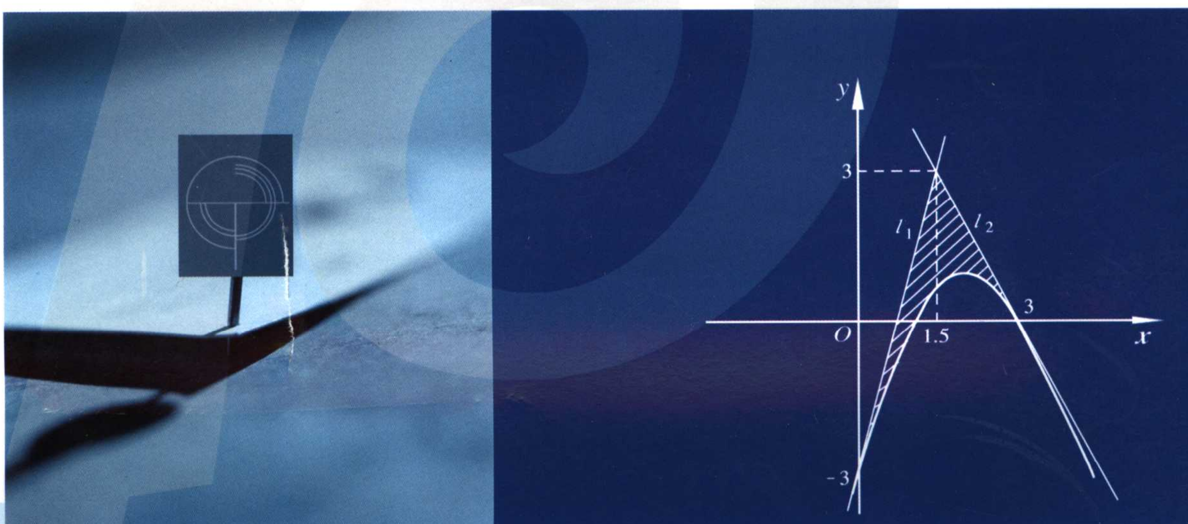
Shuxue Fenxi de Lilun Fangfa yu Jiqiao

数学分析的理论、方法与技巧

邓乐斌 编



华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

数学分析的理论、方法与技巧

邓乐斌　编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析的理论、方法与技巧/邓乐斌 编
武汉:华中科技大学出版社,2005 年 12 月
ISBN 7-5609-3596-6

Ⅰ.数…
Ⅱ.邓…
Ⅲ.数学分析
Ⅳ.O17

数学分析的理论、方法与技巧 邓乐斌 编

责任编辑:徐正达 封面设计:刘 卉
责任校对:吴 晗 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司
印 刷:丹江口市迅达印刷有限责任公司

开本:787×960 1/16 印张:18.75 字数:340 000
版次:2005 年 12 月第 1 版 印次:2005 年 12 月第 1 次印刷 定价:27.50 元
ISBN 7-5609-3596-6/O·374

内容简介

本书以一元函数微积分的基本内容(主要包括极限、连续、微分学、积分学等)为素材,从众多的优秀教材或其它有关图书中精选了典型的习题,也精选了一些硕士研究生入学考试试题,它们好似一粒粒珍珠汇集而构成了本书.本书着重分析解题思路,探究解题规律,总结解题方法. 在选题过程中注重了例题的代表性、典型性,在叙述过程中注重了可读性、系统性,在解题时注重了引导性和启迪性.

本书可作为理工科学生学习数学分析的参考书.

前　言

数学分析是近代数学的基础.作为师范院校的数学专业最重要的专业基础课，它对于后续课程的学习，乃至对学生的思维问题和解决问题能力的培养都起着十分重要的作用.

本书是作者积二十多年教学经验、博采众家之长编写而成的.在编写过程中注重了例题的代表性和典型性，在解题过程中注重了引导性和启迪性，着重分析解题思路，探究解题规律，总结解题方法，力求给读者提供一些有价值、有规律的解题方法和技巧，使读者有所启发和收益.

本书以章节为序，共分十章.内容包括极限、连续、微分学和积分学等.每节分为学习要求、内容概要、典型例题解析、练习题等四部分.有些章节对某些重要内容进行了较为深入和细致的讨论.

