

三年重庆高考 两年名校模拟

重庆高考自主命题规律探秘

重庆一中
南开中学
重庆八中
巴蜀中学
育才中学
西师附中
外国语学校

高三集训场报告

数学(理科)

主编：解传江 郑 黎

万试无忧系列丛书

三年重庆高考 两年名校模拟

数学(理科)

主 编 解传江 郑 黎

编写人员 (按音序排列)

邓 勇 李 力 廖 桦

谭渝生 王 璟 肖 军

谢 凯 解传江 郑 黎

邹发明 祖浚修

重庆出版集团  重庆出版社

图书在版编目(CIP)数据

三年重庆高考 两年名校模拟. 数学. 理科/解传江
主编. —重庆:重庆出版社, 2006.8
ISBN 7-5366-8030-9

I. 三... II. 解... III. 数学课—高中—解题—升学
参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 094042 号

三年重庆高考 两年名校模拟·数学(理科)

SANNIAN CHONGQING GAKAO LIANGNIAN MINGXIAO MONI · SHUXUE

解传江 郑 黎 主编

出 版 人: 罗小卫

责任编辑: 黄 艳

封面设计: 杨 峰

版式设计: 李芝莲



重庆出版集团 出版
重庆出版社

重庆市长江二路 205 号 邮政编码 400016 <http://www.cqph.com>

重庆科情印务有限公司印刷

重庆市天下图书有限责任公司发行

重庆市渝中区双钢路 3 号科协大厦 14 楼

邮政编码 400013 电话: 023-63658853

全国新华书店经销

开本: 787mm × 1092mm 1/16 印张: 11.75 字数: 270 千字

版次: 2006 年 8 月第 1 版 印次: 2006 年 8 月第 1 次印刷

印数: 1~4 050 册

定价: 18.00 元

版权所有, 侵权必究

前言

近年来,全国各省市纷纷命制高考试题,一套试卷一统天下的局面不复存在,取而代之的是精彩纷呈、各具特色的地方自主命制的试卷。到2006年,重庆自主命制语文、数学、英语试题已有3个年头,文科综合、理科综合也开始自主命题。如果说,2004年重庆自主命制的语文、数学、英语试题还仅仅是脱胎于全国卷的命题思路,那到了2006年,重庆考卷就已经逐步成熟,体现了重庆高考的特色。文科综合、理科综合的自主命题也仍然有同样的发展轨迹。重庆高考试题、重庆名校的模拟试题都是重庆的教育专家对重庆高考的一种探索,都是重庆高考的前沿信息。

这套书收集了重庆近三年的高考题,近两年重庆大型的诊断性考试题,重庆一中、重庆南开中学、重庆八中、重庆育才中学、重庆巴蜀中学、西南师大附中、川外附属外国语学校等名校近两年的模拟试题,由重庆市多年工作在高考一线的特级、高级教师把这些试题按考点分类整理解析,并指出针对某一考点的命题规律、趋势和一些应对方法。在答案解析部分还包含了一些解题思路和点拨。

总体来讲,这套书具有以下特点:

一、**全析重庆高考。**这套书的作者都是重庆各名校的教学骨干,有多年高考复习的指导经验。他们中,有的曾培养出重庆高考状元;有的是重庆市大型诊断考试的命制者;有的多次参与、负责本学科的高考阅卷工作。他们通过对重庆近三年高考的总体分析,全面、准确地把握了重庆高考的命题特点和发展趋势,为重庆考生提供了必知的高考信息。

二、**试题典型。**这套书中收录的诊断试题、模拟题都是很有代表性的试题。其中,名校的模拟试题是他们训练学生的法宝,被名校视为不传之密(作者对试题进行了精要的解析),同时也是重庆高考试题命制者不得不研究的对象,看完这些试题及作者的解析,你或许能了解这些学校之所以成为名校的一些原因。

三、**重点明确。**这套书不是简单的试题汇编,而是把这些试题按知识点分类整理,并总结了各个知识点的考查规律和趋势。这样的编写体例,让读者看完本书后,能够非常清楚地了解重庆高考和重庆名校模拟的重点,同时也可以明确自己的复习重点。

