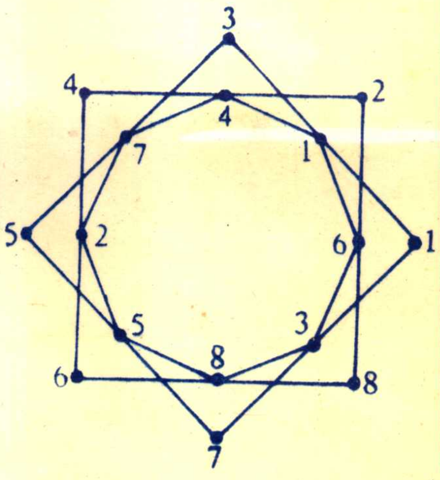
循环矩阵

江兆林　周章鑫　著

WHAT IS CIRCULAR IS ETERNAL



WHAT IS ETERNAL IS CIRCULAR

成都科技大学出版社

责任编辑:王泽彬
封面设计:王高杰

循 环 矩 阵

江兆林　周章鑫　著
成都科技大学出版社出版发行
山东费县第二印刷厂印刷
新华书店经销
开本:850 毫米×1168 毫米　1/32　印张:10
1999 年 1 月第 1 版　1999 年 1 月第 1 次印刷
字数:250 千字　印数:1—1000 册
ISBN 7-5616-3796-9/O·299
定价:20.00 元

序 言

循环矩阵概念的出现始于 1885 年美国学者 Muir. T.。

百余年来已有许多研究成果。特别是 50 年代后，随着高新科技尤其是计算技术的迅速发展，这一特殊类型的矩阵在众多的科学和工程领域，如编码和统计，石油勘探和结构分析，以及数字图像处理等许多方面获得愈来愈广泛的应用，面目为之一新。我国学者于 70 年代末开始介入这一领域。短短十余年，亦有不少贡献。

本书总结了国内外有关循环矩阵的大量文献，包括作者自己的研究成果，系统地介绍循环矩阵的基本理论，反映了这一学科的概貌和现状。

希望这一著作的问世，有助于广大读者了解这门学科，推动其发展，尤其是在应用方面更显得重要。

石钟慈

1998年6月9日

前　言

循环矩阵是一门年轻的学科。循环矩阵的概念最早是美国学者 Muir. T. 于 1885 年首先提出的。直到 1950 年之前，对于循环矩阵的研究还没有引起数学工作者的足够重视。1950 年以来，随着现代科学技术的发展，人们发现循环矩阵在实际中有很多应用，如在编码理论、数理统计、理论物理、固态物理、结构计算、数字图像处理、几何设计、线性预测、自回归滤波器设计、计算机时序分析、石油勘探、地震物探、分子振动、计量经济、工程技术、晶体结构理论及弹簧振动问题等方面应用很广。因此，1950 年至 1980 年，对循环矩阵的研究，在国外得到飞速发展。我国起步较晚，1979 年武际可先生首先讨论了多重循环矩阵的性质及其在结构计算中的应用。特别是 1985 年以来，国内关于循环矩阵的研究发展很快，至今已取得了许多有益的成果。

本书是根据近年来作者对于循环矩阵的研究并参考国内外有关文献写成的。它介绍了循环矩阵的理论、性质和应用，反映了近百年来，特别是近二十年来国内外在这个领域中主要的和基本的研究成果。全书共分八章：第 1 章　预备知识；第 2 章　循环矩阵；第 3 章　r-循环矩阵及其推广；第 4 章　g-循环矩阵及其推广；第 5 章　二重循环矩阵和多重循环矩阵；第 6 章　初等循环矩阵及其推广；第 7 章　某些循环矩阵的非奇异性；第 8 章　某些循环矩阵的逆阵求法。书末所附参考文献几乎全部列出了国内外同行在这一领域的所有研究文献。本书内容丰富，系统性强，由浅入深，叙述严格，语言通俗，可读性强。