本书在编写过程中，杨立志教授始终给予了热情的关怀和无私的帮助，在此表示衷心的感谢.

由于编者经验和水平所限，本书的缺点和错误在所难免，恳请各位专家、同仁、学友批评、赐教.

编　者

2005.6

目　录

第一章　实数集与函数

第一节　数集·确界原理

一、学习要求

数学分析研究的对象是函数，所运用的工具(理论基础)是极限理论. 而确界原理则是极限理论的基本立足点，绝对值不等式则是分析论证的重要工具. 要求：

(1) 理解并熟练运用实数的有序性、稠密性和封闭性，掌握邻域的概念.

(2) 牢记并熟练运用实数绝对值的有关性质以及几个常用的不等式.

(3) 理解实数确界的定义和确界原理，并能在证明有关命题时正确地加以运用.

二、内容概要

1. 实数及其性质

定义1.1 有限十进制小数和无限十进制循环小数称为**有理数**，无限十进制不循环小数称为**无理数**，有理数和无理数统称为**实数**.

实数有如下一些主要性质：

(1) 封闭性　实数集 $\mathbf{R}$ 对加、减、乘、除(除数不为零)四则运算是封闭的，即任意两个实数的和、差、积、商(除数不为零)仍然是实数.

(2) 有序性　任意两个实数 a,b 必满足下述三个关系之一：$a<b$，$a=b$，$a>b$.

(3) 传递性　若 $a>b$，$b>c$，则有 $a>c$.

(4) 稠密性　任何两个不相等的实数之间必有另一个实数，且既有有理数，也有无理数.

(5) 阿基米德性　对任何两个实数 a,b，若 $b>a>0$，则存在正整数 n，使 $na>b$.

定义1.2 确定了原点、单位长度和正方向的直线称为**数轴**.

2. 绝对值与不等式

定义1.3 实数 a 的**绝对值**定义为

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0, \\ -a, & a<0. \end{cases}$$

从数轴上看，数 a 的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距离.

实数的绝对值有如下一些性质：

(1) $|a|=|-a|\geqslant 0$,当且仅当 $a=0$ 时有 $|a|=0$.

(2) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$.

(3) $|a|<h$ 等价于 $-h<a<h$, $|a|\leqslant h$ 等价于 $-h\leqslant a\leqslant h$ $(h>0)$.

(4) $|a|-|b|\leqslant |a\pm b|\leqslant |a|+|b|$ (三角形不等式).

(5) $|ab|=|a||b|$.

(6) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ $(b\neq 0)$.

3. 邻域

定义 1.4 满足绝对值不等式 $|x-a|<\delta$ $(\delta>0)$ 的全体实数 x 的集合称为点 a 的 **δ 邻域**,记为 $U(a;\delta)$,即

$$U(a;\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta).$$

定义 1.5 满足绝对值不等式 $0<|x-a|<\delta$ $(\delta>0)$ 的全体实数 x 的集合称为点 a 的**去心邻域**,记为 $\mathring{U}(a;\delta)$,即

$$\mathring{U}(a;\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}.$$

4. 有界集·确界原理

定义 1.6 设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集. 若存在数 $M(L)$,使得对一切 $x\in S$,都有 $x\leqslant M$ $(x\geqslant L)$,则称 S 为**有上界(下界)的数集**. 数 $M(L)$ 称为 S 的一个**上界(下界)**. 既有上界又有下界的数集 S 称为**有界数集**.

定义 1.7 设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集,若数 ξ 满足:

(1) 对一切 $x\in S$,有 $x\leqslant \xi$,即 ξ 是 S 的上界,

(2) 对于任意的 $\varepsilon>0$,存在 $x_0\in S$,使得 $x_0>\xi-\varepsilon$,即 ξ 也是 S 的上界中的最小的,

则称 ξ 为 S 的**上确界**,记为 $\xi=\sup S$.

定义 1.8 设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集. 若数 η 满足:

(1) 对一切 $x\in S$,有 $x\geqslant \eta$,即 η 是 S 的一个下界,

(2) 对于任意的 $\varepsilon>0$,存在 $x_0\in S$,使得 $x_0<\eta+\varepsilon$,即 η 又是 S 的下界中最大的,

则称 η 是数集 S 的**下确界**,记为 $\eta=\inf S$.