我们期望通过本书的出版,能够帮助重庆广大的高三老师和学生科学复习,笑对高考。

编者

2006年8月

目

录

第一章 集合与简易逻辑	1
考点要览	1
三年重庆高考	1
两年名校模拟	2
第二章 函数	7
考点要览	7
三年重庆高考	7
两年名校模拟	10
第三章 数列	18
考点要览	18
三年重庆高考	18
两年名校模拟	20
第四章 三角函数	25
考点要览	25
三年重庆高考	25
两年名校模拟	27
第五章 平面向量与复数	36
考点要览	36
三年重庆高考	36
两年名校模拟	38
第六章 不等式	44
考点要览	44
三年重庆高考	44
两年名校模拟	47
第七章 直线和圆的方程	56
考点要览	56
三年重庆高考	56

两年名校模拟	57
第八章 圆锥曲线方程	61
考点要览	61
三年重庆高考	61
两年名校模拟	65
第九章 直线、平面、简单几何体	72
考点要览	72
三年重庆高考	72
两年名校模拟	77
第十章 排列、组合、二项式定理	96
考点要览	96
三年重庆高考	96
两年名校模拟	98
第十一章 概率与统计	102
考点要览	102
三年重庆高考	102
两年名校模拟	105
第十二章 极限	113
考点要览	113
三年重庆高考	113
两年名校模拟	116
第十三章 导数	118
考点要览	118
三年重庆高考	118
两年名校模拟	120
两年名校模拟参考答案	126

第一章 集合与简易逻辑

考点要览

分值 时间	集合的表示	集合的运算	命题的真假	四种命题	充要条件	集合思想的运用
2004·重庆	5				5	
2005·重庆		4			5	
2006·重庆	5				5	

三年重庆 高考

Ⅰ 试题再现

- (2004·重庆)一元二次方程 $ax^2+2x+1=0$ ($a \neq 0$) 有一个正根和一个负根的充分不必要条件是()
A. $a < 0$ B. $a > 0$ C. $a < -1$ D. $a > 1$
- (2005·重庆)已知 α, β 均为锐角,若 $p: \sin \alpha < \sin(\alpha + \beta)$, $q: \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, 则 p 是 q 的()
A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

- (2006·重庆)已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 5, 7\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, 则 $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) =$ ()
A. $\{1, 6\}$ B. $\{4, 5\}$
C. $\{2, 3, 4, 5, 7\}$ D. $\{1, 2, 3, 6, 7\}$
- (2005·重庆)集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 - x - 6 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} | |x - 2| < 2\}$, 则 $A \cap B =$.

2 考题解析

1. C.

令 $f(x) = ax^2 + 2x + 1$ ($a \neq 0$), 则 $f(0) = 1$, 原方程有一个正根和一个负根的充要条件是 $a < 0$, 所以事实上 $a < m$ ($m < 0$) 都为题目要求的充分不必

要条件.

2. B.

$\because \alpha, \beta$ 均为锐角, 且 $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, $\therefore 0 < \alpha < \alpha +$

$\beta < \frac{\pi}{2}$, $\sin \alpha < \sin(\alpha + \beta)$, 即 $q \Rightarrow p$. 反之易得 $p \Rightarrow q$

不成立. $\therefore p$ 是 q 的必要而不充分条件.

3. D.

由题设条件得 $C_U A = \{1, 3, 6\}$, $C_U B = \{1, 2, 6, 7\}$, 则
 $(C_U A) \cup (C_U B) = \{1, 2, 3, 6, 7\}$.

4. $\{x|0 < x < 3\}$.

由题设条件易得 $A = \{x|-2 < x < 3\}$, $B = \{x|0 < x < 4\}$, 所以 $A \cap B = \{x|0 < x < 3\}$.

3 命题规律

集合几乎是每年高考必考的内容之一, 主要考查的是集合的基础知识, 另外还以集合语言和集合思想为载体, 考查函数的定义域、值域、方程、不等式、曲线间的相交等问题. 简易逻辑则以考查四种命题、逻辑联结词、充要条件等知识点为主. 考查题目的形式以选择题和填空题居多.

4 备考指要

1. 把握住集合中各个概念的真正内涵. 例如: 集合的概念与“全体”的区别; “ A 是 B 的子集”的理解; “ A 是 B 的子集”和 “ A 是 B 的真子集”的联系与区别; “且”和 “或”的理解; 空集的

内涵和作用等.

2. 对于集合, 首先要确定其属于哪一类集合(点集、数集或其他), 即首先应该“读懂”集合, 然后再确定处理此类问题的方法.

3. 集合问题多与函数、方程、不等式有关, 要注意各类知识的融会贯通.

