间上的每一点,都有

$$F'(x)=f(x),\text{或 } \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$$

则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在该区间上的一个原函数.

例 1　设 $f(x)=3x^2$

由于$(x^3)'=3x^2$

所以 $F(x)=x^3$ 是 $f(x)=3x^2$ 的一个原函数.

同样,$F(x)=x^3-2$ 也是 $f(x)=3x^2$ 的一个原函数.

例 2 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

由于$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

所以 $F(x)=\arctan x$ 是 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$的一个原函数.

同样,$F(x)=\arctan x+1$ 也是 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$的一个原函数.

从上面的两个例子可以看到:求给定函数 $f(x)$的原函数 $F(x)$的方法,全靠过去求导数的方法反推,并且对于同一个函数 $f(x)$,他的原函数不止一个. 实际上,如果 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数,那么 $F(x)+C$(其中 C 为任意常数)也一定是 $f(x)$的原函数. 这是因为

$$[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$$

所以,如果 $f(x)$有原函数,那么他的原函数必有无穷多个.

二、不定积分

上面我们讲到:如果 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数,则 $F(x)+C$(其中 C 为任意常数)也都是 $f(x)$的原函数,即 $f(x)$的原函数有无穷多个.

那么,现在的问题是:$F(x)+C$ 是否已包含了 $f(x)$的所有原函数呢?即是否还有可能存在 $f(x)$的另一个原函数 $\Phi(x)$,他不能写成 $F(x)+C$ 的形式呢?

这个问题的回答是肯定的,$F(x)+C$ 包含了 $f(x)$的所有原函数. 因为如果假设 $f(x)$还有原函数 $\Phi(x)$,则由第四章的拉格朗日定理的推论 2 可知:$\Phi(x)$与 $F(x)$也只能是相差一个常数,即

$$\Phi(x)=F(x)+C$$

因此，如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数就是函数族 $F(x)+C$（其中 C 为任意常数），也就是说 $f(x)$ 的所有原函数可以表示为 $F(x)+C$ 的形式（C 为任意常数）.

下面我们引进不定积分的定义.

定义： 函数 $f(x)$ 的所有原函数的全体，称为函数 $f(x)$ 的不定积分，记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

并称“$\int$”为积分号，函数 $f(x)$ 为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，x 为积分变量.

因此，给定了函数 $f(x)$，求他的不定积分，就是求他的全体原函数，只要找到他的一个原函数 $F(x)$，后面加上任意常数 C 就行了. 于是有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$$

其中任意常数 C 称为积分常数.

例 3 求函数 $f(x)=2x$ 的不定积分.

解 因为 $(x^2)'=2x$（或 $\mathrm{d}x^2=2x\mathrm{d}x$，下略）

所以 $F(x)=x^2$ 是 $f(x)=2x$ 的一个原函数.

$$\therefore \quad \int 2x\mathrm{d}x=x^2+C$$

例 4 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的不定积分.

解 因为当 $x>0$ 时，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

即 $F(x)=\ln x$ 是 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的一个原函数（当 $x>0$ 时），

所以有

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C \qquad (x>0)$$

而当 $x<0$ 时，$[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$

即 $F(x)=\ln(-x)$ 是 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的一个原函数(当 $x<0$ 时)，所以有

$$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(-x)+C \qquad (x<0)$$

综上所述，我们得到

$$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C \qquad (x\neq0)$$

注意： $f(x)$ 的不定积分不是他的一个原函数 $F(x)$，而是一族原函数 $F(x)+C$，他们彼此之间仅相差一个常数，因此求不定积分时，一定不要忘记加上任意常数 C.

在上面的两个求不定积分的例子中，我们反过来应用求导数的公式，找出了给定的被积函数的一个原函数. 下面我们自然要提出这样的问题：所给函数 $f(x)$ 在什么条件下才有原函数存在？这个问题在下一章的“原函数存在定理”中将会得到答案. 我们将会看到：如果函数 $f(x)$ 在某区间上连续，则在此区间上 $f(x)$ 必定存在原函数.

从这个定理可知，原函数存在的条件只是函数连续，他比函数可导的条件还要低一些，因为一个函数连续，他不一定可导.

由于初等函数在其定义域内是连续的，所以初等函数在其定义域内必定存在原函数.

三、不定积分的几何意义

我们首先引进一个名词：积分曲线.

