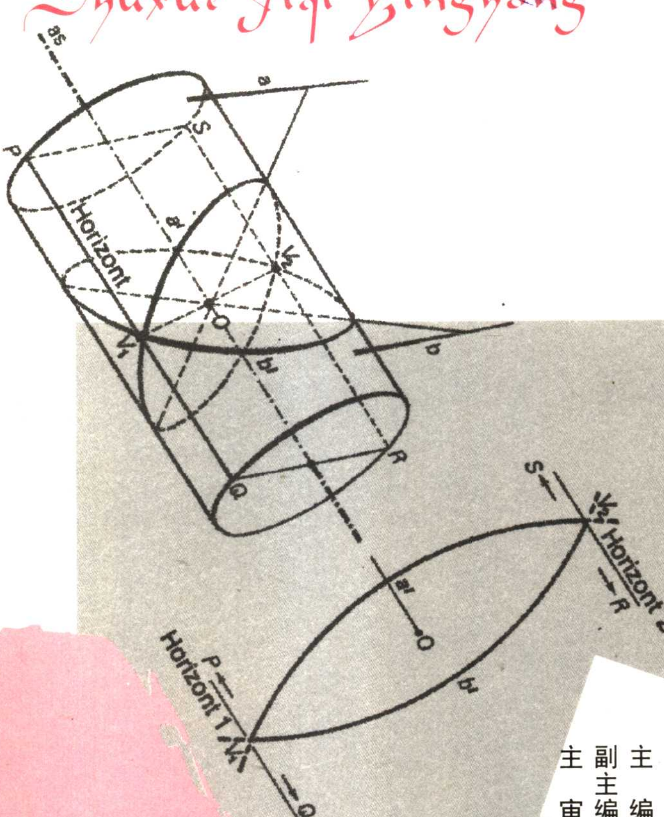
高等职业教育系列教材

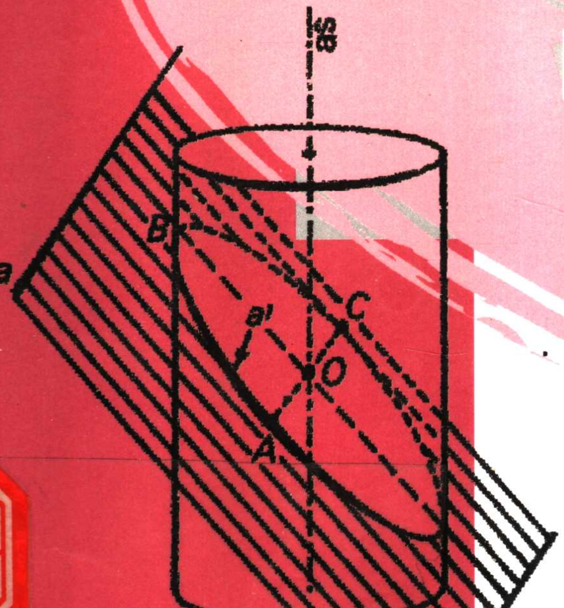
Gaozhi Shuxue Jiqi Yingyong



高职数学及其应用

中

主　编　李和逊
副主编　韩乐文　耿恭健　涂德新
主　审　杨　丹



重庆大学出版社

高等职业教育系列教材

Gaozhi Shuxu Jiqi Yingyong

高职数学及其应用

主　编　李和逊
副主编　韩乐文　耿恭健　涂德新
主　审　杨　丹

重庆大学出版社

高职数学及其应用

中　册

主　编　　李和逊

副主编　　韩乐文　耿恭健　涂德新

主　审　　杨　丹

责任编辑　曾令维

*

重庆大学出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

重庆电力印刷厂印刷

*

开本:787×1092　1/16　印张:12.75　插页:2　字数:324千

2000年8月第1版　　　2000年8月第1次印刷

印数:1—5 000

ISBN　7-5624-2264-8 / G·319　　定价:42.00元(全套共三册,本册定价:14.00元)