4. 掌握复合命题的结构及真假判断; 四种命题之间的内在关系, 及其在实际问题中的运用; 区别命题的否定和否命题等概念.

5. 命题的否定只否定命题的结论, 常表现为对命题中的正面叙述词语的否定. 常用的正面叙述词语和它的否定词语的逻辑理解, 见下表:

正面 词语	等于	大于 ($>$)	小于 ($<$)	是	都是	任意的
否定 词语	不等于	不大于 ($\leq$)	不小于 ($\geq$)	不是	不都是	某个

正面 词语	所有的	任意 两个	至多 有一个	至少 有两个	至多 有 n 个
否定 词语	某些	某两个	至少 有两个	一个 也没有	至少有 $n+1$ 个

6. 判断充要条件的基本方法有:

(1) 定义法——根据充要条件的定义判断;

(2) 构造法——利用等价命题的思想, 构造逆否命题, 即 $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$;

(3) 集合的角度——若对任意 $x \in A \Rightarrow x \in B$, 则 $A \subseteq B$, 类似的每种关系都可以联系集合的关系.

两年名校模拟

§1.1 集合与集合运算

1. (2005·一中月考) 设集合 $A = \{y|y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y|y = 2^x, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B$ 等于()

- A. $\{x|x > 0\}$ B. $\{2, 4\}$
 C. $\{(2, 4), (4, 16)\}$ D. $\{4, 16\}$

2. (2005·育才月考) 设集合 $S = \{y|y = 3^x, x \in \mathbf{R}\}$,



- $T=\{y|y=x^2-1, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $S \cap T$ 是()
 A. S B. T C. $\emptyset$ D. 有限集
3. (2005·渝东三诊)已知 $A=\{x|2x+1 \leq 3\}$, $B=\{x|x^2+x \leq 6\}$, $U=\mathbf{R}$, 则 $(\complement_U A) \cap B$ 是()
 A. $[-3, -2] \cup (1, 2]$
 B. $(-3, -2] \cup (1, +\infty)$
 C. $(-3, -2] \cup [1, 2)$
 D. $(-\infty, -3] \cup (1, 2]$
4. (2005·一中月考)已知集合 $U=\mathbf{R}$, $A=\left\{x \mid y=\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right\}$, 则 $\complement_U A$ 是()
 A. $\{x|0 \leq x < 1\}$ B. $\{x|x < 0 \text{ 或 } x \geq 1\}$
 C. $\{x|x \geq 1\}$ D. $\{x|x < 0\}$
5. (2005·市二诊)不等式 $\left|\frac{ax-1}{x}\right| > a$ 的解集为 M , 且 $2 \notin M$, 则 a 的取值范围为()
 A. $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ B. $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$
 C. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$
6. (2005·市一诊)若集合 $M=\{x||x-1|>1\}$, $N=\{x|x^2<0\}$, 那么()
 A. $M \cap N = M$ B. $M \subsetneq N$
 C. $N \subsetneq M$ D. $M \cup N = N$
7. (2005·外语校月考)函数 $f(x)=x^2-4x+3$, 集合 $M=\{(x, y)|f(x)+f(y) \leq 0\}$, $N=\{(x, y)|f(x)-f(y) \geq 0\}$, 则 $M \cap N$ 的面积是()
 A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. 2π
8. (2006·南开月考)设集合 $A=\{5, \log_2(a+3)\}$, $B=\{a, b\}$, 若 $A \cap B = \{2\}$, 则 $A \cup B$ 是()
 A. $\{2, 4, 5\}$ B. $\{2, 3, 5\}$
 C. $\{1, 2, 5\}$ D. $\{2, 6, 5\}$
9. (2006·万州一诊)如果全集 $U=\mathbf{R}$, $A=\{x|2 < x \leq 4\}$, $B=\{3, 4\}$, 则 $A \cap (\complement_U B)$ 等于()
 A. $(2, 4)$ B. $(2, 3) \cup (3, 4]$
 C. $(2, 3) \cup (3, 4)$ D. $(2, 4]$
10. (2005·外语校月考)设集合 $P=\{1, 2, 3, 4\}$, $Q=\{x||x|>2, x \in \mathbf{R}\}$, 全集 $U=\mathbf{R}$, 那么 $P \cap (\complement_U Q)$ 等于()
 A. $\{1, 2\}$ B. $\{3, 4\}$
 C. $\{1\}$ D. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
11. (2006·南开月考)函数 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ 4\sin x & 0 < x \leq \pi \end{cases}$, 则集合 $\{x|f(f(x))=0\}$ 的元素有()
 A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 5个
12. (2006·西师附中月考)已知集合 $A=\{y|y=2^{x^2}-1, x \in \mathbf{R}\}$, $B=\{y|y=\sqrt{-x^2+2x+3}, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $\{y|y \in A \text{ 且 } y \notin B\}$ 是()
13. (2005·南开月考)设数集 $M=\left\{x \mid m \leq x \leq m+\frac{3}{4}\right\}$, $N=\left\{x \mid n-\frac{1}{3} \leq x \leq n\right\}$, 且 M, N 都是集合 $\{x|0 \leq x \leq 1\}$ 的子集. 如果把 $b-a$ 叫做集合 $\{x|a \leq x \leq b\}$ 的“长度”, 那么集合 $M \cap N$ 的“长度”的最小值是()
14. (2006·育才月考)已知关于 x 的不等式 $\frac{ax-5}{x^2-a} < 0$ 的解集为 M .
 (1)当 $a=4$ 时, 求集合 M ;
 (2)若 $3 \in M$ 且 $5 \notin M$, 求实数 a 的取值范围.

