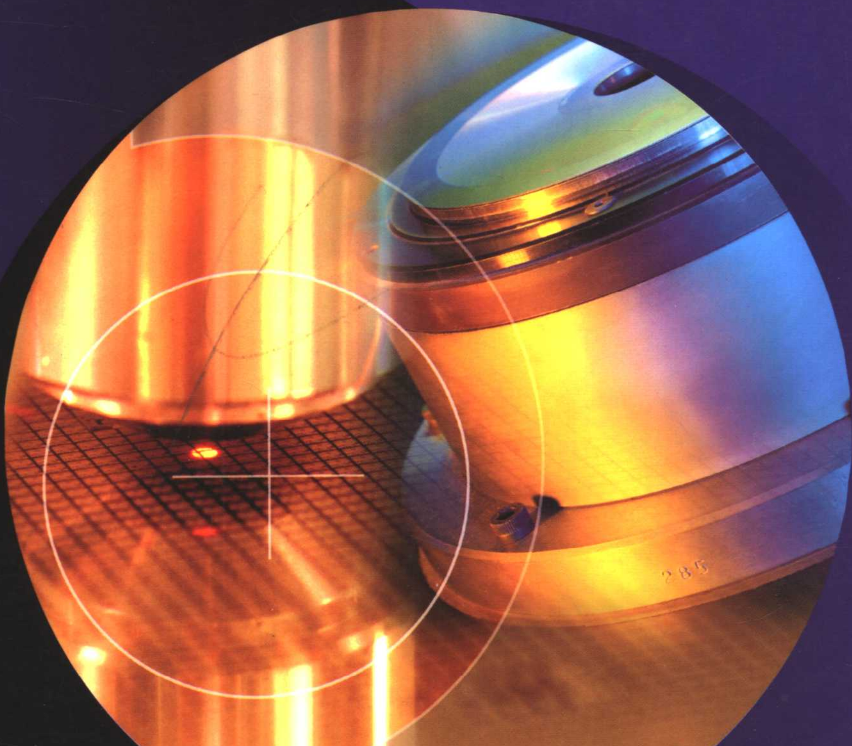
大学物理实验教程

（第二版）

李学金 主编



湖南大學出版社

大学物理实验教程

（第二版）

李学金　　主编

湖南大学出版社
2006年·长沙

内 容 简 介

本书根据《高等工业学校物理实验课程教学基本要求》，并结合深圳大学理学院应用物理系教师在教学实践中的经验编写而成。全书共7章。第1章至第4章为误差理论基础、物理实验的基本测量方法、物理实验测量技术方面的知识，以及常用实验仪器介绍。第5章至第7章分别为基础实验、综合实验、设计实验。共50个实验内容。本书各章节既相互独立，又循序渐进、相互配合，初步形成一个完整的体系。本书可作为高等学校工科各专业物理实验课程的教材和参考书，也可供涉及物理学的实验技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理实验教程/李学金主编．—长沙：湖南大学出版社，2006.9

ISBN 7-81053-273-1

Ⅰ．大…　Ⅱ．李…　Ⅲ．物理学—实验—高等学校—教材

Ⅳ．O4-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第114913号

大学物理实验教程（第二版）

Daxue WuLi Shiyan Jiaocheng (dierban)

作　　者：李学金　**主编**

责任编辑：罗素蓉

特约编辑：何　晋　徐　飞

封面设计：张　毅

出版发行：湖南大学出版社

社　　址：湖南·长沙·岳麓山　　**邮　　编**：410082

电　　话：0731-8821691（发行部），8823113（编辑室），8821006（出版部）

传　　真：0731-8649312（发行部），8822264（总编室）

电子邮箱：pressluosr@hnu.cn

网　　址：http://press.hnu.cn

印　　装：湖南大学印刷厂

开本：787×1092　16开　　**印张**：21　　**字数**：538千

版次：2006年9月第2版　　**印次**：2006年9月第1次印刷　　**印数**：1～5 000册

书号：ISBN 7-81053-273-1/O·20

定价：27.50元

再版前言

本书《大学物理实验教程》是自2001年出版以来的再版，根据《高等工业学校物理实验课程教学基本要求》，并结合深圳大学理学院应用物理系教师在教学实践中的经验编写而成。