在本书的撰写过程中，我们曾得到中国科学院院士、中国计算数学学会会长石钟慈先生的鼓励和支持，石先生在百忙中审阅全书，并为本书作序。在此，表示衷心的谢意！香港中文大学陈汉夫博士，得知我们在写这部著作后，把他近几年来的研究成果及有关文献寄给我们，对我们帮助很大，在此，也一并表示谢意！

阅读本书仅需要高等代数和高等数学的知识。因此，本书可作为高等院校数学专业高年级学生和矩阵理论专业研究生的教材或教参，更是有意研究循环矩阵的读者的一本入门书。

由于水平有限，书中难免存在不妥之处，欢迎读者批评指正。

著 者

1997 年 8 月

目　录

第一章 预备知识

§1.1 矩阵的分块

在矩阵的矩形阵列内，引入一些纵或横的虚线，将它划分成较小的元素块，常会带来一些方便，如：

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc}1&2&3&4\\5&6&7&8\\ \hdashline 9&10&11&12\\13&14&15&16\end{array}\right),\qquad B=\left(\begin{array}{cc:c:c}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\ \hdashline 13&14&15&16\end{array}\right)$$

上述矩阵 B 可用

$$\begin{array}{cccc}2&1&1&\\ \hline \end{array}$$

$$B=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\ 2&\ 1&\ 1\end{array}\\ \begin{pmatrix}C&D&E\\F&G&H\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\3\\1\end{array}$$

来表示. 对每一特定的分块方式，为指出各元素块的维数，可象上式右端那样给出注明，如块 C 的维数是 3×2，块 E 的维数 3×1 等.

一般而言，将矩阵 A 分块如下：

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1l}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2l}\\&&\ddots&\\A_{k1}&A_{k2}&\cdots&A_{kl}\end{pmatrix}\tag{1.1.1}$$

每一个子块 A_{ij} 的行的数目对每一个 i 均应相同，同样对 A 的列的数目对每一个 j 也应相同. 这样 A_{ij} 的维数可写成 $n_i\times m_j$ n_i、m_j

为正整数，我们可用下述方式表示：

$$
A = \begin{array}{c@{}c}
\begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_l \end{array} & \\
\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kl} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_k \end{array}
\end{array}
\qquad (1.1.1')
$$

若 A 是 n 阶方阵，并假设 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r (n_i \geqslant 1)$ 对行列进行同样的划分，有

$$
A = \begin{array}{c@{}c}
\begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & & n_r \end{array} & \\
\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rr} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_r \end{array}
\end{array}
\qquad (1.1.2)
$$

这里 A_{ij} 的维数为 $n_i \times n_j$，对角块 A_{ii} 是 n_i 阶方阵. 例如一个 6×6 的矩阵可这样划分

$$
\begin{array}{cc|c|ccc}
* & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * \\
\hline
* & * & * & * & * & * \\
\hline
* & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & *
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\text{其中 } n = 6 \\
n_1 = 2 \\
n_2 = 1 \\
n_3 = 3
\end{array}
$$

方阵常可由相同维数子方块构成：

例

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
* & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * \\
\hline
* & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & *
\end{array}
$$

若一个 nk 阶方阵 A，可由 $n\times n$ 阶子方阵组成，每一个子方阵是 k 阶，它的项是(n,k) 矩阵. 上例矩阵可表示为$(2,3)$ 矩阵.

分块矩阵的数量积运算：

$$c\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cA_{11} & \cdots & cA_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ cA_{kl} & \cdots & cA_{kl} \end{pmatrix} \tag{1.1.3}$$

转量运算：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1l} \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ A_{k1} & \vdots & A_{kl} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{k1}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1l}^T & \cdots & A_{kl}^T \end{pmatrix} \tag{1.1.4}$$

共轭转量：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kl} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} A_{11}^* & \cdots & A_{k1}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1l}^* & \cdots & A_{kl}^* \end{pmatrix} \tag{1.1.5}$$

分块矩阵的加法运算：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kl} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & \cdots & B_{kl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1l}+B_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1}+B_{k1} & \cdots & A_{kl}+B_{kl} \end{pmatrix} \tag{1.1.6}$$

在分块矩阵的加法运算中，每个 A_{ij} 的维数必须和其对应的 B_{ij} 的维数相同.