前　言

根据《教育部关于加强高职高专教育人才培养工作的意见》的通知和高职高专教育人才培养模式的基本特征要求，以及服务于工科、财经、农卫等专业的前提下，认真总结了近几年来举办高职教育的经验，由一批富有高等职业技术教育教学经验的专家编写了《高职数学及其应用》教学大纲。并据此编写了《高职数学及其应用》教材上、中、下三册。上册包括代数、三角、立体几何与解析几何。中册包括微积分与微分方程、拉普拉斯变换。下册包括空间解析几何与多元微积分、无穷级数、概率初步、数理统计初步、线性代数与线性规划、数学模型。在编写过程中，力求适应高职教育发展的要求，突出高职教育的特点，宽基础，重应用。并注意到初中、中职、高中与高职数学教材的衔接。本教材可供招收初中毕业生五年制高职和高中、中职毕业生三年制高职、高专选用。

本教材的特点是：

1. 加强了基础知识的覆盖面，理论知识适度，具有宽而浅的特点。

2. 理论联系实际，问题的提出从实际问题入手，过渡自然。加强了各种理论的应用，每章的应用专门集中成一节。并注重了培养能力。

3. 上册介绍了计算器的应用，淘汰了以往许多复杂的计算，从根本上改变了计算速度慢、误差大、错误多的局面。

4. 中册把微分方程与拉普拉斯变换编成一章，用拉氏变换解二阶常系数线性微分方程的初值问题，从而对微分方程内容进行了结构上的改革。

5. 下册编写了"数学模型"一章，加强了培养学生理论联系实际的能力。

6. 内容、例题、习题配合紧密，易教易学。

编写组：

上册：主编　龙辉　副主编　耿恭健　韩乐文

中册：主编　李和逊　副主编　韩乐文　耿恭健　涂德新

参编：周均　张德明　胡先富　李勇

下册：主编　黄锡年　副主编　龙辉　曾乐辉

参编：龚亚英　郑文　朱颖　辜成渝

本书在编写过程中得到了市教委领导、某些高职院校以及一些举办了高职、高专的学校领导和教师的大力支持和帮助，对教材的编写提出了许多宝贵意见，在此表示诚挚的感谢。

由于编者水平有限，且时间较仓促，因此难免有缺点和错误，恳请使用本教材的读者批评指正。

《高职教学及其应用》教材

编写组

2000 年 6 月

目　　录

第十二章　函　数

一切客观事物是互相联系的和具有其内部规律的．反映事物运动规律的量也不是孤立存在的，而是互相联系、互相制约的．我们不仅要研究事物的量的变化，还要研究各个量变化的依赖关系．函数关系就是变量之间的依赖关系．本章将介绍函数、初等函数以及它们的一些性质和应用．

§12-1　函数的概念

一、常量与变量

当我们观察、研究某些物质运动或某种生产技术过程时，常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不起变化，也就是保持一定的数值，这种量称为**常量**；还有一些量在过程中是变化着的，也就是可以取不同的数值，这种量称为**变量**．

例如，把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积和气体的分子个数保持一定，它们是常量；而气体的温度和压力则是变量，它们将取得越来越大的数值．

一个量是常量还是变量，要根据具体情况作出具体分析，例如，飞行中飞机的海拔高度一般是个变量，但如果飞机正作严格的水平飞行，那么这时海拔高度就成了一个常量．

通常用字母 a、b、c 等表示常量，用字母 x、y、t 等表示变量．

二、函数的定义

先从实际例子来考察变量之间的依赖关系．

例 1　将弹簧一端固定，另一端挂上重物，则弹簧的长度 L 随着负载重量 P 的变化而变化．设某弹簧的最大负载重量为 10kg，由实验测得长度 L 与负载重量 P 之间的关系如表 12-1.