大学物理实验是理工科大学生必修的一门重要的基础实验课程，是大学生进入大学后的第一门实践课程，对大学生综合素质的培养至关重要。同时，现代教育中的一个特点就是要求加强大学生创造能力与意识的培养，基于以上出发点，本书对原大学物理实验教学体系进行了全面改革，改变原来的以“力、热、电、光”编排内容的方式，结合认识特点分层次教学，由浅入深，分为基础实验、综合实验、设计性实验，着重培养学生的动手能力和创造力。

在实验内容的设置上，选择了具有代表性的经典实验，同时增设了一些具有很好物理思想或在现有高新技术中广泛应用的物理实验，加大设计实验内容，而且在实验中引用了最新的参考文献。

实验教材不可能脱离实验室的建设和发展。我们实验室能达到现在的规模和水平，凝聚了深圳大学理学院应用物理系教师的智慧和劳动。我们所编写的教材，不仅是直接参加这次编写工作的教师的劳动成果，也是全体教师和实验技术人员多年建设的结果。参加本书编写工作的有李学金（第1章，第2章，第3章，实验5、8、20、24、28、29、36、37、41、44、45、46、48、49）、周恒智（第4章［Ⅱ］，实验7、9、10、21、22、25、26、27、39）、赵志超（实验19、35、38、40、47）、封玲（实验2、4（Ⅰ）、12、14、23、30、43）、张哲皇（实验31、32、33、34）、余陨金（实验16、17、18）、万浪辉（第4章［Ⅲ］，实验6、15）、杨钦鹏（第4章［Ⅰ］，实验1、3、4（Ⅱ）、11、13）、刘丽君（实验42、50）。全书由李学金、杨世清统稿。

在编写过程中，我们参阅了许多兄弟院校的教材及其他参考文献，吸取了同行们的有益经验。由于编者水平有限和时间仓促，实践经验不足，难免有错误之处，望各位同仁多提宝贵意见。

编　者

2006年6月于深圳大学

目　　次

绪 论

一、物理实验的作用和意义

物理学是自然科学里最重要的基础学科之一，它的发展带动了社会的进步。例如，热力学、分子物理学的发展开创了热机、蒸汽机时代；电磁学的产生开创了电器化时代；原子物理学、量子力学导致了半导体、核能、激光和电子计算机的迅猛发展。目前，物理学的基本理论渗透在自然科学的一切领域，应用于生产的各个部门。从本质上讲，它是一门实验科学。一方面，物理学是大量物理实验事实的总结，如万有引力定律、相对论和电磁场理论等；另一方面，物理实验又起到验证、修正和发展物理理论的作用。可以说，离开物理实验就没有物理学的产生和发展。

二、大学物理实验课的目的和任务

大学物理实验课是高等工科院校的一门必修基础课程，是对学生进行科学实验的基本训练、提高学生分析问题和解决问题的能力、激发和培养学生创造性的重要课程。21 世纪是知识经济的世纪。创新能力是知识经济时代国力竞争的新焦点。创新是知识经济的灵魂，创造力是现代生产力的核心，而创新的关键在人才。无论是知识创新还是技术创新，无论是经济竞争还是科技竞争，归根到底是高素质创造型人才的竞争。大学物理实验课旨在培养和提高学生进行科学实验的能力，使其掌握基本的物理实验的理论知识、实验方法和实验技能，提高学生的综合素质的同时，培养具有创新精神和创新能力的高素质创造型人才，是其中的一项重要任务。

大学物理实验课是高等工科院校学生在校受到系统实验方法和实验技能训练的开端，也是工科类专业对学生进行科学实验训练的重要基础。

三、怎样学好大学物理实验课及大学物理实验的要求

要求认真做好三个环节，即实验前要认真预习，实验中认真操作，实验后认真撰写实验报告。

1. 预习

在实验之前应仔细阅读教材和相应的参考资料，写出预习报告。预习报告要求写明实验名称、实验目的、实验仪器、实验原理、思考题、实验内容和步骤以及实验数据记录表等。

实验原理要简单明了，既要叙述清楚原理、内容、主要公式、原理图、电路图、光路图，又要避免照抄教材。

要认真预习思考题，经思考仍不清楚的问题在实验中加以解决。

数据记录表格要规范整洁，便于记录。

2. 实验

实验是中心环节。实际操作前要认真听老师讲解重点和难点，熟悉各种仪器的使用方法和操作规程，记录实验条件（如日期、同组人姓名、气压、湿度、温度等），然后按实验内容及步骤进行实验。在实验中应仔细观察实验现象，如实记录实验数据，不允许随意涂改数据，更不允