15. (2005·一中月考) 设集合 $A = \{x | x^2 - ax < x - a\}$, $B =$

$\{x | 1 < \log_2(x+1) < 2\}$, $C = \{x | x^2 + bx + c \geq 0\}$,

(1) 若 $A \cap B = A$, 求实数 a 的取值范围;

(2) $B \cap C = \emptyset$, 且 $B \cup C = \mathbf{R}$, 求 b, c 的值.

16. (2006·南开月考) 设全集 $U = \mathbf{R}$,

(1) 解关于 x 的不等式 $|x-1| + a - 1 > 0 (a \in \mathbf{R})$;

(2) 记 A 为(1)中不等式的解集, 集合 $B =$

$$\left\{x \mid \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{3}\right) = 0\right\},$$

若 $(\complement_U A) \cap B$ 恰有 3 个元素, 求 a 的取值范围.

§1.2 简易逻辑

1. (2005·一中月考) 已知集合 A, B, C , 则“ $B \subseteq C$ ”是“ $(A \cup B) \subseteq (A \cup C)$ ”的()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

2. (2005·南开月考) 条件“ $0 < x < 5$ ”是“ $|x-2| < 3$ ”的()

A. 充分但非必要条件

B. 必要但非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分又非必要条件

3. (2006·南开月考) 对于 $x \in [0, 6]$ 的一切值, $6a + 2b > 0$ 是使 $ax + b > 0$ 恒成立的()

A. 仅充分条件 B. 仅必要条件

C. 充要条件

D. 非充分非必要条件

4. (2005·西师附中月考) 设数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n = Aq^n + B (A \neq 0, q \neq 0, q \neq 1)$, 则 $A + B = 0$ 是使 $\{a_n\}$ 成为公比不等于 1 的等比数列的()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 即不充分, 也不必要条件

5. (2006·南开月考) 已知命题 p : 函数 $f(x) = \log_2(x^2 + ax - a)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 则 $-4 < a < 0$; 命题 q : 函数 $y = \sqrt{|x-1| - 2}$ 的定义域为 $\{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 3\}$. 则()

A. “ p 或 q ”为假

B. “ p 且 q ”为真

C. p 真 q 假

D. p 假 q 真

6. (2005·南开月考) 已知命题 p : $|x| = x$ 的充要条件是 x 为正实数; 命题 q : 存在反函数的函数一定是单调函数. 则下列复合命题中真命题是()

A. p 且 q

B. p 或 q

C. $\neg p$ 且 q

D. $\neg p$ 或 q

7. (2005·市二诊) 已知命题 p : 不等式 $|x-1| > m$ 的



解集是 $\mathbf{R}$; 命题 $q: f(x) = \frac{2-m}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数. 若命题“ p 或 q ”为真, 命题“ p 且 q ”为假, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, 2)$
C. $[0, 2)$ D. $(-\infty, 2)$

8. (2005·市一诊) 设集合 $M = \{x | x > 2\}$, $P = \{x | x < 3\}$, 那么“ $x \in M$ 或 $x \in P$ ”是“ $x \in M \cap P$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 非充分非必要条件

9. (2005·渝东三诊) 命题 p : 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $|a| + |b| > 1$ ”是“ $|a + b| > 1$ ”的充分而不必要条件; 命题 q : 函数 $y = \sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域是 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$, 则 ()