表 12-1

P/kg	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L/cm	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15	15.5	16	16.5	17

从上述实验数据表可以看出，对于 0 到 10 间的每一个取定的 P 值，相应的 L 值就完全确定．这个表反映了变量 L 与 P 的关系及其内部规律．

例 2　某气象站用自动温度记录仪记下一昼夜气温变化规律．图 12-1 是温度记录仪在坐标纸上画出的温度变化曲线，其中横坐标是时间 t，纵坐标是温度 T. 曲线上任一点 $P(a,b)$ 就表示在时间 $t=a$ 时，测得的气温 $T=b$，对于 t 的每一个值，都有确定的温度 T 与它对应．如当 $t=13$ 时，有 $T=22$℃．

这个图形反映了温度 T 与时间 t 的相互关系．

例 3　在真空中自由落体下落的路程 S 与下落的时间 t 都是变量，从物理学知道，S 与 t

之间存在着关系

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

其中 g 是重力加速度，$g=9.8\text{m/s}^2$

物体开始下落时刻 $t=0$，物体着地时的时刻 $t=T$. 当时间 t 在 $[0,T]$ 之间取定一个值时，其所对应的下落路程 S 的值就由上面的关系式完全确定了.

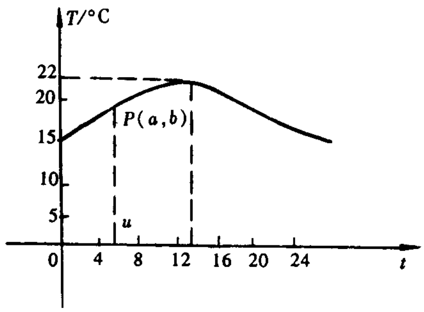


图 12-1

关系式 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 表示变量 S 与变量 t 之间的相互关系，反映了自由落体的内部规律.

类似上述的关于变量之间相互依赖关系的例子是很多的，它们虽然是不同的问题，但是，它们具有共同的特征：每个问题都包含有两个变量，这两个变量又互相依赖，互相制约着，它们之间存在着一个确定的对应规律，根据这个规律，只要其中一个变量在某个范围内取一定值，另一个变量就有确定的值与它对应．由此便概括出函数的一般定义.

定义 设 D 是一个实数集，如果对属于 D 的每一个数 x，按照某一个对应关系 f，y 都有惟一确定的值和它对应，那么 y 就称为定义在数集 D 上的 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，x 称为**自变量**，y 又称为**因变量**，x 所在的数集 D 称为函数的**定义域**，当 x 取遍 D 中的一切数值时，对应 y 的全体值所构成的集 M 称为函数的**值域**.

在同一个问题中讨论不同函数时，为了区别，也可用 $F(x)$、$g(x)$、$\varphi(x)$ 等记号表示函数.

根据函数的定义，上面例 1，L 是 P 的函数，可记为 $L=f(P)$；例 2，T 是 t 的函数，即 $T=F(t)$；例 3，S 是 t 的函数，$S=\varphi(t)=\frac{1}{2}gt^2$.

三、函数的定义域

对自变量的某一已知值，函数具有确定的值与它对应时，称自变量取该值时，函数是有定义的.

如果函数 $y=f(x)$ 对自变量在某区间上的每一个值都有定义，称函数 $y=f(x)$ 在该区间上有定义.

研究函数时，要注意函数的定义域．一般可从两个方面来考察：

1. 对于实际问题的函数关系，函数的定义域用实际意义来确定．如例 2 中 $T=F(t)$ 的定义域应为 $0\leqslant t\leqslant 24$.

2. 用数学式子表示的函数，可由函数表达式子本身来确定函数的定义域，即要使运算有意义.

例 4 求下列函数的定义域：

(1) $y=x^2$；　　(2) $y=\frac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$；

(3) $y=\lg(\lg x-3)$

解 (1) 对于函数 $y=x^2$，不论 x 取什么值，都可以由关系式 $y=x^2$ 算出确定的 y 值，所以，这个函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，即全体实数.

(2)对于函数 $y=\frac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$，只有当 $4-x^2\neq0$ 而且 $x+2\geqslant0$ 时才有意义，所以函数的定义域为 $(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(3)对于函数 $y=\lg(\lg x-3)$，必须使真数 $\lg x-3>0$，对于 $\lg x$ 来说，要求 $x>0$，因此，函数自变量的取值范围由

$$\begin{cases}\lg x-3>0\\ x>0\end{cases}.$$

来决定．即

$$\begin{cases}x>1000\\ x>0\end{cases}.$$

所以，函数的定义域为 $(1000,+\infty)$.