定理 1.1(确界原理) 设 S 为非空数集. 若 S 有上界,则 S 必有上确界;若 S 有下界,则 S 必有下确界.

三、典型例题解析

例 1 证明:对任何实数 x,有

(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant 1$; (2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2$.

证 (1) 由三角形不等式 $|a|+|b|\geqslant |a-b|$,有

$$|x-1|+|x-2|\geqslant |(x-1)-(x-2)|=1.$$

(2) 由三角形不等式 $|a|+|b|\geqslant |a-b|$,有

$$|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant |x-2|+|(x-1)-(x-3)|=|x-2|+2\geqslant 2.$$

例2 设A,B为非空数集，若对一切$x\in A$和$y\in B$，有$x\leqslant y$，试证明数集A有上确界，数集B有下确界，且$\sup A\leqslant\inf B$.

证 因为数集A非空，B中的任一元素y都是A的上界，由确界原理可知，数集A有上确界. 同理数集B有下确界.

下面证明不等式$\sup A\leqslant\inf B$.

因为对任何$y\in B$，y是数集A的一个上界，由上确界定义，$\sup A$是数集A中所有上界中最小的，故有$\sup A\leqslant y$. 而此式又表明数$\sup A$是数集B的一个下界. 由于下确界$\inf B$是B的所有下界中最大的，从而$\sup A\leqslant\inf B$.

例3 设$S=\{x\,|\,x^2<2\}$，验证$\sup S=\sqrt{2}$，$\inf S=-\sqrt{2}$.

证 先验证$\sup S=\sqrt{2}$. 由于$x^2<2$，故$x<\sqrt{2}$，从而$\sqrt{2}$是S的一个上界.

另一方面，$\forall\varepsilon>0$，由实数集的稠密性可知：在区间$(\sqrt{2}-\varepsilon,\sqrt{2})$中必存在一个实数$x_0$使得$x_0^2<2$，这说明$x_0\in S$，且有$x_0>\sqrt{2}-\varepsilon$. 同时，说明$\sqrt{2}$是$S$的最小上界，故有$\sup S=\sqrt{2}$.

$\inf S=-\sqrt{2}$可类似加以证明.

例4 设A,B均为非空有界数集，定义数集

$$A+B=\{z\,|\,z=x+y,x\in A,y\in B\}.$$

证明：
$$\sup(A+B)=\sup A+\sup B,\quad \inf(A+B)=\inf A+\inf B.$$

证 由题设可知$\sup A$与$\sup B$存在.

因为对于任意的$z\in A+B$，有$x\in A$，$y\in B$，使$z=x+y$. 由$x\leqslant\sup A$，$y\leqslant\sup B$推得$z\leqslant\sup A+\sup B$，这说明$\sup A+\sup B$是数集$A+B$的一个上界.

$\forall\varepsilon>0$，必存在$x_0\in A$，$y_0\in B$，使得

$$x_0>\sup A-\varepsilon/2,\quad y_0>\sup B-\varepsilon/2.$$

由此推得存在$z_0=x_0+y_0\in A+B$，使得

$$z_0=x_0+y_0>\sup A+\sup B-\varepsilon.$$

这说明$\sup A+\sup B$是数集$A+B$的最小上界. 由上确界定义可知

$$\sup(A+B)=\sup A+\sup B.$$

仿此可证
$$\inf(A+B)=\inf A+\inf B.$$

四、练习题

1. 设a为有理数，b为无理数，证明$a+b$为无理数.

2. 在数轴上表示出下列不等式的解：

(1) $x(x-1)(x-2)>0$； (2) $|x-1|<|x-2|$.

3. 设a,b,c为三个正实数. 证明：$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant\sqrt{(b-c)^2}$，并给出此不等式的一个几何解释.

4. 设$a<b<c$，证明$|b|\leqslant\max\{|a|,|c|\}$.

5. 设a,b为任意实数，证明：

(1) $\frac{1}{2}(|a|+|b|)\leqslant\max\{|a|,|b|\}\leqslant\frac{1}{2}(|a+b|+|a-b|)$；

(2) $\max\{|a+b|,|a-b|,|1-a|\}\geqslant 1/2$.