分块矩阵的乘法运算，设

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_l \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kl} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_k \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ B_{l1} & B_{l2} & \cdots & B_{ln} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_l \end{array}$$

其中每个 A_{ij} 是 $s_i\times n_j$ 的子矩阵，每个 B_{ij} 是 $n_i\times m_j$ 的子矩阵，于

是有

$$C = AB = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{k1} & C_{k2} & \cdots & C_{kn} \end{pmatrix} \tag{1.1.7}$$

其中 $C_{pq} = A_{p1}B_{1q} + A_{p2}B_{2q} + \cdots + A_{pl}B_{lq}$,

$$p = 1,2,\cdots,k, \quad q = 1,2,\cdots,n.$$

应该注意,矩阵 A 的列的分块法必须和矩阵 B 的行分块法一致.

例 若 A 和 B 是 $n \times n$ 的矩阵且设

$C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}$,则 $C^2 = \begin{pmatrix} A^2 + B^2 & AB - BA \\ BA - AB & A^2 + B^2 \end{pmatrix}$.

§1.2 直和

设 A_i 是 n_i 阶的方阵,$i = 1,2,\cdots,k$,则块对角方阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & A_k \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \cdots, A_k) \tag{1.2.1}$$

为 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ 阶,叫 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 的直和,且有表达式:

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k = \bigoplus_{i=1}^{k} A_i \tag{1.2.2}$$

从上述定义可直接得出 $\det A = \prod_{i=1}^{k} \det A_i$.

对任一整数 p,有 $A^p = A_1^p \oplus A_2^p \oplus \cdots \oplus A_k^p$.

同时还有下列等式成立:

(1) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.

(2) $(A + B) \oplus (C + D) = (A \oplus C) + (B \oplus D)$.

(3) $(A \oplus B)(C \oplus D) = AC \oplus BD$.

(4) $(A \oplus B)^T = A^T \oplus B^T$.

(5) $(A \oplus B)^* = A^* \oplus B^*$.

(6) $(A \oplus B)^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1}$,这里要设 A,B 的逆存在.

(7) $\det(A \oplus B) = (\det A)(\det B)$.

(8) $\mathrm{tr}(A \oplus B) = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B$.

(9) 若 $P_A(\lambda)$ 为 A 的特征多项式,则:

$P_{A\oplus B}(\lambda) = P_A(\lambda)(P_B(\lambda))$.

(10) $\lambda(A \oplus B) = \{\lambda(A), \lambda(B)\}$,($\lambda(A)$ 表示 A 的所有特征值的集合).

§1.3 Kronecker 积

设 A 和 B 分别是 $m \times n, p \times q$ 阶的矩阵,则 Kronecker 积是一个 $mp \times nq$ 阶的矩阵,由

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

确定,因此,它可视为有 m 个块行与 n 个块列的分块矩阵,其各块均为 $p \times q$ 矩阵,由此定义看出,一般地 $A \otimes B \neq B \otimes A$.

Kronecker 积有下述重要性质

(1) $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha(A \otimes B)$,$\alpha$ 是纯量.

(2) $(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$.

(3) $A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$.

(4) $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$.

(5) $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$.

这里 AC, BD 有意义.