- A. “ p 或 q ”为假 B. “ p 且 q ”为真
C. “ p 或 q ”为真 D. “ p 且 q ”为真

10. (2005·一中月考) 已知 $f(x) = 2x + 3 (x \in \mathbf{R})$, 若“ $|f(x) - 1| < a$ ”的必要条件是“ $|x + 1| < b (a, b > 0)$ ”, 则 a, b 之间的关系是 ()

- A. $a \leq \frac{b}{2}$ B. $b < \frac{a}{2}$
C. $b \geq \frac{a}{2}$ D. $a > \frac{b}{2}$

11. (2006·八中月考) 已知命题 p : 函数 $y = \log_{0.5}(x^2 + 2x + a)$ 的值域为 $\mathbf{R}$; 命题 q : 函数 $y = -(5 - 2a)^x$ 是减函数. 若“ p 或 q ”为真命题, “ p 且 q ”为假命题, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $a \leq 1$ B. $a < 2$
C. $1 < a < 2$ D. $a \leq 1$ 或 $a \geq 2$

12. (2006·西师附中月考) 有下列四个命题:

- ①“直线 $a \perp b$ ”的充分不必要条件是“ a 垂直于 b 在平面 α 内的射影”;
②“ $OM \parallel O_1M_1$, 且 $ON \parallel O_1N_1$ ”是“ $\angle MON = \angle M_1O_1N_1$ ”的必要不充分条件;

③“直线 $l \perp$ 平面 α ”的充分条件是“直线 $l \perp$ 平面 α 内的无数条直线”;

④“平面 α 的斜线段 AB, AC 在 α 的射影 $A'B'$ 与 $A'C'$ 相等”是“ $AB = AC$ ”的充分不必要条件.

其中正确命题的个数是 ()

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

13. (2006·一中月考) 已知命题 p, q , 则“ p 且 q 为假命题”是“ $\neg p$ 或 q 为假命题”的 ()

- A. 仅充分条件 B. 仅必要条件
C. 充要条件 D. 非充分非必要条件

14. (2006·西师附中月考) 设集合 $U = \{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, $A = \{(x, y) | 2x - y + m > 0\}$, $B = \{(x, y) | x + y - n \leq 0\}$. 那么“点 $P(2, 3) \in A \cap (\complement_U B)$ ”的充要条件是 ()

- A. $m > -1$ 且 $n < 5$ B. $m < -1$ 且 $n < 5$
C. $m > -1$ 且 $n > 5$ D. $m < -1$ 且 $n > 5$

15. (2006·一中月考) 甲命题: 平面 $\alpha \perp$ 平面 β , 平面 $\beta \perp$ 平面 γ , 则平面 $\alpha \parallel$ 平面 γ ; 乙命题: 平面 α 上不共线的三点到平面 β 的距离相等, 则 $\alpha \parallel \beta$. 则 ()

- A. 甲真乙真 B. 甲真乙假
C. 甲假乙真 D. 甲假乙假

16. (2005·信息卷) 现用若干张扑克牌进行扑克牌游戏. 小明背对小亮, 让小亮按下列四个步骤操作:

第一步: 分发左、中、右三堆牌, 每堆牌不少于两张, 且每堆牌的张数相同;

第二步: 从左边一堆拿出两张, 放入中间一堆;

第三步: 从右边一堆拿出一张, 放入中间一堆;

第四步: 左边一堆有几张牌, 就从中间一堆拿出几张牌放入左边一堆.

这时, 小明准确地说出了中间一堆牌现有的张数. 你认为中间一堆牌的张数是

17. (2005·西师附中月考) 设命题 $p: |4x - 3| \leq$

1. 命题 $q: x^2 - (2a+1)x + a(a+1) \leq 0$, 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件, 则实数 a 的取值范围是 _____.

18. (2005·一中月考) 命题甲: $a \in \mathbf{R}$, 关于 x 的方程 $|x| = ax + 1$ ($a > 0$) 有两个非零实数解; 命题乙: $a \in \mathbf{R}$, 关于 x 的不等式 $(a^2 - 1)x^2 + (a - 1)x - 2 > 0$ 的解集为空集. 当甲、乙中有且仅有一个为真命题时, 求实数 a 的取值范围.

