当代
杰出青年
科学文库

非线性数学物理方法

楼森岳 唐晓艳 著

科学出版社
www.sciencep.com

(O-2608.0101)

ISBN 7-03-018144-1

9 787030 181442 >

销售分类建议：高等物理

ISBN 7-03-018144-1

定 价：59.00 元

中国科学院科学出版基金资助出版

当代杰出青年科学文库

非线性数学物理方法

楼森岳　唐晓艳　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书研究如何将线性科学中适用的强有力的基本方法发展推广到非线性科学. 书中全面系统论述作者及其课题组近几年建立的新研究方法,如多线性分离变量法、泛函分离变量法和导数相关泛函分离变量法、形变映射法、方程推导的非平均法等. 本书还系统介绍了在非线性数学物理严格解研究方面的一些其他重要方法及其最新发展, 如有限和无限区域的反散射方法、形式分离变量法、奇性分析法、对称性约化方法、达布变换方法和广田直接法等等. 书中利用这些方法, 对非线性系统中的各种局域激发模式及其相互作用作了详尽的描述.

本书可作为高等院校物理系和数学系等理工科高年级本科生选修课教材和研究生专业基础课教材, 也可供物理、数学、力学、计算机、大气和海洋科学等非线性科学领域的研究人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

非线性数学物理方法/楼森岳,唐晓艳著. —北京: 科学出版社, 2006. 11
(当代杰出青年科学文库/白春礼主编)
ISBN 7-03-018144-1

I. 非… II. ①楼… ②唐… III. 非线性-数学物理方程 IV. O175. 24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 121867 号

责任编辑: 吕 虹 / 责任校对: 赵桂芬
责任印制: 安春生 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 12 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2006 年 12 月第一次印刷 印张: 23 3/4
印数: 1—3 000 字数: 447 000

定价: 59.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈科印〉)

前　言

在线性理论日臻完善的今天, 非线性科学已经蓬勃发展于各个研究领域而成为研究焦点. 因此在研究过程中将无法避免地碰到各种各样的非线性方程, 而对于这些非线性方程的求解无疑成为非线性科学研究的关键所在, 也是非线性研究的难点所在. 不同于线性方程, 由于线性叠加原理的失效, 还没有办法给出本质上非线性的非线性系统的一般解. 虽然一类特解能用一种或几种方法得到, 但一种方法通常不能得到各种类型的特解. 因此, 求解非线性系统没有统一的方法, 目前仍处于八仙过海, 各显神通的阶段.

通过众多科学家的努力, 人们已经建立和发展了不少求解非线性系统的有效方法, 特别是针对其中一些被归为可积的非线性系统. 常用的方法有反散射变换 (inverse scattering transformation) 方法、达布变换 (Darboux transformation) 方法、双线性方法和多线性方法 (bilinear method and multilinear method)、经典和非经典李群法 (classical and non-classical Lie group approaches)、CK 直接法 (Clarkson-Kruskal's direct method)、形变映射法 (deformation mapping method)、Painlevé 截断展开 (truncated Painlevé expansion) 方法、混合指数法 (mixing exponential method)、函数展开法 (function expansion method)、几何方法 (geometrical method) 和穿衣服方法 (dressing method) 等等.

目前有不少专门介绍某一种研究方法的专著, 但是还没有能较完全系统地介绍非线性系统的各种研究方法的书籍, 当然要在一本书中详细介绍所有的研究方法也是不可能的. 本书的撰写主要是从将通常的线性的《数学物理方程》的书做相应的非线性推广这一角度来设计的. 因此本书主要分成两大板块进行论述：第一大板块研究如何从一个基本的原理性方程出发来推导相对简单的可积非线性数学物理方程. 这一部分对于研究实际物理系统的学者尤为重要. 第二板快是本书的主体, 研究如何将线性数学物理方程的三种基本研究方法：行波法、分离变量法和傅里叶变换法推广成非线性行波法, 非线性分离变量法和非线性傅里叶变换法. 本书的最后简要介绍非线性方程的其他一些研究方法, 如 Painlevé 分析法, Darboux 变换法, 广田直接法和对称约化法等等. 希望读者能通过本书的学习, 掌握多种求解非线性方程的方法以适用于今后的非线性研究.