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的不定积分为 $F(x)+C$. 对于每一个给定的 C，就可确定 $f(x)$ 的一个原函数，在几何上相应地就确定一条曲线，这条曲线就称为函数 $f(x)$ 的一条积分曲线. 因为 C 可以取任意值，因此 $y=F(x)+C$ 的图形就是一族

积分曲线. 这样不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上就表示 $f(x)$ 的积分曲线族(如图 5-1),他们可由曲线 $y=F(x)$ 沿 y 轴上、下平移而得到.

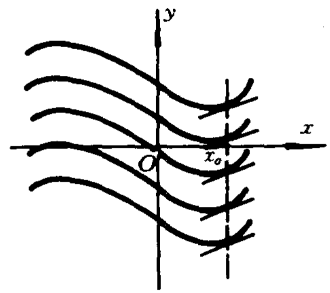

图 5-1

由 $[F(x)+C]'=f(x)$(不论常数 C 取什么值)可知,积分曲线族 $y=F(x)+C$ 中的每一条曲线,在点 (x,y) 处的切线有着相同的斜率 $f(x)$,所以,如果在每一条积分曲线上有相同横坐标 $x=x_0$ 的点处作切线,这些切线是相互平行的,其斜率都等于 $f(x_0)$.

例 5 求通过点(1,2),且其切线的斜率为 $3x^2$ 的曲线方程.

解 按题意,就是要在函数 $f(x)=3x^2$ 的积分曲线族中,找出一条曲线,使他通过点(1,2),即求出 $f(x)=3x^2$ 的不定积分,再根据条件 $x=1,y=2$ 来确定积分常数,最后找出一条积分曲线.

因为 $\int 3x^2\mathrm{d}x=x^3+C$

于是得积分曲线族为

$$y=x^3+C$$

将 $x=1,y=2$ 代入,有

$$2=1^3+C \qquad \therefore C=1$$

故所求的曲线方程为 $y=x^3+1$.

例 6 已知自由落体的运动速度 v 和经过的时间 t 的关系为 $v=gt$($g\approx10\mathrm{m/s^2}$,叫重力加速度),求下落的路程 S 与时间 t 的关系(设 $t=0$ 时,$S=0$).

解 按题意,就是求 $f(t)=gt$ 的不定积分,并用条件 $t=0$ 时

$S=0$ 来确定积分常数 C 的值.

由于 $F(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 是 $f(t)=gt$ 的一个原函数($\because \frac{1}{2}gt^2$ 的导数等于 gt),

$\therefore\quad \int gt\mathrm{d}t=\frac{1}{2}gt^2+C$

$\therefore\quad S=\frac{1}{2}gt^2+C$

将 $t=0$ 时 $S=0$ 代入,得 $C=0$

因此所求的关系为

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

例 7 如果已知生产某种产品 x 个单位时总成本 $C(x)$ 的变化率(边际成本)为 $C'(x)=1+4x$,并且已知固定成本为 10(万元),试求总成本函数 $C(x)$.

解 由于边际成本是总成本对产量 x 的导数,故总成本 $C(x)$ 是边际成本的不定积分,于是

$$C(x)=\int(1+4x)\mathrm{d}x=x+\frac{4}{2}x^2+C=x+2x^2+C$$

$$(\because x+\frac{4}{2}x^2 \text{ 的导数等于 } 1+4x)$$

由题意 当 $x=0$ 时,$C(x)=10$,将此代入,得

$C=10$

所以总成本函数为

$C(x)=x+2x^2+10$

从上面举的三个例子可看到:对于某些求原函数的具体问题,有时要从全体原函数中找出某一个原函数,使他满足某已知条件.这就是要根据已知条件来确定积分常数 C 的值,从而找到满足此条件的某一个原函数.

以上讲的是原函数与不定积分的概念及不定积分的几何意

义. 至于如何求出一个已知函数 $f(x)$的原函数，目前我们还没有更多的方法，只能将过去所学的求导数公式反过来运用. 但是直接将求导数公式反过来用，有时不太方便，如上面的例 6 和例 7，函数$\frac{1}{2}gt^2$ 对 t 的导数等于 gt，函数 $x+2x^2$ 的导数等于 $1+4x$，这都不是基本的导数公式. 为了更好地运用基本的导数公式反过来求原函数，下面我们要讲不定积分的几个基本性质. 我们将会看到，这样结合起来求原函数就方便得多了.