证 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵,C 为 $n \times r$ 阶矩阵,则上式左端

$$(A \otimes B)(C \otimes D)$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11}D & c_{12}D & \cdots & c_{1r}D \\ c_{21}D & c_{22}D & \cdots & c_{2r}D \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n1}D & c_{n2}D & \cdots & c_{nr}D \end{bmatrix}$$

按分块矩阵的乘法运算,上式等于

$$\begin{bmatrix} (a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} + \cdots + a_{1n}c_{n1})BD & \cdots & (a_{11}c_{1r} + a_{12}c_{2r} + \cdots + a_{1n}c_{nr})BD \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{m1}c_{11} + a_{m2}c_{21} + \cdots + a_{mn}c_{n1})BD & \cdots & (a_{m1}c_{1r} + a_{m2}c_{2r} + \cdots + a_{mn}c_{nr})BD \end{bmatrix}$$
$$= (AC) \otimes (BD).$$

性质(5) 还可推广成更一般的形式:

(5′) $(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_p)(B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_p)$
$$= A_1B_1 \otimes A_2B_2 \otimes \cdots \otimes A_pB_p,$$

和 $$(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2)\cdots(A_p \otimes B_p)$$
$$= (A_1A_2\cdots A_p) \otimes (B_1B_2\cdots B_p).$$

上面两个式子只要等号右边有意义,则左边也有意义,而且两边相等.

(6) 设 A、B 非奇异,则 $A \otimes B$ 也非奇异,且
$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

证 按性质(5) 我们有

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = (AA^{-1}) \otimes (BB^{-1}) = I_m \otimes I_n = I_{mn}.$$

(7) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$;$(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$.

证 $(A \otimes B)^T = (a_{ij}B)^T = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}^T$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}B^T & \cdots & a_{m1}B^T \\ a_{1n}B^T & \cdots & a_{mn}B^T \end{bmatrix} = A^T \otimes B^T.$$

同理,有 $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$.

(8) 设 A、B 为复矩阵，有 $\quad \overline{A\otimes B}=\overline{A}\otimes\overline{B}$.

(9) 设 A 为 m 阶复方阵，B 为 n 阶复方阵，分别有特征值 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$. 则 $A\otimes B$ 为 mn 阶复方阵，其特 征值为 $\alpha_i\beta_j$，$1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n$.

证 设 A,B 的 Jordan 法式为 J_A,J_B. 有 $P^{-1}AP=J_A,Q^{-1}BQ=J_B$，则 J_A 以 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为主对角线的上三角方阵，J_B 为 n 阶且以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为主对角线的上三角方阵，这样 $J_A\otimes J_B$ 为 mn 阶上三角方阵，其对角元素依次为

$\alpha_1\beta_1,\alpha_1\beta_2,\cdots,\alpha_1\beta_n,\alpha_2\beta_1,\alpha_2\beta_2,\cdots,\alpha_2\beta_n,\cdots,\alpha_m\beta_1,\cdots,\alpha_m\beta_n$.

又 ∵ $\quad A=PJ_AP^{-1},B=QJ_BQ^{-1}$ 有

$$A\otimes B=(PJ_AP^{-1})\otimes(QJ_BQ^{-1}),$$

依(5′)(6) 有 $\quad A\otimes B=(P\otimes Q)(J_A\otimes J_B)(P\otimes Q)^{-1}$.

因而 $A\otimes B$ 与 $J_A\otimes J_B$ 有相同的特征值

$\alpha_i\beta_j,1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n$. 由性质(9) 可得：

(10)$\det(A\otimes B)=(\det A)^n(\det B)^m$.

证

$$\det(A\otimes B)=\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(\alpha_i\beta_j)=(\prod_{i=1}^{m}\alpha_i)^n(\prod_{j=1}^{n}\beta_j)^m$$
$$=(\det A)^n(\det B)^m.$$

(11)$\mathrm{tr}(A\otimes B)=(\mathrm{tr}(A))(\mathrm{tr}(B))$.

证 $\quad \mathrm{tr}(A\otimes B)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_j=(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i)(\sum_{j=1}^{n}\beta_j)$
$$=(\mathrm{tr}(A))(\mathrm{tr}(B))$$

(12) 因方阵的秩等于该方阵的非零特征值(计入重数) 的个数，所以有：$\mathrm{r}(A\otimes B)=\mathrm{r}(A)\mathrm{r}(B)$.