全书共分八章. 第一章是绪论, 主要介绍一些非线性科学领域, 特别是可积系统的发展历程及当前各种研究方法的发展动态.

第二章介绍如何从一个基本模型出发推导得到各类低维著名的非线性数学物

理方程. 在此, 采用多重尺度展开方法, 从大气物理中的单层正压位涡方程 (考虑地球自转后的流体体系的基本运动方程) 出发推导出变系数 KdV 型、MKdV 型和非线性薛定谔型方程; 从双层模型出发推导耦合 KdV 方程.

第三章介绍非线性方程的行波法. 先简单回顾线性波动方程的行波法, 然后把该方法推广到非线性系统, 得到 KdV、MKdV、KP 和非线性 Klein-Gordon 方程的一般行波解以及非线性薛定谔方程的一般包络行波解. 对于较低阶的自治模型, 其一般的行波解通常可以用直接积分表示出来, 但对于较高阶的模型, 一般的行波解并不能得到, 而只能得到一些特殊的行波解. 如何得到一些特殊的显式的行波解有不少简单方法, 这里主要介绍两种方法. 一种是一般的函数展开法, $\phi^{(n,m)}$ 展开法, 并以 KdV- MKdV 方程为例. 但是该方法并不适用于类似多 sine-Gordon 系统的非多项式 (场量及其导数的多项式) 非线性系统, 为此我们提出了一种行波形变映射法并以 sG、双 sG 和 ϕ^6 模型为例加以实现说明.

第四章比较系统地介绍多线性分离变量法, 其主要内容分为三部分. 第一部分主要介绍多线性分离变量法. 先概括性地论述多线性分离变量法求解非线性系统的一般步骤, 然后以 2+1 维 DS 和 BLMP 可积系统、不可积 KdV 系统和 3+1 维 Burgers 系统为例具体求解得到多线性分离变量解. 同时简单罗列了其他具有多线性分离变量解的非线性系统. 第二部分内容是将上一部分中的基本多线性分离变量法做二类一般推广, 并分别求解修正的 NNV 系统、sG 系统和长波色散方程、BKK 系统、高阶 BKK 系统和高维势 Burgers 系统. 在多线性分离变量解和一般多线性分离变量解的基础上, 第三部分集中给出各类非线性激发模式, 如多瞬子解、多环孤子解、多 solitoff 解、多 dromion 解、dromion 格点解、多呼吸子解、多 lump 解和鬼孤子 (或隐形孤子) 解、多 peakon 解、多 compacton 解、混沌线孤子解、混沌 dromion 解、混沌 lump 解、折叠孤立波和折叠子等等, 并研究各种激发模式的相互作用行为.

第五章是关于泛函分离变量法和导数相关泛函分离变量法. 先论述一般条件对称 (GCS)、泛函分离变量解 (FSS) 和导数相关泛函分离变量解 (DDFSS) 的基本理论. 然后讲述泛函分离变量法的一般求解过程并计算得到具有 FSS 的 1+1 维和 2+1 维一般非线性扩散方程和一般非线性波动方程的严格解. 最后阐述导数相关泛函分离变量法的一般求解过程并依次解决三类方程: 一般非线性扩散方程, 一般 KdV 方程和一般非线性波动方程的 DDFSS 问题; 完成上述一般方程的 DDFSS 可解归类, 给出所得分类方程的 DDFSS 严格解, 并给出解对应的对称群解释.

第六章介绍形式分离变量法. 形式分离变量法实际上最早是由曹策问教授提出并建立的非线性化方法, 之后程艺教授和李翊神教授将该方法推广到高维系统 (2+1 维系统), 并称之为对称性约束方法, 后来李翊神教授和曾云波教授又将该方法称之为分离变量法. 本书作者之一 (楼) 在将该方法推广到不可积系统时称之为

形式分离变量法. 因此本章也分三部分来论述这种方法. 第一部分介绍由曹策问教授建立的非线性化的基本思想方法. 第二部分讨论程艺教授和李翊神教授的对称性约束方法. 第三部分讨论如何发展该方法于一般的非线性方程 (包括可积和不可积模型) 及该方法在对称性约化中的应用.