许抄袭他人数据。遇到疑难问题或出现故障自己解决不了时，应及时请教指导教师。实验结束应将实验数据交教师审阅并签字，整理好仪器设备，经教师同意后方可离开实验室。在实验全过程中，学生应自觉遵守实验室的各项规章制度。

3. 如何写实验报告

先对数据进行整理计算，然后用简洁的文字撰写实验报告。报告应字迹清楚，文理通顺，图表正确，逐步培养分析、总结问题的能力。报告中的原理图、电路图画出时不一定使用规尺，但对实验结果的图解表示则必须仔细，力求准确，并利用规尺或曲线板画在坐标纸上。

实验报告的内容一般包括：

a. 实验名称、实验者姓名、实验日期。

b. 实验目的。

c. 实验原理和方法。要用自己的语言简要地叙述，不要照抄书本。

d. 实验仪器(型号、编号、规格)及装置。

e. 实验内容和测量步骤。

f. 数据记录(将预习报告所记录的数据仔细地转记于此)及计算(包括误差计算)。

g. 实验结果及讨论(如对实验中观察到的现象的分析，改进实验的建议，实验后的体会，实验中存在的问题，回答实验思考题等等)。

h. 重视设计性实验：设计性实验是大学物理实验课程的一个重要环节，旨在提高学生的自主创新能力。学生在掌握了一定的理论知识、实验方法和实验技能的基础上，按照设计实验题目的要求，通过收集和分析资料，设计实验技术方案，经实验测试来检验方案的正确性与合理性，检验方案是否达到试验精度要求，最后写出比较完整的实验报告。在设计实验的整个过程中，以学生为主，学生也可自选设计题目，经教师认可后，即可实施，以充分发挥学生的自主能动性。同学们应该十分重视设计性实验这一环节。

第1章　测量与测量误差

第1节　测量误差理论与实验数据处理

一、物理实验与测量误差

1. 量、测量和单位

任何现象和实体都以量来表征。测量过程也是对现象和实体进行量化的过程。为确定被测对象的测量值，首先应选定一个单位，然后用这个单位与被测对象进行比较，求出它对该单位的比值——倍数，这个数即为数值。显然数值的大小与选用的单位有关。目前，在物理学上各物理量的单位，采用国际单位制(参见第3章第1节)，是在1971年第十四届计量大会上确定的。

2. 测量中总是存在误差

在一定条件下，任何一个物理量的大小都是客观存在的并有一个不以人的意志为转移的客观值，称为真值。人们总是希望能够准确地测得待测量的真值。但是，由于测量仪器、实验条件以及种种因素的局限，测量是不能无限精确的，测量结果与客观存在的真值之间总有一定差异，也就是说总存在着测量误差。测量结果误差的大小反映我们的认识接近于客观真实的程度。

在哲学中我们知道，一根棒一分为二，被截断的一段再一分为二，可无限地分下去，当分到一定次数以后，我们就没有测长度的仪器来测量其长度，但这些我们测不出的而客观存在的长度还可以再分下去。所以说，受科学技术水平的限制，我们总是测不到完全准确的值。

米尺的最小格是1 mm，千分尺是0.01 mm，16世纪出现的光学显微镜，其分辨率是2000Å。20世纪30年代，人们发明了电子显微镜，它可以测到2～3Å。

误差存在于一切测量之中，而且贯穿测量过程的始终。科学技术水平的提高，只能提高测量精度，但不能消灭误差。

二、误差的定义

被测物理量的大小(即真值)是客观存在的，由于测量条件的种种限制，测量值总与真值有所偏差。

所谓误差就是测量值 N 和真值(或实际值) N' 之差，表达式为：误差＝测量值－真值。

三、误差的表示

为了能够用测量误差评价测量结果和比较测量结果的可靠程度，通常用绝对误差和相对误差两种形式来表示。

1. 绝对误差

某一物理量的测量值和真值的差也称为绝对误差。用 ΔN 来表示有：

$$\Delta N = N - N' \tag{1-1}$$

式中，N 为测量值，N' 为真值。ΔN 可能是正值，也可能是负值，且有量纲。

绝对误差可以比较用不同仪器测量同一被测物理量的测量准确度的高低。

2. 相对误差

绝对误差给出了测量误差的大小，但未能直观地评价测量结果的可靠程度，不能用它来比较两个或两个以上测量精度的高低，例如：对两个长度的测量，一个是 10.0 mm，另一个是 1000.0 mm，绝对误差都是 1.0 mm，而测量精度就大不一样了。