6. 利用均值不等式证明：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},\quad n=1,2,\cdots.$$

（提示：令$x_1=x_2=\cdots=x_n=1+1/n,x_{n+1}=1$.）

7. 证明柯西不等式：设a_i和b_i $(i=1,2,\cdots,n)$为实数，则有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^2.$$

8. 设A为非空有界数集，证明：

(1) $\sup A=\xi\in A$的充要条件是$\xi=\max A$；

(2) $\inf A=\eta\in A$的充要条件是$\eta=\min A$.

9. 设A为非空数集，定义$A^-=\{x\mid -x\in A\}$，证明：

(1) $\sup A^-=-\inf A$；　　(2) $\inf A^-=-\sup A$.

10. 设A,B为非空有界数集，$S=A\cup B$，证明：

(1) $\sup S=\max\{\sup A,\sup B\}$；　　(2) $\inf S=\min\{\inf A,\inf B\}$.

第二节　函数概念

一、学习要求

函数是数学分析研究的主要对象，是最基础、最重要的概念. 要求：

(1) 深刻理解和熟练掌握函数的概念.

(2) 掌握函数的四则运算法则.

(3) 掌握复合函数和反函数概念，会求它们的定义域.

二、内容概要

1. 函数概念

定义1.9　设D和M是两个实数集合，若有对应法则f，使得对于D内的每一个数x，都有惟一的一个数$y\in M$与之对应，则称f是定义在数集D上的函数，记为

$$f:D\to M,\quad x\mapsto y$$

数集D称为函数f的**定义域**，x所对应的数y称为f在点x的**函数值**，常记为$f(x)$. 全体函数值的集合

$$f(D)=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数 f 的值域.

2. 函数概念剖析

(1) 函数定义中"$D\to M$"表示按照对应法则 f 建立集合 D 到集合 M 的函数关系,"$x\mapsto y$"表示集合 D 和 M 中元素之间的对应关系. 习惯上称此函数关系中的 x 为**自变量**,称 y 为**因变量**.

(2) f 与 $f(x)$ 是有区别的,不能混为一谈. f 是对应法则,是函数;$f(x)$ 是与 D 中的元素 x 相对应的 M 中的元素,是函数值.

不妨设对应法则 f 为一台加工机(如面粉加工机),投入原料 x(如麦子),经过加工,得到产品 $f(x)$(如面粉),如图 1-1 所示.

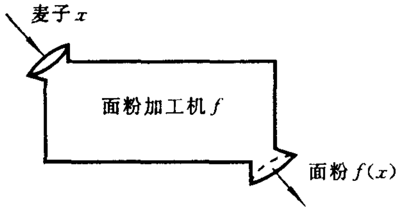


图 1-1

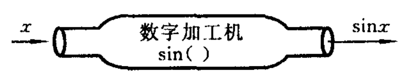


图 1-2

又如图 1-2 所示,对应法则 sin( )是一台数字加工机,投入"原料"x,得到"产品"$\sin x$.

(3) 函数的两个要素.

① 在函数定义中实数集 M 经常用 $\mathbf{R}$ 来代替,于是定义域 D 和对应法则 f 就成了确定函数的两个主要因素,俗称为函数的两要素,因而经常用

$$y=f(x), \quad x\in D$$

来表示定义在 D 上的函数 f.

② 如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,则称这两个函数相等,否则不等.

③ 自变量和因变量选用何种英文字母无关紧要. 如"$y=f(x), x\in D$","$u=f(t), t\in D$"和"$w=f(s), s\in D$"都表示同一个函数,这是因为它们的定义域相同,对应法则也相同.

3. 函数表示法

在数学分析中,表示函数的方法主要有解析法、图像法、列表法三种.

解析法又叫公式法,它是用解析表达式表示函数的方法.

如果对应法则是用表格或图像表示出来的方法,则称之为列表法或图像法.

