高等教育自学考试辅导丛书

黄凤山 主编

高等教育
自学考试

高等数学
考试题型训练与解答

沈青 编写

中央广播电视大学出版社

高等教育自学考试辅导丛书
黄 凤 山 主 编

高等教育自学考试

高等数学
考试题型训练与解答

沈 膏 编 写

中央广播电视大学出版社

(京)新登字163号

高等教育自学考试辅导丛书

高等数学考试题型训练与解答

黄凤山 主编

*

中央广播电视大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

辽宁昌图印刷厂印装

*

开本787×1092 1/32 印张9.25 千字204

1992年12月第1版 1992年12月第1次印刷

印数 1—3000

定价 8.20元

ISBN7—304—00739—7/G·71

丛 书 前 言

为了帮助和指导参加高等教育自学考试的学员，学好《大学语文》、《政治经济学》、《哲学》、《高等数学》和《普通逻辑》等五门公共课，提高运用所学知识的技能和技巧，增强考试取胜的能力和信心，我们根据国家教委最新发布的《高等教育自学考试命题工作规定》，并参照近年来上述五门学科考试要求和题型特点，设计、编写出版了《高等教育自学考试辅导丛书》，包括《高教自考大学语文考试题型训练与解答》、《高教自考政治经济学考试题型训练与解答》、《高教自考哲学考试题型训练与解答》、《高教自考高等数学考试题型训练与解答》和《高教自考普通逻辑考试题型训练与解答》。

丛书特点：一、与高教自考题同型，各书均按高教自考题型设计，解题明径，做到临场不慌；二、与自学同步，根据大纲和教材序列采取边自学边答卷，助学与练习紧密结合；三、与课后的练习相辅相成；四、作者均系主教院校的命题教师，各书模拟题设计心中有数，因而题型设计目的明确，针对性、实用性强。

这套丛书共五册，由沈阳市教育学会编辑部主任、沈阳财经学院副教授黄凤山进行总体设计，组织编写，终审统稿，担任主编。

由于水平有限，成书仓促，各书中难免出现不妥，敬请广大学员、教师及有关专家指正，以便再版改正。

编　　者

目　　录

第一部分　基础训练

一、函　　数

考试大纲的基本要求

理解集合、函数的定义，了解函数的单调性、有界性、奇偶性与周期性；熟悉函数、反函数及复合函数及其定义域的求法；并要求掌握基本初等函数及经济学上常见的一些函数的导出、分析及其图形。

模拟试题一

一、单项选择题（在每小题的四个备选答案中选出一个正确的，并将其序号填在题干后的括号内。每小题 1 分，共 20 分）

1、设有集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 5\}$，则有　　（　　）

(1)$A\supset B$　　(2)$A\subset B$

(3)$A\cap B\supset B$　　(4)$A\cap B\subset B$

2、若 $f(\frac{1}{x})=(\frac{x+1}{x})^2$，　则 $f(x)=$　　（　　）

(1)$(\frac{x}{1+x})^2$　　(2)$(\frac{1+x}{x})^2$

(3)$(1+x)^2$　　(4)$(1-x)^2$

3、函数 $y=\sqrt{1-x^2}ln(|x|+x)$ 的定义域是　（　　）

(1)$[-1,0)\cup(0,1]$　　(2)$(0,1]$

(3)$[-1,1]$　　　　　　(4)$[-1,0)$

4、若 $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$，　则 $f[f(x)]$ 是

　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

(1)$x+|x|$　　　　　　(2)　0

(3) $\begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$　　　(4)$\begin{cases} x & x \leqslant 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$

5、下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示同一函数的是　　（　　）

(1)$f(x)=x$，　$g(x)=(\sqrt{x})^2$

(2)$f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$

(3)$f(x)=|x|, g(x)=\begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

(4)$f(x)=1, g(x)=x^0$

6、$f(x)=log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$　　是　　　　（　　）

(1) 偶函数　　　　　(2) 奇函数

(3) 既是奇函数又是偶函数

(4) 既不是奇函数也不是偶函数

7、下列函数中是偶函数的有　　　　　　　　（　　）

(1) $\frac{|x|}{x}$　　　　　(2)$x^2 \cdot cosx$

(3) $\frac{e^x-1}{e^x+1}$　　　　　(4)$log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$

8、函数 $y=2-lg(x+1)$ 是　　　　　　　　　（　）

(1) 单调增函数$(x>-1)$　　(2) 单调减函数$(x>-1)$

(3) 不是单调函数$(x>-1)$　(4) 是单调函数$(x>-1)$

9、设集合 $A=\{a_1,2,3,4\}, B=\{1,3,b_3\}$，则当 a_1、b_3 的值取（　）时，有 $A \cup B=\{1,2,3,4\}$。