绝对误差 ΔN 与真值 N' 的比值称为相对误差，通常用百分数 E_N 来表示：

$$E_N = \Delta N / N' \times 100\% \tag{1-2}$$

相对误差可以比较不同被测物理量的测量准确度的高低。

绝对误差和相对误差的关系是：

$$\Delta N = N' \times E_N \tag{1-3}$$

绝对误差大的，其相对误差不一定大；相对误差大的，其绝对误差不一定大。

四、误差的分类和来源

误差根据其性质和来源分为两类：系统误差和偶然误差。

1. 系统误差

它的特点是：在相同的条件下（指方法、仪器、环境、人员）对同一量进行多次测量时，误差的绝对值和符号（正、负）保持不变。测量条件改变时，误差亦按一定的规律变化。也就是说在相同条件下，多次测量的结果与真值相比，始终偏大或偏小。

它的来源有以下一些原因：

①仪器的固有缺陷。例如：刻度不准；零点没有调准；仪器水平面或铅直未调整；砝码未经校准等。

②理论（方法）误差。这是由于测量所依据的理论公式本身的近似性，或实验条件不能达到理论公式所规定的要求，或测量方法所带来的。如理论公式中没有把散热考虑在内，没有把接线电阻和接触电阻考虑在内；单摆的周期公式 $T=2\pi\sqrt{l/g}$ 的成立条件是摆角趋于零，这在实际上是达不到的；用伏安法测电阻时电表内阻的影响。

③个人误差。这是由于观测者本人生理或心理特点造成的。如用停表计时，有人常使之过快，有人常使之过慢。

系统误差有些是定值的，如游标尺的零点不准。有些是积累性的，如用受热膨胀的钢质米尺进行测量，其指示值就小于真实长度，误差值随待测长度成比例增加；还有些是周期性变化的，如仪器的转动中心读数与刻度盘的几何中心不重合，造成的偏心差就是一种周期性变化的系统误差。如图 1-1 所示，停表秒针的转轴 O 与 O' 不重合，秒针转过 1/4 圈时指 14.8s，转过半圈时指 30.0s。显然，秒针在不同位置时系统误差数值不同，它是周期性变化的，但对于指针的一定位置，它是定值；还有些系统误差是按其他一些特定的规律变化的。

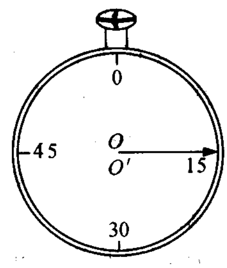


图 1-1　指针式秒表

找到了某个系统误差产生的原因，就可以采用一定的方法消除它的影响或对测量结果进行修正。

2. 偶然误差（随机误差）

在测量时，即使排除了产生系统误差的因素，在对同一被测量的多次测量过程中仍将存

在一定的误差。误差绝对值与符号以不可预知的方式变化着。这种误差是实验中各种因素的微小变动性引起的。例如实验装置和测量机构在各次调整操作上的变动性，测量仪器指示数值的变动性，以及观测者本人在判断和估计读数上的变动性……这些因素的共同影响就使测量值围绕测量的平均值发生有涨落的变化。这些由于偶然的或不确定的因素所造成的每一测量值的无规则的涨落，称为偶然误差，也叫随机误差。

偶然误差的出现，从表面上看似乎是纯属偶然，就某一测量值来说是没有规律的，其大小和方向都是不能预知的，但对一个量进行足够多次的测量，则会发现它们的随机误差是按一定的统计规律分布的。常见的一种情况是，正方向误差和负方向误差出现的次数大体相等，数值较小的误差出现的次数较多，很大的误差在没有错误的情况下通常不出现：这一规律在测量次数越多时表现得越明显，它就是称之为正态分布律的一种最典型的分布规律，如图 1－2 所示。我们可以利用这种规律对实验结果作出偶然误差的估算。