§5.2 不定积分的性质和基本积分公式

一、不定积分的性质

(1) $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$

或 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$

即：不定积分的导数(或微分)等于被积函数(或被积表达式). 这充分说明了求不定积分与求导数或微分互为逆运算.

这个性质可由不定积分的定义直接推出. 因为

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$$

其中 C 是任意常数，$F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，于是

$$\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=[F(x)+C]'=f(x)$$

(2) $\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$

或 $\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C$

就是说：一个函数的导数(或微分)的不定积分与这个函数相

差一个常数.

(3) 有限个函数的代数和的不定积分等于各函数不定积分的代数和,即

$$\int[f(x)\pm\varphi(x)\pm\cdots\pm\psi(x)]\mathrm{d}x$$

$$=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int\varphi(x)\mathrm{d}x\pm\cdots\pm\int\psi(x)\mathrm{d}x$$

这是因为等式右边的导数等于左边的被积函数之故.事实上,右边的导数为

$$\left[\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int\varphi(x)\mathrm{d}x\pm\cdots\pm\int\psi(x)\mathrm{d}x\right]'$$

$$=f(x)\pm\varphi(x)\pm\cdots\pm\psi(x) \qquad \text{(由性质(1))}$$

(4) 被积函数中不为 0 的常数因子可以提到积分号前,即

$$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$$

(其中 k 为非 0 的常数)

因为等式右边的导数为

$$\left[k\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=k\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' \qquad \text{(由导数的性质)}$$

$$=kf(x) \qquad \text{(由性质(1))}$$

即右边的导数等于左边的被积函数,由定义知 $k\int f(x)\mathrm{d}x$ 是 $kf(x)$ 的不定积分.

以上是不定积分的 4 个基本性质,运用这些性质并结合求导公式的反运算,解决求不定积分的问题就方便多了(参看下节的例题).

二、基本积分公式

由于求函数的不定积分是求导数的逆运算,所以我们可以由基本导数公式相应地得到基本积分公式:

(5.1) $\int 0\mathrm{d}x=C$

(5.2) $\int x^a \mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C \qquad (a \neq -1)$

(5.3) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

(5.4) $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x + C \qquad (a>0, a\neq 1)$

(5.5) $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$

(5.6) $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$

(5.7) $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$

(5.8) $\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$

(5.9) $\int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$

(5.10) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$

(5.11) $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$

对上面的公式要作两点说明：

(1) 公式(5.2)和(5.3)并不是直接将求导公式反过来用的. 因为如果直接将幂函数 x^a 的求导公式反过来用，则积分公式应为

$$\int a x^{a-1}\mathrm{d}x = x^a + C$$

但这样用起来不方便，因为他要求被积函数 x^{a-1}的前面必须带一个系数 a. 为了使用方便起见，最好是对 x^a 求不定积分，于是有

$$\begin{aligned}\int x^a \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{a+1}(a+1)x^a \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{a+1}\int (a+1)x^a \mathrm{d}x \text{(由性质(4))} \\ &= \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C\end{aligned}$$

同理，公式(5.4)也是将指数函数的求导公式反过来并作适当变形后得到的.

(2) 由微分形式的不变性，在上面的 11 个基本积分公式中，把自变量 x 换成中间变量 u，公式仍然成立. 例如公式(5.5)可以看成

$$\int e^u \mathrm{d}u = e^u + C$$

这样就大大地扩充了基本积分公式表的应用范围(参看 §5.4). 但应特别注意的是：当把 x 换成 u 时，一定要将 $\mathrm{d}x$ 换成 $\mathrm{d}u$，才能运用公式. 基本积分公式是求不定积分不可缺少的，因为不论采用什么方法积分，最终都要把所求的积分化成基本积分公式的类型，从而直接得到所要求的不定积分，所以必须熟记这些积分公式.

有了基本积分公式和不定积分的性质，下面就可以讲各种积分方法.

§5.3　直接积分法

积分方法有很多种，下面分别讲几种最常用的积分方法. 先介绍直接积分法.

直接积分法就是利用不定积分的性质，结合代数或三角的公式变形，直接利用基本积分公式进行积分的一种方法.

下面通过具体例子，说明如何运用这种方法求函数的不定积分.

例 1　求 $\int (\sqrt{x}+1)\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$

解　本例先将被积函数变成四项的代数和，再运用积分的性质和基本积分公式，有