第七章是关于非线性傅里叶变换方法. 非线性傅里叶变换方法又称反散射方法, 是线性系统的傅里叶变换在非线性系统中的成功而又较系统和成熟的推广. 在该方向, 由于国内外众多大师的努力已相当完善, 因此这部分内容主要是参考已有的书籍和文献编译而成. 首先介绍线性系统的傅里叶变换的基本思想. 然后以非线性薛定谔方程为例讲述非线性傅里叶变换方法. 最后介绍非线性傅里叶变换法的最新国际研究进展: 有限区域内的反散射方法.

第八章简单介绍非线性方程的其他研究方法. 主要讲述广田直接法、达布变换法、Painlevé 分析法、对称约化法和非行波形变映射法. 这些方法对不同类型的非线性系统都有各自非常成功的应用. 我们在这些方法上都作了一些推广和改进, 因此在论述的时候添加了我们自己的研究特色和成果.

考虑到本书各章节的内容具有相对独立性, 因此定义、命题、引理、定理、注等都按章节独立排序, 仅对参考文献按作者姓氏字母序统一排序. 所以读者可以根据自身的要求和特点进行跳跃式阅读.

本书的主要内容虽然是著者所在课题组的一些研究成果, 但是在写作时力求详细和全面, 希望本书在面向科研工作者的同时能成为适合研究生和大学高年级学生的教材.

作者特别感谢中国科学院科学出版基金的资助. 本书相关的研究成果得到了国家自然科学基金的资助. 作者感谢合作者张顺利, 胡恒春和贾曼. 本书的某些章节包含了一些与他们合作的研究工作. 如第五章的主要内容是张顺利博士论文的研究内容, 第八章有关达布变换一节的内容基于胡恒春的博士论文, 第八章有关非行波形变映射法一节的内容基于贾曼的硕士论文. 感谢李翊神教授、吴可教授、胡星标研究员、刘青平教授、范恩贵教授、阮航宇教授和陈勇教授等在本书编写过程中提出的有益的建议. 特别感谢科学出版社吕虹编审对本书的出版所付出的辛勤劳动和给予的大力帮助. 书中必定有一些不足之处, 欢迎读者批评和指正.

目　　录

第一章 绪 论

国际纯粹物理与应用物理联合会 (IUPAP) 的第 18 委员会 (数学物理委员会) 在文献 [14] 中指出：数学物理跨越了物理学的每一个子领域. 它的目的是应用现有的最有力的数学技巧去表述和求解物理问题. 数学是理论物理的语言, 像其他语言一样, 它提供了一种用简洁而一致的方式组织见解和表达思想的工具. 清晰地使用数学语言的物理学家们对于物理学的现代表述作出了最大的贡献. 在这长长的名单中包括了诸如牛顿、麦克斯韦、爱因斯坦、薛定谔、海森堡、外尔、维格纳和狄拉克等人的名字.

数学物理既是交叉学科, 也是物理学的主流之一. 实验物理学家在他们的研究中使用工程和电子技术, 理论物理学家则广泛地使用数学. 数学物理学家的特殊之处就在于他们和物理学家以及数学家都有交流与相互影响. 一些人提出物理中产生的数学问题; 另一些人, 主要是理论物理学家, 在解释物理现象时求助于系统的数学方法, 例如发展和求解物理模型. 他们的共同之处是对于了解物理学中尚未阐明的令人激动的系统和数学挑战的兴趣. 其结果既促进了物理学的整体发展, 也对数学和新技术作出了贡献. 物理学不是一个孤立的学科, 它得益于且丰富了许多相关的其他学科领域.

在非线性科学中, 孤立子理论在自然科学的各个领域里是非常重要的角色[1, 30, 57, 61, 92, 113, 212]. 孤子理论一方面在量子场论、粒子物理、凝聚态物理、流体物理、等离子体物理和非线性光学等等物理学的各个分支及数学、生物学、化学、通信等各自然科学领域得到了广泛的应用[1, 92, 113]; 另一方面极大地促进了一些传统数学理论的发展[212], 从而可积系统的研究引起了物理学家和数学家的极大兴趣.