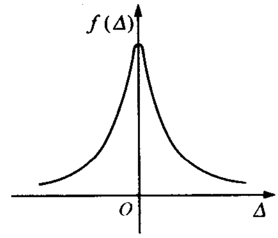


图 1－2　误差的正态分布图

在图 1－2 中，横坐标表示误差 Δ，纵坐标为一个与误差出现的概率有关的概率密度函数 $f(\Delta)$。应用概率论的数学方法可导出：

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \tag{1-4}$$

上式的特征量 σ 为：

$$\sigma = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2}{n}} \tag{1-5}$$

称为标准误差。

实验证明，当测量次数不断增加，从图 1－2 可以得到以下几点结论：

a. 单峰性。绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大。

b. 对称性。绝对值相等的正负误差出现的概率相同。

c. 有界性。在一定测量条件下，误差的绝对值不超过一定的限度。

d. 抵偿性。偶然误差的算术平均值随着测定次数的增加而越来越趋向于零，即：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum \Delta N_i = 0$$

e. 多次测量的算术平均值，能最佳地代替真值 N'。

五、测量结果的最佳值——算术平均值

对某一物理量进行等精度的重复测量 k 次，设 N' 表示某一待测量的真值，$N_1, N_2, \cdots, N_k$ 分别表示 k 次测量值，则算术平均值表示为：

$$\overline{N} = \frac{N_1 + N_2 + \cdots + N_k}{k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} N_i \tag{1-6}$$

根据误差分布特性可知，测量次数越多，算术平均值就越接近真值。所以，测量结果可以用多次测量的算术平均值作为真值的最佳值。严格说来，测量值与真值之差称为误差，测量值与平均值之差称为偏差，但是当测量次数很多时，算术平均值就趋近于真值，这时的偏差也就趋近于误差。一般来说，我们的测量次数总是很多的，因此以后就不再区分误差和偏差了。

六、偶然误差的表示法与估计

以下讨论,假设系统误差不存在。

1. 偶然误差的表示

偶然误差的大小,通常用标准误差、平均误差和极限误差来表示。

(1)标准误差 σ

①k 次测量时,其中单次测量结果的标准误差

实际做实验时,都是有限次的测量,其中单次测量结果的标准误差有如下的贝塞尔公式:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(N_i - \overline{N})^2}{k-1}} \tag{1-7}$$

标准误差 σ 所表示的意义:任作一次测量,测量值误差落在 $-\sigma$ 到 $+\sigma$ 之间的可能性为 68.3%。

②k 次测量时,平均值 $\overline{N}$ 的标准误差 $\sigma_{\overline{N}}$

任一次测量,测量值误差落在 $\pm\sigma$ 之间的可能性为 68.3%。但是,$\overline{N}$ 也是一个随机变量,随着测量次数的增减而变化,那么 $\overline{N}$ 的可靠性如何呢?显然 $\overline{N}$ 肯定比一次测量值 N_i 更可靠。$\overline{N}$ 的标准误差 $\sigma_{\overline{N}}$ 为:

$$\sigma_{\overline{N}} = \frac{\sigma}{\sqrt{k}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(N_i - \overline{N})^2}{k(k-1)}} \tag{1-8}$$

平均值的标准误差 $\sigma_{\overline{N}}$ 是任一次测量值标准误差的 $1/\sqrt{k}$倍。它表示在($\overline{N}\pm\sigma_{\overline{N}}$)范围内包含真值 N'的可能性为 68.3%。

(2)平均误差 $\Delta\overline{N}$

$$\Delta N_1 = | N - N_1 |, \Delta N_2 = | N - N_2 |, \cdots, \Delta N_k = | N - N_k |$$

则

$$\Delta\overline{N} = \frac{\Delta N_1 + \Delta N_2 + \cdots + \Delta N_k}{k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\Delta N_i \tag{1-9}$$

$\overline{\Delta N}$即作为多次测量的平均误差。

它的概率含义为:任作一次测量,测量值误差落在$-\overline{\Delta N}$到$+\overline{\Delta N}$之间的可能性为 68.3%。

$$\overline{\Delta N} \approx \frac{4}{5}\sigma \tag{1-10}$$

(3)极限误差 δ

定义:

$$\delta = 3\sigma \tag{1-11}$$

它表示任作一次测量,测量值误差落在-3σ 到$+3\sigma$ 之间的可能性为 99.7%,即 1000 次的测量,只有 3 次测量的误差的绝对值超出了 3σ。由于一般实验测量中只测量有限的几次,误差超出$\pm3\sigma$ 范围的概率极小,所以称为极限误差。