19. (2006·南开月考) 设命题 p : 函数 $f(x) = \lg(ax^2 - x + \frac{1}{16} - a)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$; 命题 q : 不等式 $\sqrt{2x+1} < 1 + ax$ 对一切 $x \in \mathbf{R}^+$ 均成立. 如果命题“ p 或 q ”为真命题, 命题“ p 且 q ”为假命题, 求实数 a 的取值范围.

第二章 函 数

考点要览

分值 时间	考点	函数的记号、定义域、值域	函数的性质	反函数	指数与指数函数	对数与对数函数	函数的综合应用
2004·重庆		5	5				
2005·重庆			5				5
2006·重庆		12			5	5	5

三年重庆高考

II 试题再现

- (2004·重庆)函数 $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)}$ 的定义域是()
 A. $[1, +\infty)$ B. $(\frac{2}{3}, +\infty)$
 C. $[\frac{2}{3}, 1]$ D. $(\frac{2}{3}, 1]$
- (2005·重庆)函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数, 另 $f(2)=0$, 则使得 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围是()
 A. $(-\infty, 2)$ B. $(2, +\infty)$

C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ D. $(-2, 2)$

- (2005·重庆)若动点 (x, y) 在曲线 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

($b>0$)上变化, 则 x^2+2y 的最大值为()

- A. $\begin{cases} \frac{b^2}{4} + 4 & 0 < b < 4, \\ 2b & b \geq 4 \end{cases}$
 B. $\begin{cases} \frac{b^2}{4} + 4 & 0 < b < 2, \\ 2b & b \geq 2 \end{cases}$
 C. $\frac{b^2}{4} + 4$
 D. $2b$

- (2006·重庆)如图 2-1 所示, 单位圆中弧 AB

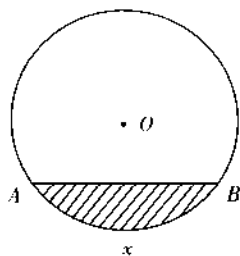
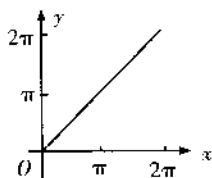
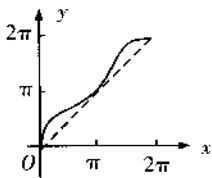


图 2-1

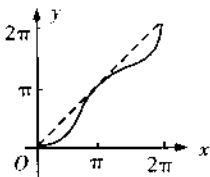
的长为 x , $f(x)$ 表示弧 AB 与弦 AB 所围成的弓形面积的 2 倍, 则函数 $y=f(x)$ 的图象是图 2-2 中的 ()



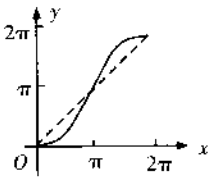
A.



B.



C.



D.

图 2-2

5. (2006·重庆) 设 $a>0, a \neq 1$, 函数 $f(x)=a^{\ln(x^2-2x+3)}$ 有最大值, 则不等式 $\log_a(x^2-5x+7)>0$ 的解集为 _____.
6. (2006·重庆) 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$.
- (1) 若 $f(2)=3$, 求 $f(1)$; 又若 $f(0)=a$, 求 $f(a)$;
- (2) 设有且仅有一个实数 x_0 , 使得 $f(x_0)=x_0$, 求函数 $f(x)$ 的解析表达式.

2 考题解析

1. D.

$$\text{由 } \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(3x-2) \geq 0, \\ 3x-2 > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < 3x-2 \leq 1 \Rightarrow \frac{2}{3} < x \leq 1.$$

2. D.

由偶函数的性质 $f(x)=f(-x)$ 易得答案, 建

议在解题时画出草图以帮助理解.

3. A.

令 $x=2\cos\theta, y=b\sin\theta, \theta \in [0, 2\pi]$, 所以 $x^2+2y=4\cos^2\theta+2b\sin\theta=-4\sin^2\theta+2b\sin\theta+4=-4\left(\sin\theta-\frac{b}{4}\right)^2+4+\frac{b^2}{4}$. 当 $0 < b < 4$ 时, $0 < \frac{b}{4} < 1, \sin\theta=\frac{b}{4}$ 时, x^2+2y 取得最大值 $\frac{b^2}{4}+4$; 当 $b \geq 4$ 时, 即 $\frac{b}{4} \geq 1, x^2+2y=-4\left(\sin\theta-\frac{b}{4}\right)^2+4+\frac{b^2}{4}$, 当 $\sin\theta=1$ 时取最大值 $2b$.