1.1 孤立波和孤立子

历史上对孤立波的最早报道可以追述到 1834 年. 那年一次偶然的机会, 英国科学家罗素 (John Scott Russell) 观察到了从爱丁堡到格拉斯哥的运河中浅水面上形成的保持原有形状和速度不变、圆而光滑、轮廓分明的孤立的水波[215]. 1844 年他给第 14 届英国科学促进协会的报告[216] 中如此写道：

I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped-not so the mass of the water in the channel which it had put in motion: it accumulated round the prow of the vessel in a state of violet agitation, then suddenly leaving it behind rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the wave of Translation,...

但是, 真正引入"孤立子"这一概念并导致世界范围内对孤立子理论研究产生热潮的是 Kruskal 和 Zabusky 在 1965 年发表的一篇文章[236], 他们在从连续统一体的观点来考虑 FPU 问题的过程中确切地揭示了孤立波 (子) 的本质. 当两个孤立波碰撞之后保持形状不变, 那么就称这类孤立波为孤立子 (或简称孤子).

孤立波和孤立子是非线性系统中最重要的基本激发 (elementary excitation). 基本激发这一概念的使用来源于大多数多体系统共有的一个简单特性. 对于基本激发的类型大致分为两类: 准粒子激发 (quasi-particle excitations) 和集体激发 (collective excitations). 某些非常简单的例子可以很好地说明这两种激发之间的区别. 例如, 对于一个无相互作用粒子气体系统, 可以通过仅提高单个粒子的能量来增加整个系统的能量, 这个过程中对所有其他粒子都不产生任何影响. 也就是说, 整个系统增加的能量只是单个粒子增加的能量的简单求和, 那么这个过程就被称为粒子激发 (particle excitation). 但是, 如果是一个有弱相互作用粒子气体系统, 那么整个系统的能量增加不再是对单粒子能量增加值的简单求和. 此时, 如果激发过程有足够长的寿命使得整个过程仍然可以用粒子来描述, 那么这个过程就属于准粒子激发.

集体激发的一个简单例子就是描述声波在固体中的传播过程. 固体中的原子之间存在着非常强的相互作用力致使无法用粒子的运动来描述晶体中原子的运动. 虽然入射声波只针对改变固体中某个原子的能量, 使得这个原子在固体中的位置发生变化, 但是这个原子能量的变化迅速地影响了固体中其他的原子, 使得其他原子的位置也发生了变化, 由此形成了能量在固体中的传播, 因此需要用集体激发的概念来解释这个过程. 固体中原子的位置变化形成了某种运动, 这个运动的振幅是量子化的, 这个量的单位就是声子 (phonon). 因此声子描述了固体中的集体激发. 确切地说, 只有当描述固体的模型被认为是一个线性系统的时候, 才有可能得到声子这一基本激发. 具体地说, 通常描述固体的最简单的理想化的模型是一个一维线性原

子链, 相同质量的原子之间由弹簧连接. 假设原子质量为 M, 弹簧的弹性系数为 K, 第 n 个原子的位移 (离开原子平衡位置的距离) 为 y_n, 那么此运动方程为

$$M\frac{\mathrm{d}^2 y_n}{\mathrm{d}t^2} = K[(y_{n+1} - y_n) - (y_n - y_{n-1})] = K(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}). \tag{1-1}$$

假设

$$y_n \sim e^{i(\omega t + kna)}, \tag{1-2}$$

其中 ω 是波速 k 的函数, a 是两邻两个原子之间的距离. 把 (1-2) 代入 (1-1) 得

$$\omega = \pm\omega_m \sin\left(\frac{1}{2}ka\right). \tag{1-3}$$

声子就是由 (1-1) 和 (1-3) 确定的格点波, 角频率为 ω 的声子的能量为 $\hbar\omega$.