对于两个函数，只有当它们的定义域和对应关系完全相同时，才认为这两个函数是相同的.

例如 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$，由于它们的定义域不同，所以它们是不同的函数.

又如 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$，由于它们的定义域和对应关系都相同，所以是相同的函数.

四、函数的值

在函数 $y=f(x)$ 中，当 x 在定义域内取值 a 时，对应的因变量的值，称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 时的**函数值**，记为 $f(a)$ 或 $y|_{x=a}$.

例 5 设 $f(x)=3x^2-2x+4$，求 $f(0)$，$f(2)$，$f(a+1)$.

解 以 0 代 x，得函数值：

$$f(0)=3\times0^2-2\times0+4=4;$$

以 2 代 x，得函数值：

$$f(2)=3\times2^2-2\times2+4=12;$$

以 $a+1$ 代 x，得函数值：

$$f(a+1)=3(a+1)^2-2(a+1)+4=3a^2+4a+5.$$

例 6 设 $f(x)=3x-1$，$g(x)=\frac{1}{2x+1}$，求 $f(0)$，$g(0)$，$f[g(0)]$和 $g[f(0)]$.

解 $f(0)=3\times0-1=-1$;

$g(0)=\frac{1}{2\times0+1}=1$;

$f[g(0)]=f(1)=3\times1-1=2$;

$g[f(0)]=g(-1)=\frac{1}{2\times(-1)+1}=-1.$

五、函数的表示法

常用来表示函数的方法有以下三种：

1. 公式法　用数学式子表示自变量和因变量之间对应关系的方法称为**公式法**．前面例 3 就是用公式法表示的函数．它的优点是简明准确，便于理论分析．但有些实际问题很难甚至不能用公式法表示.

2. 表格法　在实际问题中，常将一系列的自变量值与对应的函数值列成表，如例 1，用此表示函数的方法称为**表格法**．它的优点是从自变量的值可以直接查到对应的函数值．但不便

于理论分析.

3. 图示法　用坐标系内一条曲线表示函数的方法称为**图示法**. 如例 2,其优点是直观,但不便理论分析,且从图上查函数值不够精确.

六、反函数

研究两个变量之间的函数关系时,应取哪个变量作为自变量,哪个变量作因变量,并不是固定不变的. 例如,自由落体中路程 S 与时间 t 这两个变量的函数关系,当已知时间去求路程时,则取时间 t 为自变量,用关系式 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 表示. 当研究需要多少时间,才能使物体落到所指定的位置时,则取路程 S 作为自变量,此时 S 与 t 的关系为

$$t=\sqrt{\frac{2S}{g}}.$$

$S=\frac{1}{2}gt^2$ 与 $t=\sqrt{\frac{2S}{g}}$ 虽然是同一种关系的两种写法,但是,从函数关系讲,它们是有区别的.

由于自变量与因变量互换位置而构成的两个函数,对应规律又正好互逆,所以,称 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 与 $t=\sqrt{\frac{2S}{g}}$ 互为反函数.

一般地,有下面的定义.

定义　设函数 $y=f(x)$,其定义域为 D,值域为 M,如果对于 M 中的每一个 y 值,由关系式 $y=f(x)$,能够确定惟一的 x 值($x\in D$)与 y 对应,那么这样确定的以 y 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,它的定义域为 M,值域为 D.

习惯上,函数的自变量用 x 表示,所以,反函数也可表示为 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像是关于直线 $y=x$ 对称的.

例 7　求下列函数的反函数:

(1) $y=3x-1$　　　　(2) $y=\sqrt{2x-1}$

解　(1)由 $y=3x-1$ 得定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $(-\infty,+\infty)$,且有 $x=\frac{y+1}{3}$. 把 x 与 y 互换得反函数:$y=\frac{x+1}{3}$,其定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $(-\infty,+\infty)$;

(2)由 $y=\sqrt{2x-1}$ 得定义域为 $[\frac{1}{2},+\infty)$,值域为 $[0,+\infty)$,且有 $x=\frac{y^2+1}{2}$,互换 x、y 得反函数 $y=\frac{x^2+1}{2}$,其定义域为 $[0,+\infty)$,值域为 $[\frac{1}{2},+\infty)$.