(4)关于测量次数

对于一个确定的等精度测量来说,在测量次数 $k\to\infty$时,σ 是一个常数。当 $k>10$ 后,$\sigma_{\overline{N}}$ 的变化相当缓慢。在实验教学中,为了测量方便和简化计算,取 $5<k<10$。

2. 偶然误差的估算

测量可分为直接测量和间接测量。

所谓直接测量，就是将待测量与预先标定好的仪器、量具进行比较，直接从仪器、量具上读出量值的大小，如用米尺测长度。

所谓间接测量就是待测量是由若干直接测量的物理量经过一定函数关系运算后获得的。如用单摆测重力加速度 $g=4\pi^2 l/T$，加速度不是直接测得，它是通过测量摆长和摆动周期而得到的。

(1)直接测量的偶然误差 ΔN 估计

①单次直接测量的误差估计

如果在实验中，由于条件不许可，或要求不高等原因，对一个物理量的直接测量只进行一次。这时可以根据具体的实际情况，对测定值的误差进行合理的估计。

a. 测量仪器有精度等级的，ΔN＝量程×准确度等级％；

b 仪器出厂检定书注明的仪器误差或取仪器的最小刻度(或分度值)的一半作为单次测量的误差。

②多次直接测量的测量结果与偶然误差

为了减小误差，常常采用多次测量，并求其平均值作为其测量结果。设 N' 表示某一待测量的真值，$N_1, N_2, \cdots, N_k$ 分别表示 k 次测量值，则算术平均值表示：

$$\overline{N} = \frac{N_1 + N_2 + \cdots + N_k}{k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} N_i \tag{1-12}$$

根据误差理论可证明：多次测量的算术平均值作为测量的结果，是真值的最佳近似。当测量次数 $k \to \infty$ 时，$N \to N'$。

根据误差的定义计算标准误差 σ 或平均误差 $\Delta\overline{N}$。

a. 标准误差 σ

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(N_i - \overline{N})^2}{k-1}} \tag{1-13}$$

b. 平均值 $\overline{N}$ 的标准误差 $\sigma_{\overline{N}}$

$$\sigma_{\overline{N}} = \frac{\sigma}{\sqrt{k}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(N_i - \overline{N})^2}{k(k-1)}} \tag{1-14}$$

平均误差 $\Delta\overline{N}$：

$$\Delta N_1 = | N - N_1 |,\ \Delta N_2 = | N - N_2 |, \cdots, \Delta N_k = | N - N_k |$$

则

$$\Delta\overline{N} = \frac{\Delta N_1 + \Delta N_2 + \cdots + \Delta N_i}{k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\Delta N_i \tag{1-15}$$

(2)间接测量的偶然误差估计，误差的传递和合成

①误差的一般传递公式

设间接测得量 N 与各独立的直接测量值 $x, y, z, \cdots, u$ 等有下列函数关系：

$$N = f(x, y, z, \cdots, u) \tag{1-16}$$

若直接测量的各值分别有误差 $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots, \Delta u$，则待测量 N 就会有误差 ΔN。ΔN 的

求法如下：

对式(1－16)求全微分：

$$dN = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u}du \tag{1-17}$$

由于 $dx, dy, dz, \cdots, du$ 相对于 $x, y, z, \cdots, u$ 是同阶无穷小量，在式(1－17)中以 $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots, \Delta u$ 代替 $dx, dy, dz, \cdots, du$，则间接测量的绝对误差 ΔN 为：

$$\Delta N = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u}\Delta u \tag{1-18}$$

若对式(1－16)取自然对数后再求全微分，可得：

$$\ln N = \ln(x, y, z, \cdots, u) \tag{1-19}$$

$$\frac{dN}{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dx}{f} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{dy}{f} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{dz}{f} + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{du}{f} \tag{1-20}$$

同理可得：

$$\frac{\Delta N}{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\Delta x}{f} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\Delta y}{f} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\Delta z}{f} + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\Delta u}{f} \tag{1-21}$$