4. D.

由扇形的面积公式以及弓形面积的求法易知 $f(x)=x-\sin x (0 \leq x \leq 2\pi)$, 又由面积的增加趋势和快慢, 可知 D 答案符合要求.

说明: 同学们还可以利用导数分析函数图象的方法对图象作大致的描述.

5. (2, 3).

当 $a>1$ 时, 若 $x \rightarrow +\infty$, 则 $f(x) \rightarrow +\infty$, 不可能出现最大值, $\therefore 0 < a < 1$. 于是由 $\log_a(x^2-5x+7) > 0 \Leftrightarrow \log_a(x^2-5x+7) > \log_a 1 \Leftrightarrow 0 < x^2-5x+7 < 1 \Rightarrow x \in (2, 3)$.

6. 解: (1) 因为对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$, 所以 $f(f(2)-2^2+2)=f(2)-2^2+2$. 又 $f(2)=3 \Rightarrow f(3-2^2+2)=3-2^2+2$, 即 $f(1)=1$.

若 $f(0)=a$, 则 $f(a-0^2+0)=a-0^2+0$, 即 $f(a)=a$.

(2) 因为对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$, 又因为有一个且只有一个实数 x_0 , 使得 $f(x_0)=x_0$, 所以对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x)-x^2+x=x_0$, 在上式中令 $x=x_0$, 有 $f(x_0)-x_0^2+x_0=x_0$. 因为 $f(x_0)=x_0$, 所以 $x_0-x_0^2=0 \Rightarrow x_0=0$ 或 $x_0=1$. 若 $x_0=0$, 则 $f(x)-x^2+x=0$, 即 $f(x)=x^2-x$, 但方程 $x^2-x=x$ 有两个不同实根, 与题设矛盾, 故 $x_0 \neq 0$; 若 $x_0=1$, 则有 $f(x)-x^2+x=1$, 即 $f(x)=x^2-x+1$, 易验证该函数满足题设条件, 于是所求函数为 $f(x)=x^2-x+1 (x \in \mathbf{R})$.

3 命题规律

函数是高中数学的重要组成部分, 是历年高考数学必考的内容. 近几年的高考题对函数



内容的考查主要体现在以下几个方面:(1)考查函数知识本身,如映射、定义域、解析式、值域、单调性、奇偶性、周期性、对称性、函数图象等等;(2)考查函数与方程、不等式、数列、解析几何、立体几何、向量等知识交叉渗透及综合应用问题;(3)考查以函数为模型的实际应用问题;(4)探索性问题。

4 备考指要

函数是中学数学中最重要的内容之一,同学们应从定义、解析式、图象、性质四方面加以研究,全面掌握和透彻理解每一个知识点和每一种解题技能。

1. 准确把握映射与函数的概念,深刻理解函数的三要素,如:求函数定义域的主要依据;求函数解析式的常用方法(待定系数法、换元法、配凑法、函数方程的思想);求函数值域的常用方法(分析观察法、反函数法、配方法、判别式法、单调性法、数形结合法、换元法、不等式法、导数法等)。把握函数方面的数学符号和数学语言。

2. 深刻理解一些常见函数(一次函数、二次函数、指数函数、对数函数、三角函数)的性质,熟悉它们的解析式、图象以及解析式和图象之间的有机联系,把握数形之间的相互利用和联系。

3. 深刻理解反函数的概念及互为反函数的函数之间的关系,特别是定义域、值域、图象之间的联系。会求一些简单函数的反函数。

4. 对抽象函数应引起高度重视,近年高考中对函数性质问题的考查使用具体函数的越来越少,而使用抽象函数符号的则越

来越多。学习中必须掌握函数的奇偶性、单调性、周期性、对称性等抽象函数形式下的表现形式。了解常见抽象函数关系式所对应的背景函数,对解题可以起到指导性的作用。

5. 掌握函数图象变换的常用方法,对函数 $f(x)$:

(1) 平移变换—— $f(x \pm a)$ (左右平移);
 $f(x) \pm a$ (上下平移);

(2) 对称变换—— $f(-x)$ (关于 y 轴对称),
 $-f(x)$ (关于 x 轴对称), $-f(-x)$ (关于原点对称);

(3) 翻折变换—— $|f(x)|$ (下翻上),
 $f(|x|)$ (去左留右,右翻左);