但是, 实际上固体中原子或离子之间存在着很强的相互作用, 运动方程 (1-1) 不再成立, 需要加入非线性项 (非谐项), 那么对此将产生何种激发呢? 如果声子的振幅很小使得非线性项很弱, 则可以用声子碰撞模型来处理这个问题. 但是, 如果原子的位移很大, 那么就会产生一类新的基本激发, 这就是孤立波或者孤立子. 这时, 一个局域密集波在固体中传输, 传输过程中与原子发生碰撞使得原子产生瞬间的位移, 碰撞结束后原子又恢复到碰撞之前的状态, 好像什么也没有发生过一样. Toda 链描述了这类非谐固体中的孤立波, 并且很好地解释了简谐固体和非简谐固体之间的联系, 即考虑相邻原子之间的势能为

$$V(r) = ar + \frac{a}{b}e^{-br}. \tag{1-4}$$

当 $b \to 0, c = ab$, 那么就得到了简谐势

$$V(r) = \frac{a}{b} + \frac{1}{2}cr^2. \tag{1-5}$$

对于非简谐链, 运动方程 (1-1) 变为

$$M\frac{\mathrm{d}^2 r_n}{\mathrm{d}t^2} = a\left(-e^{-br_{n+1}} + 2be^{-br_n} - e^{-br_{n-1}}\right), \tag{1-6}$$

其中 $r_n \equiv y_n - y_{n-1}$. 方程 (1-6) 的一个简单解是

$$e^{-br_n} - 1 = \sinh^2\mu \,\mathrm{sech}^2(\mu n \pm \beta t), \tag{1-7}$$

其中 $\beta = \sqrt{ab/M}\sinh\mu$ 和 μ 分别确定了波的振幅和宽度. 可见, 孤立波的振幅约为 d/μ, 速度 $v = \beta d/\mu$, 即 $v = d\sqrt{\frac{ac}{M}\left(\frac{\sinh\mu}{\mu}\right)}$. 在小振幅近似下, 即 $\sinh\mu/\mu \to 1$, 就得到了简谐链的声速 $d/\sqrt{ab/M}$.

利用 Toda 链模型来描述声速在非简谐固体中的传播, 说明了一个系统被引入非线性项将会从本质上改变这个系统的基本激发. 式 (1-6) 的更一般的行波解需要引入 Jacobi 椭圆函数. 经典问题的一般解中包含了 Jacobi 椭圆函数, 说明即使是最简单的非线性系统也将显示出无比的复杂性.

可见, 孤立子是对离散且有相互碰撞的多体系统的连续描述, 它刻画了系统中个体的初始状态的长时间行为. 它是由平衡非线性项和色散项得到的最基本的非线性解, 属于集体激发, 并且可以呈现出各种模式. 式 (1-7) 描述的是一个钟型孤立波激发. 因此, 寻找非线性系统的局域激发模式成为了孤子理论研究中的又一个研究重点.

自孤立子问世以来, 它已经在流体物理、固体物理、基本粒子物理、等离子物理、凝聚态物理、超导物理、激光物理等物理领域以及数学、生物学、化学、通信等各个自然科学领域都得到了广泛的应用和深入的研究. 例如, 光孤子的发现是由 19 世纪 60 年代初激光的发展引起的. 1973 年, 贝尔实验室的 Hasegawa 和 Tappert 合作发表的有关光时间孤立子的研究论文[96] 宣告了非线性光学中的光孤子研究的开始. 暗孤子[117] 和亮孤子[90] 在光纤光学[8] 中被广泛应用. 非线性光学中的最基本最重要的非线性系统就是非线性薛定谔方程, 大多数早期的研究都局限在一维的情况, 后来被推广到了二维和三维. 高维非线性薛定谔系统具有诸多新的非线性解, 其中一种非线性解被称为涡旋, 它在经典[126] 和量子[58] 系统中有着长久和丰富的历史. 二维或三维系统中的孤立波 (子) 有时候也被称为带孤子 (band soliton) 或者平面孤子 (planar soliton), 它们在无限系统中对于横向调制是不稳定的, 从而衰减成涡旋[127]. Carr 研究了边界条件对带孤子和平面孤子的稳定性的影响[38]. 另外, 非线性薛定谔方程只在考虑一个合适的外势时也可以用来描述玻色 - 爱因斯坦凝聚[38]. 在 2000 年, 实验上观察到了玻色 - 爱因斯坦凝聚中的孤立子[31, 55] 后, 玻色 - 爱因斯坦凝聚中的孤立子理论得到了迅速发展[29, 39, 40].