注意 ① 表示函数的方法没有任何限制,不要认为函数就是公式. 公式只是表示函数的一种方法,而且即使是采用公式来表示一个函数,也不见得只能用一个

公式不可．例如

$$f(x)=\begin{cases}2x+3, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ 7x^2+6x, & x<0\end{cases}$$

在其定义域的不同部分用不同的公式表示，这类函数称为**分段函数**．

② 在数学分析中，有些函数无法用上述三种方法表示，而只能用语言来描述，这种表示函数的方法称为描述法．例如定义在 $\mathbf{R}$ 上的狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

4. 函数的四则运算

定义1.10 给定两个函数$y=f(x),x\in D_1$ 和$y=g(x),x\in D_2$，记$D=D_1\cap D_2$，并设$D\neq\varnothing$，则f 和g 在D 上的和、差、积的运算为

$$F(x)=f(x)+g(x),\quad x\in D,$$
$$G(x)=f(x)-g(x),\quad x\in D,$$
$$H(x)=f(x)g(x),\quad x\in D.$$

当$D^*=D_1\cap\{x|g(x)\neq 0,x\in D_2\}\neq\varnothing$时，$f$ 与g 在D^* 上商的运算为

$$L(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad x\in D^*.$$

5. 复合函数

定义 1.11 设有两个函数

$$y=f(u),\ u\in D \quad 和 \quad u=g(x),\ x\in E,$$

记$E^*=\{x|g(x)\in D\}\cap E$．若$E^*\neq\varnothing$，则对每一个$x\in E^*$，由函数$g$ 对应D 内惟一的一个值u，而u 又通过函数f 对应惟一的一个值y，这就确定了一个定义在E^* 上的函数，它以x 为自变量，y 为因变量，记为

$$y=f(g(x)),\quad x\in E^*.$$

上式称为函数f 与g 的**复合函数**，f 称为**外函数**，称g 为**内函数**，u 称为**中间变量**．

注意 ① 从上述定义可以了解到，可以用中间变量传递的方法构造出新的函数——复合函数．

② 两个函数能够进行复合而生成复合函数是有前提条件的：只有当外函数的定义域与内函数的值域的交集非空时，才能进行复合而生成复合函数．例如

$$f(u)=\ln u \quad 与 \quad u=-2+\cos^2 x$$

就不能进行复合运算，因为外函数f 的定义域为$D=\{u|u>0\}$，内函数的值域$E=\{u|-2\leqslant u\leqslant -1\}$，$D\cap E=\varnothing$．

6. 反函数

定义 1.12 设函数$y=f(x)$的定义域为数集D，若$\forall x_1,x_2\in D$，且$x_1\neq x_2$，有

$f(x_1)\neq f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 是 D 与 $f(D)$ 之间的**一一对应**.

定义1.13 设函数$y=f(x)$定义域为数集D，如果$y=f(x)$是D 与$f(D)$之间的一一对应，那么$\forall y\in f(D)$，对应惟一一个$x\in D$，使得$f(x)=y$，这样在$f(D)$上定义了一个函数，称之为函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的**反函数**，记为

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in f(D).$$

注意 ① $x=f^{-1}(y)$，$y\in f(D)$是 $y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数，函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 也是$x=f^{-1}(y)$，$y\in f(D)$的反函数. 或者说，f 与 f^{-1}互为反函数.

② f 的定义域D 是其反函数f^{-1}的值域，f 的值域$f(D)$是其反函数的定义域.

③ $f(f^{-1}(y))\equiv y$，$y\in f(D)$；$f^{-1}(f(x))\equiv x$，$x\in D$.

④ 在 $x=f^{-1}(y)$，$y\in f(D)$中，x 是因变量，y 是自变量，若按习惯仍用x 作为自变量记号，y 作为因变量记号，则函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in f(D)$$

可以改写为

$$y=f^{-1}(x),\quad x\in f(D).$$

需要说明的是 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$和 $x=f^{-1}(y)$，$y\in f(D)$是同一个函数，因为它们的对应法则相同，定义域相同，只是变量所用的记号不同而已.

7. 初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**.

定义1.14 由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的函数统称为**初等函数**.

凡不是初等函数的函数统称为**非初等函数**，如狄利克雷函数等.