注意,一个函数 $y=f(x)$,如果对 y 的一个值,有两个或两个以上的 x 值和它对应时,这样的函数就没有反函数. 例如 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内就没有反函数.

七、函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

设 D 为一实数集,如果对于任意 $x\in D$,都有 $-x\in D$,则称 D 为**对称集**.

定义　如果函数 $y=f(x)$ 的定义域为对称集 D,对于任意 $x\in D$ 满足 $f(-x)=f(x)$,则

$f(x)$称为**偶函数**．如果任意 $x\in D$ 满足 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$称为**奇函数**.

例 8 判断下列各函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^2+\cos x$ (2) $f(x)=x^3+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(3) $f(x)=\sqrt{x}$

解 (1)函数 $f(x)=x^2+\cos x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$是对称集，又 $f(-x)=(-x)^2+\cos(-x)=x^2+\cos x=f(x)$，所以 $f(x)=x^2+\cos x$ 是偶函数；

(2)函数 $f(x)=x^3+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$是对称集，又 $f(-x)=(-x)^3+\dfrac{1}{\sqrt[3]{-x}}=-x^3-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}=-f(x)$，所以，$f(x)=x^3+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$是奇函数；

(3)函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的定义域为$[0,+\infty)$，它不是对称集，所以，$f(x)=\sqrt{x}$ 不是奇函数，也不是偶函数，即是**非奇非偶函数**.

定理 (1)奇函数的图像关于原点成中心对称图形；反之，关于原点成中心对称的图形的函数是奇函数.

(2)偶函数的图像关于 y 轴成轴对称图形；反之，关于 y 轴成轴对称图形的函数是偶函数.

2. 函数的单调性

定义 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，对于 D 内任意两实数 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时：

(1)若 $f(x_1)<f(x_2)$，称 $f(x)$在 D 内是单调增函数(图 12-2).

(2)若 $f(x_1)>f(x_2)$，称 $f(x)$在 D 内是单调减函数(图 12-3).

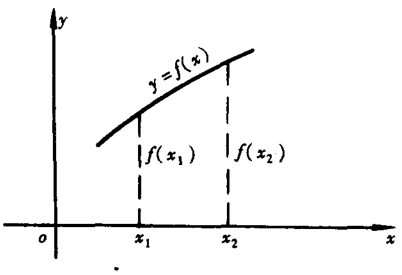


图 12-2

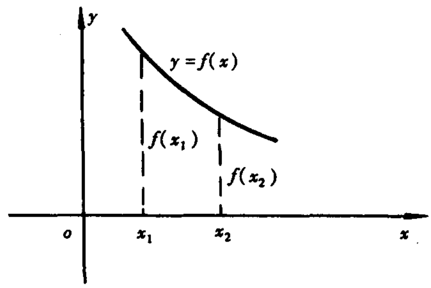


图 12-3

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是单调增函数，在区间$(-\infty,0]$上是单调减函数(图 12-4).

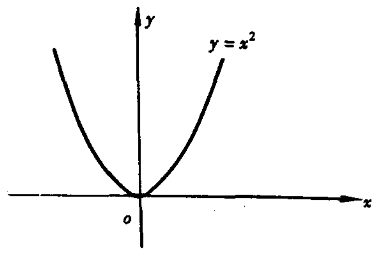


图 12-4

3. 函数的有界性

定义 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，如果存在一个正数 M，使对于 D 内的一切 x 值，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称 $y=f(x)$在 D 内**有界**；如果这样的 M 不存在，则称 $y=f(x)$在 D 内**无界**.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内，对任意 x 的值都有$|\sin x|\leqslant 1$ 成立，这里 $M=1$，所以是有界的.

又如，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在开区间(0,1)内是无界的，因为不存在这样的正数 M，使 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于(0,1)内的一切 x 都成立.