(1)$a_1=1, b_3=2$　　(2)$a_1=5, b_3=2$

(3)$a_1 = 1, b_3 = 5$　　(4)$a_1 = 5, b_3 = 5$

10、对任意一个非空集合 A，恒有　　(　　)

(1)$A \cup \varnothing = \varnothing$　　(2)$A \cap \varnothing = \varnothing$

(3)$A \cup A = \varnothing$　　(4)$A \cap A = \varnothing$

11、点 x_0 的 δ 领域$(\delta > 0)$是区间　　(　　)

(1)$[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$　　(2)$[x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

(3)$(x_0 - \delta, x_0 + \delta]$　　(4)$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

若函数 $f(x) = |1 + x| + \dfrac{(7 - x)(x - 1)}{|2x - 5|}$，则 $f(-2) =$　　(　　)

(1)　4　　(2)　8

(3)　-2　　(4)　-4

13、设 $E = \{x | x \geqslant 0\}, F = \{x | x < 2\}$　则 $E \cap F$ 是　　(　　)

(1)$\{x | x \geqslant 0$ 或 $x < 2\}$　　(2)$\{x | 0 < x < 2\}$

(3)$\{x | 0 \leqslant x \leqslant 2\}$　　(4)$\{x | 0 \leqslant x < 2\}$

14、下列函数中，非奇非偶的函数是 $f(x) =$　　(　　)

(1)$1 + x^2$　　(2)$x + x^3$

(3)$|x|$　　(4)$|x + 1|$

15、如果 $y = u^2$，　$u = log_a x (a > 0,$　$a \neq 1)$ 则将 y 表成 x 的函数是　　(　　)

(1)$log_a x^2$　　(2)$log_a^2 x$

(3)$2log_a x$　　(4)$log_a 2x$

16、若 $f(x - 1) = x(x - 1)$，则 $f(x) =$　　(　　)

(1)$x(x + 1)$　　(2)$(x - 1)(x - 2)$

(3)$x(x - 1)$　　(4) 不存在

17、设 $f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2 & 1<x\leqslant 2\end{cases}$

则 $g(x)=f(2x)+f(x-2)$ 是　　　　　　　　　　　（　　）

(1) 无意义　　　　　　(2) 在〔0,2〕上有意义

(3) 在〔0,4〕上有意义 (4) 在〔2,4〕上有意义

18、函数 $y=|sinx|$ 的周期是　　　　　　　　　　　（　　）

(1)4π　　(2)2π　　(3)π　　(4) $\frac{\pi}{2}$

19、函数 $y=lg(x-1)$ 在区间(　)内有界

(1)$(1,+\infty)$　(2)$(2,+\infty)$　(3)$(1,2)$　(4)$(2,3)$

20、函数 $y=\frac{2x}{1+x^2}$ 是　　　　　　　　　　　（　　）

(1) 偶函数　　　　　　(2) 奇函数

(3) 单调函数　　　　　(4) 有界函数

二、填空题(每小题 1 分,共 10 分)

1、设函数 $y=1+lnx$ 的反函数是________

2、函数 $y=\frac{1}{|1-x|}$ 的定义域是____。

3、设函数 $f(x)=\begin{cases}3x+1 & x\leqslant 0\\ x-2 & x>0\end{cases}$，则 $f(1)=$ ________。

4、函数的 $f=\sqrt{x-2}+\frac{1}{x-3}+lg(5-x)$ 的定义域是________。

5、函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+arcsin\frac{2x-1}{7}$ 的定义域是________

6、求出函数 $y=sinx\cdot cosx$ 的最小周期是________。

7、函数 $y=3x-2$ 的反函数是________，它的图象关于________对称。

8、复合函数 $y=lg(x-1)$ 是由________复合而成的，它的定义域是________。

9、设函数 $f(x)=\begin{cases}1 & \frac{1}{e}<x<1 \\ x & 1\leqslant x<e,\end{cases}$ $\varphi(x)=e^x$，

则 $f[\varphi(x)]=$________

10、设 $y=f(x)=1+log_a(x+3)\quad(a>0)$

则 $y=f^{-1}(x)=$________

三、计算题(一)(每小题 4 分，共 20 分)

1、求函数 $y=f(x)$

$=\begin{cases}-x & x<0 \\ x^2 & 0\leqslant x<2 \\ x+2 & x>2\end{cases}$ 的定义域及 $f(-2)$、$f(3)$、

2、求函数 $y=log_a(x+\sqrt{x^2-1})(a>0,a\neq 1)$ 的反函数。

3、判断函数 $y=log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性

4、讨论函数 $y=log_a x$ 的单调增减性

5、$f(x)=sin^2x$ 是否为周期函数？

四、计算题二(每小题 5 分，共 25 分)

1、讨论 $y=f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的单调性。

2、设 $f_n(x)=f\{f[\cdots f(x)]\}$，若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

求：$f_n(x)$.