注意 “凡是分段函数都是非初等函数”的说法是错误的. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

为分段函数，但是它又可以写为 $f(x)=\sqrt{x^2}$，是由函数 $f(u)=u^{\frac{1}{2}}$与 $u=x^2$ 复合而成的，所以它是初等函数. 一般来说，如果分段函数的段数有限，每一段的表达式都是初等函数表达式，且整个函数在定义域上连续，那么这样的分段函数一定是初等函数，即有如下结论：

设 $f(x)$和 $g(x)$是两个次数不超过 m 的一元多项式，则分段函数

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\leqslant a,\\ g(x), & x>a\end{cases}$$

在满足条件 $f(a)=g(a)$的情况下，有统一的初等函数表达式

$$F(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)]+\rho(x)\sqrt{(x-a)^2},$$

其中 $\rho(x)$是次数不超过 $m-1$ 的待定多项式.

例如，可求下列分段函数的统一表达式：

① $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\geqslant 1,\\ 1-x, & x<1;\end{cases}$　② $\varphi(x)=\begin{cases}x^2+2x, & x\leqslant 2,\\ 2x^2-x+2, & x>2.\end{cases}$

对于表达式①，令 $f(x)$ 的统一表达式为

$$f(x)=\frac{1}{2}[(x-1)+(1-x)]+k\sqrt{(x-1)^2}=k\sqrt{(x-1)^2}=k|x-1|.$$

当 $x\geqslant 1$ 时，有　$f(x)=k(x-1)$，

当 $x<1$ 时，有　$f(x)=k(1-x)$.

与 $f(x)$ 的分段函数的表达式比较，得 $k=1$，即 $f(x)$ 的统一表达式为

$$f(x)=\sqrt{(x-1)^2}.$$

对于表达式②，令 $\varphi(x)$ 的统一表达式为

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\frac{1}{2}[(x^2+2x)+(2x^2-x+2)]+(Ax+B)\sqrt{(x-2)^2}\\&=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1+(Ax+B)\sqrt{(x-2)^2}.\end{aligned}$$

当 $x\leqslant 2$ 时，有　$\begin{aligned}\varphi(x)&=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1+(Ax+B)(2-x)\\&=(3/2-A)x^2+(1/2+2A-B)x+1+2B,\end{aligned}$

当 $x>2$ 时，有　$\varphi(x)=(3/2+A)x^2+(1/2+B-2A)x+1-2B.$

与 $\varphi(x)$ 的分段函数的表达式比较，得

$$\begin{cases}3/2-A=1,\\ 1/2+2A-B=2,\\ 1+2B=0,\\ 3/2+A=2,\\ 1/2-2A+B=-1,\\ 1-2B=2,\end{cases}$$

解得　$A=1/2,\quad B=-1/2.$

即 $\varphi(x)$ 的统一表达式为

$$\varphi(x)=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{(x-2)^2}.$$

三、典型例题解析

例 1　根据所给条件求 $f(x)$ 的表达式.

(1) 已知 $f(1/x)=x+\sqrt{1+x^2}\ (x<0)$，求 $f(x)$；

(2) 已知 $af(x)+bf(1/x)=c/x$，$|a|\neq|b|$，求 $f(x)$；

(3) 已知 $2f(x)+f(1-x)=x^2$，$x\in\mathbf{R}$，求 $f(x)$.

解 (1) 方法一(变量代换法) 令$t=1/x$,因为$x<0$,所以$t<0$. 于是

$$f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{1}{t}+\frac{1}{|t|}\sqrt{1+t^2}=\frac{1}{t}(1-\sqrt{1+t^2}),$$

因此 $$f(x)=\frac{1}{x}(1-\sqrt{1+x^2}).$$

方法二(拼凑法) 因为

$$f(1/x)=x+\sqrt{1+x^2}=x+\sqrt{x^2(1+1/x^2)}$$

$$=x\left[1-\sqrt{1+1/x^2}\right]=\frac{1}{1/x}\left[1-\sqrt{1+(1/x)^2}\right],$$