4. 函数的周期性

定义 对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个不为零的正数 l，使对于定义域内一切 x，等式

$$f(x+l)=f(x)$$

都成立，则称 $y=f(x)$ 是**周期函数**，l 是 $y=f(x)$ 的周期．通常，我们说周期函数的周期是指**最小正周期**．

例如，$\sin x$，$\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；$\tan x$ 和 $\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

图 12-5 表示一个周期为 l 的周期函数，在这函数定义域内的每个长度为 l 的区间上，函数有相同的形状.

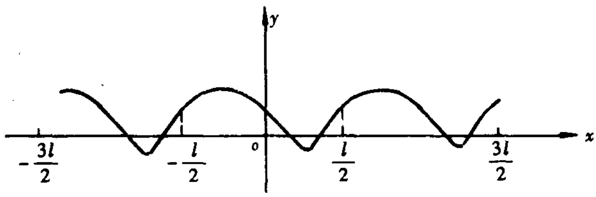


图 12-5

习 题 12-1

1. 判断下列各题中是否为同一函数？

(1) $f(x)=\frac{x}{x}$ 与 $g(x)=1$；

(2) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$；

(4) $y=\sin x$ 与 $y=\sin|x|$；

(5) $y=10^{\lg x^{-2}}$ 与 $y=\lg(10^x)^2$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=(x-2)^{-\frac{1}{2}}+(3-x)^0$；　(2) $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$；

(3) $y=\sqrt{3x+4}$；　(4) $y=\frac{1}{x^2+1}$；

(5) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　(6) $y=\log_{(5x-1)}(7x-2)$；

(7) $y=\frac{1}{\lg(1-x)}$；　(8) $y=\arcsin(2+3^x)$；

(9) $y=\arccos\sqrt{2x}$；　(10) $y=\tan(x+1)$.

3. 求下列各函数的函数值：

(1) 若 $\varphi(x)=2^{x-2}$，求 $\varphi(2)$，$\varphi(-2)$，$\varphi(0)$，$\varphi(\frac{5}{2})$；

(2) 若 $f(x)=\frac{|x-2|}{x+1}$，求 $f(2)$，$f(-2)$，$f(a)$，$f(a+b)$；

(3)若 $f(x)=\frac{1}{x}$,求 $f(x+\Delta x)-f(x)$.

4. 若 $f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$,证明 $f(t)=f(\frac{1}{t})$.

5. 若 $F(x)=x^2\cos x$,证明 $F(x)=F(-x)$.

6. 求下列函数的反函数:

(1)$f(x)=\sqrt{49-9x^2}, x\in[-\frac{7}{3},0]$;

(2)$f(x)=x^2-4x+1, x\leqslant 2$.

7. 判断下列函数的奇偶性:

(1)$f(x)=x^2-3|x|$;

(2)$f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$;

(3)$f(x)=x^5, -1\leqslant x\leqslant 5$;

(4)$f(x)=x+\frac{1}{x}$.

8. 已知对于满足 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的所有 x 的值,$f(x)=ax+b$ 有 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$,求 a,b 之间的关系式.

§12-2 基本初等函数与初等函数

一、基本初等函数

我们学过的幂函数 $y=x^\mu$(μ 为实数)、指数函数 $y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq 1$)、对数函数 $y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq 1$)、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

现将其性质和图像等列表如表 12-2.

表 12-2

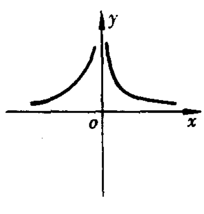
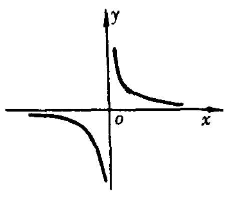
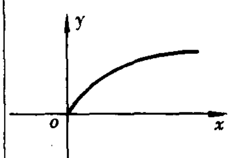
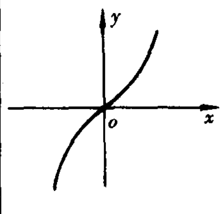
函数	幂函数 $y=x^\mu$			
	$\mu=-2$	$\mu=-1$	$\mu=\frac{1}{2}$	$\mu=3$
定义域	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
值域	$(0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
图像				
奇偶性	偶函数	奇函数	非奇非偶	奇函数
单调性	在 $(-\infty,0)$ 内单调递增 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减	在 $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ 内分别单调递减	单调递增	单调递增