3、设 $y = f(x)$ 的定义域是$[0,1]$

求：$f(x+a)+f(x-a) \quad (a>0)$ 的定义域。

4、已知 $f(\sin\frac{x}{2}) = \cos x + 1$，求 $f(\cos\frac{x}{2})$

5、某商品供给量 Q 对价格 P 的函数关系为 $Q \triangleq Q(p) = a + bc^p$，今知当 $p=2$ 时，$Q=30$；$p=3$ 时，$Q=50$；$p=4$ 时，$Q=90$，求供给量 Q 对价格的函数关系。

五、应用题(每小题 8 分，共 16 分)

1、某厂某产品产量为 q 件，每销售 1 件收入为 50 元，当月产量在 3000 以内时可以全部销售完，当月产量超过 3000 件时，经电视广告宣传后还可售出 1000 件，每件平均广告费为 10 元，生产再多就售不出去，试将本月销售收入 R 表示为月产量 q 的函数。

2、某服装厂批发 2 万套某新款式西装给商业大厦，目前该型号西装市场每套售价为 480 元。若该厂每次多批发 2 千套，则市场上该型号西装，每套将降低 15 元。现在该厂最多能批发给商业大厦 3 万套，最少销售为 2 万套，试写出这种服装的价格函数。

六、证明题(9 分)

设 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 及 $f(x)$ 为$(-\infty,+\infty)$上的单调增函数，证明：若 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$

则：$\varphi[\varphi(x)] \leqslant f[f(x)] \leqslant \psi[\psi(x)]$

答案及试题分析

一、单项选择题

1、(4)　　　　2、(3) $\because f(\frac{1}{x})=(\frac{x+1}{x})^2$

$$f(x)=(\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}})^2=(\frac{1+x}{1})^2=(1+x)^2$$

3、(2)　由 $\begin{cases}1-x^2\geqslant 0\\ |x|+x>0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1\\ x>0\end{cases}$

$\therefore x\in(0,1]$ 为函数的定义域。

4、$f[f(x)]=\frac{1}{2}[f(x)+|f(x)|]=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(x+|x|)+|\frac{1}{2}(x+|x|)|]=\frac{1}{4}[x+|x|+|x+|x||]$

即 $f[f(x)]=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$　故选(3)

5、(1) $f(x)=x$ 的 $D_f=(-\infty+\infty)$ 而 $g(x)=(\sqrt{x})^2$ 的 $Dg=[0,+\infty)]$ 故二者是不同的函数，(1) 排除。

(2) 虽然 Df 与 Dg 都是 $(-\infty+\infty)$，但二函数的对应规律不同；如取 $x=-1, f(x)=-1; g(x)=\sqrt{(-1)^2}=|-1|=-(-1)=1$ $\therefore$(2) 也排除。

(3) $D_f=(-\infty,+\infty)$，　$Dg=(-\infty,+\infty)$，对应规律也相同，$\therefore$ 二者表示同一函数。故选(3)。

(4) $\because f(x)=1$　$D_f=(-\infty+\infty)$，而 $g(x)=x^0$　它的定义域　$D_g=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 定义域不同，应排除。

故本题选(3)。

6、由于 $f(-x)=log_a\sqrt{(-x)^2+1}-x)$

$=log_a\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$=log_a\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$=log_a(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$ 奇函数，故选(2)

7、(1)由于 $y=f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，$f(-x)=\dfrac{|-x|}{-x}=-\dfrac{|x|}{x}$

$=-f(x)$ 奇函数；

(2)　$y=f(x)=x^2cosx$，　$f(-x)=(-x)^2cos(-x)$

$=x^2cosx=f(x)$　　偶函数

(3)　$y=f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$　$f(-x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$

$=-\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$　是奇函数。

(4)　$y=f(x)=log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$ $f(-x)$

$=log_ax(\sqrt{(-x)^2+1}-x$

$=log_ax\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$=log_ax\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$=-log_ax(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$ 奇函数　　故选(2)

8、$y=2-lg(x+1)=f(x)$，　$Df=(-1,+\infty)$

设 $x_1,x_2\in(-1,+\infty)$　令 $-1<x_1<x_2$

$f(x_1)-f(x_2)=2-lg(x_1+1)-[2-lg(x_2+1)]$

$=lg(\dfrac{x_2+1}{x_1+1})>0$　$(\because\dfrac{x_2+1}{x_1+1}>1)$

$\therefore f(x_1) > f(x_2)$

$\therefore y = 2 - lg(x+1)$ 在 $(-1, +\infty)$ 是单调减函数，故选(2)