由于(1－18)和(1－21)式中各项分误差的符号并不确知，为谨慎起见，只能作最不利的考虑，认为各项误差将相互加强，因此将(1－18)式和(1－21)式中各项取绝对值相加，即：

$$\Delta N = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \cdot |\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \cdot |\Delta y| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \cdot |\Delta z| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| \cdot |\Delta u| \tag{1-22}$$

$$\frac{\Delta N}{N} = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \cdot \left|\frac{\Delta x}{f}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \cdot \left|\frac{\Delta y}{f}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \cdot \left|\frac{\Delta z}{f}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| \cdot \left|\frac{\Delta u}{f}\right| \tag{1-23}$$

当然这种估算将增大结果的误差，但对这些粗糙的实验也就只能用这种方法来粗略地估算其误差范围了。

表 1－1　常用函数的误差传递公式

函数表达式	误差传递公式
$N = x + y$	$\Delta N = \Delta x + \Delta y$
$N = x - y$	$\Delta N = \Delta x + \Delta y$
$N = x \cdot y$	$\Delta N/N = \Delta x/x + \Delta y/y$
$N = x/y$	$\Delta N/N = \Delta x/x + \Delta y/y$
$N = \frac{x^k \cdot y^m}{x^n}$	$\Delta N/N = k \cdot \Delta x/x + m \cdot \Delta y/y + n \cdot \Delta z/z$
$N = k \cdot x$	$\Delta N = K \cdot \Delta x$
$N = \sqrt[k]{x}$	$\Delta N/N = 1/k \cdot \ x/x$
$N = \sin x$	$\Delta N = \lvert\cos x\rvert \cdot \Delta x$
$N = \ln x$	$\Delta N = \frac{\Delta x}{x}$

例：用液体静力称衡法，测固体密度的公式 $\rho = [M_1/(M_1 - M_2)]\rho_t$，测得 $M_1 = 27.06 \pm 0.02\ g$，$M_2 = 17.03 \pm 0.02\ g$，$\rho_t = 0.9997 \pm 0.0003\ g/cm^3$，求 $\Delta\rho/\rho = ?$ 和 $\Delta\rho = ?$

解：根据函数形式，先对 ρ 取对数，然后再全微分较方便，得基本误差传递公式：

$$\ln \rho = \ln M_1 - \ln(M_1 - M_2) + \ln \rho_t$$

$$d\ln \rho = d[\ln M_1 - \ln(M_1 - M_2) + \ln \rho_t]$$

$$\frac{d\rho}{\rho}=\left(\frac{1}{M_1}-\frac{1}{M_1-M_2}\right)dM_2+\frac{d\rho_t}{\rho_t}$$

误差传递公式：

$$\frac{d\rho}{\rho}=\left|\left(\frac{1}{M_1}-\frac{1}{M_1-M_2}\right)\Delta M_1\right|+\left|\frac{1}{M_1-M_2}\Delta M_2\right|+\left|\frac{d\rho_t}{\rho_t}\right|$$

$$=\frac{M_2}{(M_1-M_2)M_1}\Delta M_1+\frac{1}{M_1-M_2}\Delta M_2+\frac{\Delta\rho_t}{\rho_t}$$

$$\rho=\frac{M_1}{M_1-M_2}\rho_t=\frac{27.06}{27.06-17.03}\times 0.9997=2.70\ \mathrm{g/cm^3}$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}=\frac{M_2}{M_1(M_1-M_2)}\Delta M_1+\frac{\Delta M_2}{M_1-M_2}+\frac{\Delta\rho_t}{\rho_t}=0.36\%$$

$$\Delta\rho=\rho\times\frac{\Delta\rho}{\rho}=2.70\times 0.36\%=0.01\ \mathrm{g/cm^3}$$

$$\rho\pm\Delta\rho=(2.70\pm 0.01)\ \mathrm{g/cm^3}$$

②标准误差的传递公式

若每一个直接测得量是在同样条件下进行了多次重复测量，其最佳值各为 $\bar{x},\bar{y},\bar{z},\cdots,\bar{u}$，它们的误差纯属随机误差，分别为 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\cdots,\sigma_u$，则间接测量的最佳值为：

$$\bar{N}=f(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\cdots,\bar{u}) \tag{1-24}$$