表 12-3

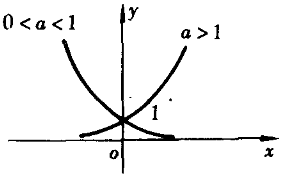
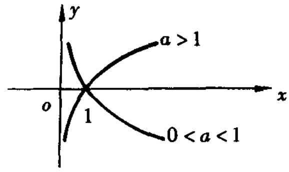
函　数	指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$	对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$
值　域	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
图　像		
单调性	当 $0<a<1$ 时单调递减，当 $a>1$ 时单调递增	当 $0<a<1$ 时单调递减，当 $a>1$ 时单调递增

表 12-4

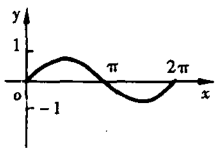
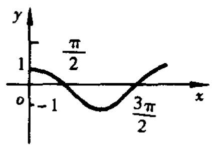
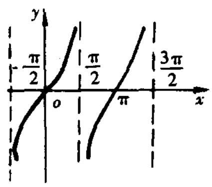
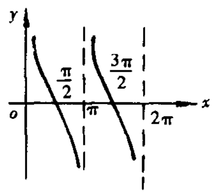
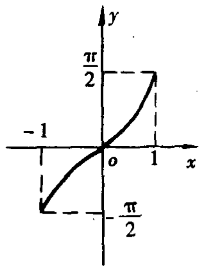
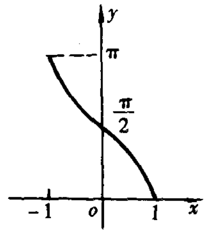
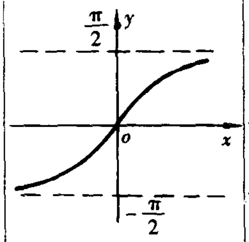
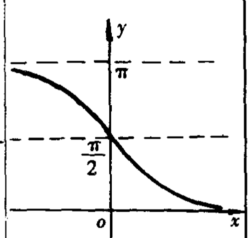
函　数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$	$y=\cot x$
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$ $(k\in Z)$	$(k\pi,(k+1)\pi)$ $(k\in Z)$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
图像				
奇偶数	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
周期性	$T=2\pi$	$T=2\pi$	$T=\pi$	$T=\pi$
单调性	$(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2})$ 单调递增 $(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3}{2}\pi)$ 单调递减 $(k\in Z)$	$(2k\pi-\pi,2k\pi)$ 单调递增 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 单调递减 $(k\in Z)$	$(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$ 单调递增 $(k\in Z)$	$(k\pi,k\pi+\pi)$ 单调递减 $(k\in Z)$

表 12-5

函　数	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\arctan x$	$y=\text{arccot}\,x$
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
值域	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	$[0,\pi]$	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	$(0,\pi)$

(续)

函　数	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\arctan x$	$y=\text{arccot}\,x$
图像				
单调性	单调递增	单调递减	单调递增	单调递减
$f(-x)$	$\arcsin(-x)=-\arcsin x$	$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$	$\arctan(-x)=-\arctan x$	$\text{arccot}(-x)=\pi-\text{arccot}\,x$

二、复合函数、初等函数

在实际问题中，常遇到一个函数跟另一个函数发生联系.

例如，有质量为 m 的物体，以初速度为 v_0 铅直向上抛出，它的动能 E 和物体的速度 v 有函数关系，

$$E=\frac{1}{2}mv^2$$

而速度 v 又与时间 t 有函数关系，在不计空气阻力的假定下，其关系式为

$$v=v_0-gt$$

因此，动能 E 与 t 有函数关系为：

$$E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2 \qquad t\in[0,\frac{v_0}{g}]$$

动能 E 与 t 的函数关系是由 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 与函数 $v=v_0-gt$ 通过中间媒介 v 复合而成的.