在结束此小节之时, 值得从数学和几何的角度提一下孤立子理论的研究. Lamb [128] 指出了某些非线性演化方程与一些简单的一维螺旋状的曲线在三维空间中的运动相联系. 如: 常曲率曲线的运动可以由 sine-Gordon 方程描述; 常扭矩曲线的运动可以由修正 KdV 方程描述; 常曲率和常扭矩曲线运动可以由非线性薛定谔方程描述.

1.2 可 积 性

虽然孤立子是非线性系统的基本激发模式, 但这并不意味着对任何非线性系统, 都可以找到这种激发. 已有的研究显示, 对于可积的非线性系统必定存在孤立波 (子) 解. 当然, 有时候我们也能在不可积系统中得到孤立波解. 那么, 何谓 "可

积”呢? 事实上, 到目前为止, 对于一个非线性系统是否可积还没有一个完全确定和统一的定义. 所谓的可积性是指不同意义下的可积性, 所以在说一个非线性系统是可积的时候通常会指明它是在何种意义下的可积. 例如：Liouville 可积、反散射 (IST) 可积、对称可积、Painlevé 可积、C 可积和 Lax 可积等等.

Liouville 可积是指系统存在对易和守恒的无穷哈密顿函数[70].

如果一个系统存在 Lax 对, 那么就称其为 Lax 可积. 具有 Lax 对的非线性系统通常可以用反散射方法求解. 可用反散射方法求解的系统称作反散射可积系统. 反散射方法可以被看成是非线性系统的傅里叶变换方法. 研究表明, 许多非线性系统可以用反散射方法求解. 如 KdV 方程、非线性 Schrödinger 方程、sine-Gordon 方程、Boussinesq 方程、Toda 方程以及 KP 方程等等[232].

对称可积通常指具有无穷多相互对易的 K 对称和无穷多可以构成无限维 Virasoro 代数的 τ 对称的非线性方程[153]. 在很多情况下, 具有无穷多对称的对称可积系统同时具有无穷多守恒律.

若一个非线性系统的一般解关于任意奇性流形的奇性都是极点型的, 则称该系统具有 Painlevé 性质. 若一个非线性系统具有 Painlevé 性质, 则称此系统是 Painlevé 可积的[2, 190, 191, 233]. Painlevé 可积性的检验方法有 WTC(Weiss-Tabor-Carnevale) 方法、ARS(Ablowitz-Ramani-Segur) 方法、Kruskal 简化法、Conte 的不变展开法、Pickering 的推广法和楼森岳的一般推广方法.

Calogero 等[32, 33] 对非线性偏微分方程提出了 C 可积的概念. 一个非线性偏微分方程, 如果可以直接积分求得一般解或可经过合适的变量变换线性化, 那么称其是 C 可积的. 而且将这些变换作用于一大类线性方程, 可获得一大类 C 可积非线性方程.

如果一个系统具有 N 孤子解, 那么可以称该系统是在具有多孤子解意义下可积的. 不过这个意义下的可积性比较弱, 在许多其他意义下的不可积系统同样具有多孤子解.

在线性物理中, 除了傅里叶变换方法, 分离变量法是又一个非常重要的方法. 许多非线性系统的分离变量解可以有一个通式 (普适公式) 来描述, 在这通式中至少有一个任意函数存在, 然而对于不可积模型这些任意函数必须满足附加条件. 由此可定义可用多线性分离变量法求解的可积性.

虽然一个可积模型常常被局限在某种意义下, 但是可以注意到：有些可积模型往往同时具有好几种性质, 如著名的 KdV 方程同时是 Painlvé 可积、Lax 可积、多孤子解可积、对称可积及 IST 可积的. 事实上, 具备所有可积性质的非线性系统是很有限的. 有时一个系统在某些特殊意义下可积而在其他意义下却不可积, 如有些 Lax 可积的系统没有 Painlevé 性质[166, 221].

的确, 可积与不可积之间并不能够非常清晰的区别, 特别是在高维系统之中. 因