由式(1－24)可得，每次测量的 ΔN_i 为：

$$\Delta N_i=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x_i+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta y_i+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta z_i+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta u_i,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1-25}$$

等式两边各自平方，得：

$$(\Delta N_i)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2(\Delta x_i)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2(\Delta u_i)^2+2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(\Delta x_i)(\Delta y_i)+\cdots \tag{1-26}$$

然后将 n 次测量的 $(\Delta N_i)^2$ 相加起来，得：

$$\sum(\Delta N_i)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sum(\Delta x_i)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2\sum(\Delta u_i)^2+2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\sum(\Delta x_i)(\Delta y_i)+\cdots \tag{1-27}$$

由于各自独立，则各次测量中各自互不相关地时正时负、时大时小，因而当测量次数 n 很大时，式(1－27)中各交叉乘积项的和将趋于零，即

$$\sum(\Delta x_i)(\Delta y_i)=\sum(\Delta y_i)(\Delta z_i)=\cdots=0$$

然后将式(1－27)两边都除以 n，得：

$$\frac{1}{n}\sum(\Delta N_i)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\frac{1}{n}\sum(\Delta x_i)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\frac{1}{n}\sum(\Delta u_i)^2$$

式中，$\frac{1}{n}\sum(\Delta x_i)^2=\sigma_x^2,\cdots,\frac{1}{n}\sum(\Delta u_i)^2=\sigma_u^2$ 是各直接测得量的标准误差的平方，而 $\frac{1}{n}\sum(\Delta N_i)^2=\sigma_N^2$ 是间接测得量的标准误差的平方。由此可得标准误差的传递公式为：

$$\sigma_N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2\sigma_u^2} \tag{1-28}$$

式(1－28)不仅可以用来计算间接测量量的标准误差，而且还可以用来分析各直接测量

量误差对最后结果误差的影响大小，从而为改进实验指出了方向，在设计一项实验时，还能为合理地组织实验、选择仪器提供必要的依据。

七、仪器误差

测量是用仪器或量具进行的。有的仪器比较粗糙或灵敏度较低，有的仪器比较精确或灵敏度较高，但任何仪器都存在误差。仪器误差就是指在正确使用仪器的条件下，测量所得结果的最大误差。

仪器准确度的级别通常是由制造工厂和计量机构使用更精确的仪器、量具，经过检验比较后给出的。由所用仪器的量程和级别（或只用级别）就可以算出仪器误差的大小。下面列举几种常用器具的仪器误差。

（1）钢直尺和钢卷尺

常用的钢直尺的分度值为 1 mm，有的在起始部分或末端 50 mm 内加刻 0.5 mm 的刻线。

常用的钢卷尺分大、小钢卷尺两种，小钢卷尺的长度有 1 m 和 2 m 两种，大钢卷尺的长度有 5 m、10 m、20 m、30 m、50 m 五种，它们的分度值皆为 1 mm。

按国家标准钢直尺和钢卷尺的允许误差如表 1－2 所示。

表 1－2

规格/mm		允许误差/mm
钢直尺	至 300	±0.1
	300～500	±0.15
	500～1000	±0.2
钢卷尺	1000	±0.5
	2000	±1

（2）游标卡尺

游标卡尺不分精度等级，一般测量范围在 300 mm 以下的卡尺其分度值便是仪器的示值误差，因为确定游标尺上哪条线与主尺上某一刻度对齐，最多只可能有正负一条线之差，如表 1－3 所示。

表 1－3

示值误差/mm \ 分度值/mm \ 测量范围/mm	0.02	0.05	0.1
0～300	±0.02	±0.05	±0.1
300～500	±0.04	±0.05	±0.1

（3）螺旋测微计（千分尺）

千分尺是一种常用的高精度量具，按国家标准（GB1216－75）规定，量程为 25 mm 的一级千分尺的仪器误差为 0.004 mm。千分尺仪器误差主要由以下几个因素产生：①千分尺两测量面不严格平行；②螺杆误差；③温度不同（试件与千分尺温度不同或相同，但测量环境温度不同于千分尺的定标温度）；④转动微分筒作测量时，转矩的变化（同一测量者或不同的测量者）；⑤读数误差，由于圆筒上的指示线与微分筒上的刻度不在同一平面内而产生的视差。