(13) 两个方阵的 Kronecker 积往往可以保持原方阵的一些性质，因此有结论：

设 A,B 分别为 m,n 阶复方阵，若 A 与 B 皆为正规(酉、Hermite、对称、Hermite 正定、Hermite 正半定) 矩阵，则 A ⊗ B 为

mn 阶复矩阵，它也是正规（酉、Hermite、对称、Hermite 正定、Hermite 正半定）矩阵.

(14) 前已指出，和矩阵乘积一样，Kronecker 积也不满足交换律，设 A 为 $m \times n$，B 为 $p \times q$，$A \otimes B \neq B \otimes A$，但 $A \otimes B$ 和 $B \otimes A$ 的维数都是 $mp \times nq$，而且可以通过对行、列的置换把 $A \otimes B$ 化成 $B \otimes A$. 也即，存在 mp 阶和 nq 阶置换方阵 P, Q 使

$$P(A \otimes B)Q = (B \otimes A)$$

特别地，当 $m = n, p = q$ 时，一定有 mp 阶置换方阵 P，使 $P(A \otimes B)P^T = B \otimes A$.

(15) 设 $\varphi(x,y) = \sum_{j=0}^{p}\sum_{k=0}^{p} a_{jk}x^j y^k$，$A$ 和 B 分别是 m 阶和 n 阶方阵，$\varphi(A,B) = \sum_{j=0}^{p}\sum_{k=0}^{p} a_{jk}A^j \otimes B^k$，那么 $\varphi(A,B)$ 的特征值是 $\varphi(\lambda_r, \mu_s), r = \overline{1,m}, s = \overline{1,n}$. 这里 λ_r 和 μ_s 分别是 A 和 B 的特征值
.

(16) $A_{n_1}^k \otimes B_{n_2}^j = (A_{n_1} \otimes I_{n_2})^k (I\, n_1 \otimes B_{n_2})^j$.

§1.4　置换矩阵

集合 $N = \{1,2,\cdots,n\}$ 的一个置换 σ 是指集合 N 到自身的一一映射，包括恒等置换在内，集合 N 共有 n 个不同的置换，一种有代表性的置换其表示为：

$$\begin{aligned} \sigma(1) &= i_1 \\ \sigma(2) &= i_2 \\ &\vdots \\ \sigma(n) &= i_n \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

常写为

$$\sigma:\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix} \tag{1.4.1'}$$

一个置换的逆置换用 σ^{-1} 表示，即 $\sigma^{-1}(i_k)=k$，

设 E_j 是含有 n 个分量的单位(行)向量，其中第 j 个分量为 1，其余均为 0：$E_j=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T$ (1.4.2)

这样，我们定义一个 n 阶置换阵，是指下列形式的矩阵：

$$P=P_\sigma=\begin{pmatrix}E_{i_1}\\ E_{i_2}\\ \vdots\\ E_{i_n}\end{pmatrix} \tag{1.4.3}$$

也即：

$$P=(a_{ij}) \quad 此\begin{cases}a_{i,\sigma(i)}=1, i=1,2,\cdots,n\\ a_{i,j}=0,\ 其它\end{cases} \tag{1.4.4}$$

置换矩阵 P 的第 i 行在第 $\sigma(i)$ 列上的元素为 1，i 行的其余元素为 0、同样，置换矩阵 P 的第 j 列在第 $\sigma^{-1}(j)$ 上的元素为 1，第 j 列的其余元素为 0、从中我们可以得出：置换矩阵 P 是这样的矩阵：它的每一行，每一列只有一个元素为 1 而其余元素均为 0 的矩阵.

例

$$\sigma:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad P_\sigma=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

依照置换矩阵的定义容易得到：

$$P_\sigma\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{\sigma(1)}\\ x_{\sigma(2)}\\ \vdots\\ x_{\sigma(n)}\end{pmatrix}.$$