一般地，给出下面的复合函数的定义：

定义　设函数 $y=f(u)$，而 u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，若 $\varphi(x)$ 的函数值全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，此时 y 也是 x 的函数，称此函数为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称**复合函数**，记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中 u 称为**中间变量**.

从复合函数中，分清层次，找出函数关系结构的规律，在研究函数时，具有重要的意义.

例 1　指出下列各复合函数的复合过程：

(1)$y=\sqrt{1+x^2}$；　　(2)$y=\lg(2+\tan^2 x)$；

(3)$y=(\arcsin\frac{1}{x})^2$；　　(4)$y=e^{\sqrt{\sin x}}$.

解　(1)$y=\sqrt{1+x^2}$是由 $y=\sqrt{u}$，$u=1+x^2$ 复合而成的.

(2)$y=\lg(2+\tan^2 x)$是由 $y=\lg u$，$u=2+V^2$，$V=\tan x$ 这三个函数复合而成的.

(3)$y=(\arcsin\frac{1}{x})^2$ 是由 $y=u^2, u=\arcsin V, V=\frac{1}{x}$ 这三个函数复合而成的.

(4)$y=e^{\sqrt{\sin x}}$ 是由 $y=e^u, u=\sqrt{V}, V=\sin x$ 这三个函数复合而成的.

应当指出:(1)并不是任何两个函数都可以复合成一个函数,例如 $y=\sqrt{u}, u=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2)$ 这两个函数就不能复合成一个函数,其原因是 $y=\sqrt{u}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$,而 $u=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2)$ 的值域为 $(-\infty,-1]$,它们的交集 $[0,+\infty)\cap(-\infty,-1]=\varnothing$ 为空集.

(2)分解一个复合函数的复合过程时,每个层次都应是基本初等函数或常数与基本初等函数的四则运算式.

由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次复合所构成的用一个式子表示的函数称为**初等函数**. 例如

$y=1+\sqrt{x}, y=2\sin\frac{x}{2}+\cos x, y=e^{-x^2}$

$f(x)=\log_2(x+1)-(\frac{1}{3})^x+5, G(x)=\arcsin\frac{(x-3)}{2}$,等都是初等函数.

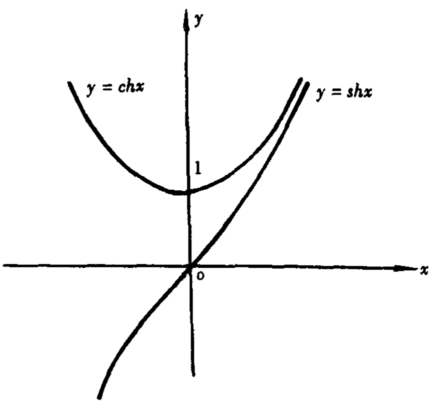


图 12-6

在工程技术中,还会碰到一类叫**双曲函数**的初等函数,它们是由指数函数 $y=e^x$ 与 $y=e^{-x}$ 构成的. 主要的有

双曲正弦 $\quad \mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$,

双曲余弦 $\quad \mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$,

这两个函数具有如下关系:

$$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$$

其图像如图 12-6.

另外,我们常会遇到,在不同范围用不同式子表示一个函数,如:

$$y=\begin{cases}-x-3 & x\in(-\infty,-\frac{1}{2}] \\ 3x-1 & x\in(-\frac{1}{2},2] \\ x+3 & x\in(2,+\infty)\end{cases}$$

这样的函数称为**分段函数**. 有些分段函数可化成用一个式子表示的函数,这时,它就是一个初等函数,有些分段函数则不是初等函数.

习 题 12-2

1. 判断题:

(1)$y=2\sin x$ 是基本初等函数; ( )

(2)$y=a^{2x}$ 不是基本初等函数; ( )

(3)$y=\arccos u, u=1+2^x$ 的复合函数是 $y=\arccos(1+2^x)$; ( )

(4)我们讨论的函数都是初等函数. ( )