所以 $$f(x)=\frac{1}{x}(1-\sqrt{1+x^2}).$$

(2) 由题设 $$af(x)+bf(1/x)=c/x \quad ①$$

可得 $$af(1/x)+bf(x)=cx. \quad ②$$

①$\times a$、②$\times b$,得

$$a^2f(x)+abf(1/x)=ac/x, \quad ③$$

$$abf(1/x)+b^2f(x)=bcx, \quad ④$$

③$-$④,得

$$(a^2-b^2)f(x)=\frac{ac-bcx^2}{x}.$$

因为$|a|\neq|b|$,从而有

$$f(x)=\frac{ac-bcx^2}{(a^2-b^2)x}.$$

(3) 由题设 $$2f(x)+f(1-x)=x^2, \quad ①$$

令$x=1-t$,得 $$2f(1-t)+f(t)=(1-t)^2,$$

即 $$2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2. \quad ②$$

①$\times 2-$②,得 $$3f(x)=2x^2-(1-x)^2=x^2+2x-1,$$

从而 $$f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x-1).$$

例 2 已知$f(e^x-1)=x^2+7$,求$f(x)$的定义域和值域.

解 令$t=e^x-1$,则$x=\ln(t+1)$,于是

$$f(t)=\ln^2(t+1)+7,$$

故 $$f(x)=\ln^2(x+1)+7.$$

从而函数的定义域为$(-1,+\infty)$,值域为$[7,+\infty)$.

例 3 已知$f(x)=\dfrac{x}{x-1}$,试验证$f\{f[f(f(x))]\}=x$,并求$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$ $(x\neq0,x\neq1)$.

解 由题设
$$f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1-1/x}$$
得
$$1/f(x)=1-1/x,$$
于是有
$$f[f(x)]=\frac{1}{1-1/f(x)}=\frac{1}{1-(1-1/x)}=x,$$
$$f[f(f(x))]=f(x),$$
$$f\{f[f(f(x))]\}=f(f(x))=x,$$
$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=f\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1-1/x}{1-1/x-1}=1-x.$$

例4 (1) 已知$f(u)=\dfrac{u}{u^2+2}$,$f(\varphi(x))=\dfrac{x^3-x}{x^4+1}(x\neq 0)$,求$\varphi(x)$;

(2) 已知$f(u)=2\ln u$,$f(\varphi(x))=\ln(1-\ln x)$,求$\varphi(x)$.

解 (1) $f(\varphi(x))=\dfrac{\varphi(x)}{\varphi^2(x)+2}=\dfrac{x^3-x}{x^4+1}=\dfrac{x-1/x}{x^2+1/x^2}=\dfrac{x-1/x}{(x-1/x)^2+2}$,

比较等式两边,得
$$\varphi(x)=x-1/x.$$
(2)
$$f(\varphi(x))=2\ln\varphi(x)=\ln(1-\ln x),$$
$$\ln\varphi(x)=\frac{1}{2}\ln(1-\ln x)=\ln\sqrt{1-\ln x},$$
从而
$$\varphi(x)=\sqrt{1-\ln x}.$$

小结 复合函数的运算问题一般可分为如下四类:

① 已知$f(x)$与$g(x)$的表达式,求$f(g(x))$,$g(f(x))$,$f(f(x))$或$g(g(x))$的表达式.这一类问题可用代入法求解.

② 已知$f(g(x))$的表达式,求$f(x)$的表达式.这一类问题一般用变量代换$t=g(x)$求解.

③ 已知$f(u)$及$f[\varphi(x)]$的表达式,求$\varphi(x)$的表达式.这一类问题的解题方法是,先将$\varphi(x)$代换$f(u)$中的u,求出$f(\varphi(x))$的表达式,再令其与题设中的$f(\varphi(x))$表达式相等,即可求出$\varphi(x)$的表达式.

④ 已知函数方程
$$af(\varphi(x))+bf(g(x))=h(x), \quad (*)$$
求$f(x)$的表达式,其中a,b为常数.这一类问题的解法是用变量代换法,根据所给方程建立另一个方程,再与已知方程(*)联立,消去一个函数$f(\varphi(x))$或$f(g(x))$,求出$f(x)$.

例5 求下列函数的反函数及其定义域:

(1) $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$; (2) $y=\begin{cases}2x+1, & -2\leqslant x<0,\\ 2^x, & 0\leqslant x<1,\\ x^2+1, & 1\leqslant x\leqslant 2;\end{cases}$