9、(1) $\{1,2,3,4\} \cup \{1,3,2\} = \{1,2,3,4\}$

(2) $\{5,2,3,4\} \cup \{1,3,2\} = \{1,2,3,4,5\}$

(3) $\{1,2,3,4\} \cup \{1,3,5\} = \{1,2,3,4,5\}$

(4) $\{5,2,3,4\} \cup \{1,3,5\} = \{1,2,3,4,5\}$　选(1)

10、由定义知选(2)

11、　(4)

12、$f(-2) = |1-2| + \dfrac{(7+2)(-2-1)}{|-4-5|}$

$= 1 + \dfrac{9(-3)}{9} = -2$　选(3)

13、　(4)

14、$1 + (-x)^2 = 1 + x^2$　偶函数；

$-x + (-x)^3 = -(x + x^3)$　奇函数；

$|-x| = |x|$　偶函数

只有 $|-x+1| \neq |x+1|$ 也 $\neq -|x+1|$ 是非奇非偶　选(4)

15、　(2)

16、由 $f(x-1) = x(x-1)$，　设 $x - 1 = u$

即 $f(u) = (u+1)u$

即 $f(x) = x(x+1)$　故 $f(x) = (1)$

17、$\because f(2x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 2 & \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$

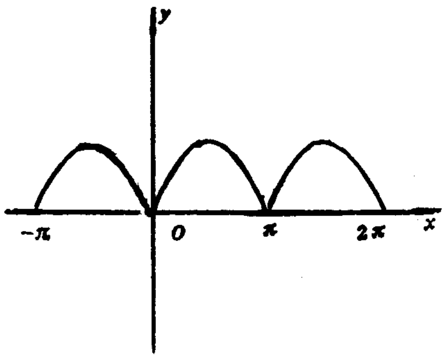
而 $f(x-2)=\begin{cases}1 & 2\leqslant x\leqslant 3\\ 2 & 3<x\leqslant 4\end{cases}$

即 $g(x)=f(2x)+f(x-2)$ 在〔0,2〕上无意义。选(1)

18、 $y=f(x)=\begin{cases}\sin x & 2n\pi<x<(2n+1)\pi\\ -\sin x & (2n-1)\pi<x<2n\pi\end{cases}$

$\sin x$ 的 $T_1=2\pi$;$\cdots(-4\pi,-3\pi),(-2\pi,-\pi),(0,\pi),(2\pi,3\pi)\cdots$ $-\sin x$ 的 $T_2=2\pi$:$\cdots(-3\pi,-2\pi),(-\pi,0),(\pi,2\pi)\cdots$ 二值相等,

故 $y=|\sin x|$ 的周期是(3)$T=\pi$



19、 $y=lg(x-1)$ $Df=(1,+\infty)$ 其在 Df 内有限区间内有界,故在(4)内有界。

20、∵$(x-1)^2\geqslant 0$ 即 $x^2+1\geqslant 2x$

故 $|f(x)|=\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant 1=M$ 是有界函数。

二、填空题

1、 $y=e^{x-1}$ ($y=1+lnx$, $lnx=y-1$ $x=e^{y-1}$ 故反函数 $y=e^{x-1}$)

2、 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ (∵$|1-x|\neq 0$ 即 $x\neq 1$)

3、-1 (∵$1>0$ 故 $F(1)=x-2|_{x=1}=-1$)

4、$[2,3)\cup(3,5)$ $\left(\begin{cases}x-2\geqslant 0\\x-3\neq 0\\5-x>0\end{cases}\right.$ 即$\begin{cases}x\geqslant 2\\x\neq 3\\x<5\end{cases}$

定义域：$[2.5)$ 且 $x\neq 3$ 即 $Df=[2,3)U(3,5))$

5、$[-3,-2]\cup[3,4]$ $\left(\begin{cases}x^2-x-6\geqslant 0\\\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\end{cases}\right.$

即$\begin{cases}x\geqslant 3 \quad 或\ x\leqslant -2\\-3\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$ $Df=[-3,-2]\cup[3,4])$

6、π $\left(y=sinx\cdot cosx=\dfrac{1}{2}sin2x\right.$

$$T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{2}=\pi)$$

7、$y=\dfrac{x+2}{3}y=x$； $(1,+\infty)$

8、$y=lgu$， $u=x-1$； $(1,+\infty)$

9、 $\begin{cases}1 & -1<x<0\\e^x & 0\leqslant x<1\end{cases}$ （$\because f(x)=$

$\begin{cases}1 & \dfrac{1}{e}<x<1\\x & 1\leqslant x<e\end{cases}$

$\therefore f[\varphi(x)]=\begin{cases}1 & \dfrac{1}{e}<\varphi(x)<1\\\varphi(x) & 1\leqslant\varphi(x)<e\end{cases}$ 又由于 $\varphi(x)$

$=e^x$

所以 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}1 & \dfrac{1}{e}<e^x<1\\e^x & 1\leqslant e^x<e\end{cases}$