(4) 伸缩变换—— $f(\omega x)$ (左右伸缩), $Af(x)$
(上下伸缩)。

6. 复习二次函数,应注意三个二次关系:二次函数、二次方程、二次不等式的区别与联系。着重把握处理二次不等式的解、二次方程的实根分布、二次函数在闭区间上的最值等问题。

7. 体会函数所体现出的四大大学思想:函数与方程思想、数形结合思想、分类讨论思想、等价转化思想。特别是数形结合与分类讨论思想在解决函数问题中体现得尤为突出,应着重训练和培养。

8. 掌握利用函数思想解决实际问题的思路 and 策略:审题——建模——解模——还原,同时在解答实际问题时还应注意考虑实际问题的实际意义。

9. 导数是研究函数性质的有力工具,学习中应强化用导数研究函数的意识,掌握用导数研究函数的单调性、最值等问题的基本方法。

§2.1 映射与函数

1. (2005·南开月考)已知二次函数 $f(x)=(x-a)(x-b)-2(a < b)$, 且 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 是方程 $f(x)=0$ 的两根, 则 a, b, α, β 的大小关系是()

A. $\alpha < a < b < \beta$ B. $a < \alpha < \beta < b$
C. $a < \alpha < b < \beta$ D. $\alpha < a < \beta < b$

2. (2005·八中月考)函数 $y=f(x) (x \in \mathbf{R})$ 的图象如图 2-3 所示,

则函数 $g(x)=$

$f(\log_{\frac{1}{2}} x)$ 的单调

递减区间是()

A. $[1, \sqrt{2}]$

B. $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$

C. $(-\infty, 1]$ 和 $[\sqrt{2}, +\infty)$

D. $(0, 1]$ 和 $[\sqrt{2}, +\infty)$

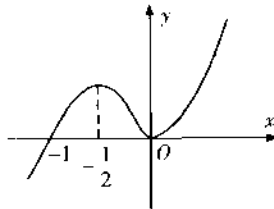


图 2-3

3. (2005·南开月考)设 $f(x)=\begin{cases} \sin \pi x & x < 0, \\ f(x-1)+\frac{1}{2} & x > 0, \end{cases}$ 则

$f(\frac{1}{6})$ 的值为()

A. 0 B. $-\frac{1}{2}$ C. -2 D. 1

4. (2005·一中月考)下列函数中, 值域是 $(0, +\infty)$ 的是()

A. $y=2x+1 (x>0)$ B. $y=\lg(x^2+1)$

C. $y=\frac{1}{x^2}$ D. $y=\sqrt{x^2-2x-1}$

5. (2006·一中月考)已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 它的反函数为 $y=f^{-1}(x)$, 如果 $y=f^{-1}(x+a)$ 与 $y=f(x+a)$ 互为反函数, 且 $f(a)=a$ (a 为非零常数), 则 $f(0)$ 的值为()

A. $-a$ B. 0 C. a D. $2a$

6. (2005·市一诊)已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$, 函数 $f(x)$

的图象如图 2-

4 所示, 则函

数 $f(|x|)$ 的图

象是图 2-5 中

的()

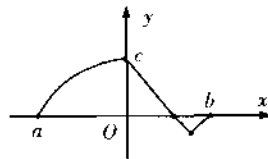
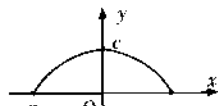
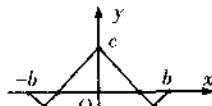


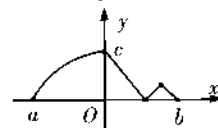
图 2-4



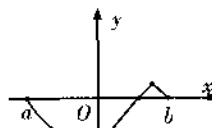
A.



B.



C.



D.

图 2-5

7. (2006·南开月考)若一系列函数的解析式相同, 值域相同, 但其定义域不同, 则称这些函数为“同族函数”, 那么函数解析式为 $y=x^2$, 值域为 $\{1, 4\}$ 的“同族函数”共有()

A. 7 个 B. 8 个 C. 9 个 D. 10 个

8. (2006·万州一诊)已知 $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$, 函数 $y=$

$g(x)$ 的图象与函数 $y=f^{-1}(x+1)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 则 $g(11)$ 等于()

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{7}{2}$ D. $\frac{21}{8}$

9. (2006·一中月考)定义一种运算“ $*$ ”: 对于自然数满足以下运算性质:

① $1 * 1 = 1$;



② $(n+1) * 1 = n * 1 + 1$.

则 $n * 1$ 等于()

- A. n B. $n+1$ C. $n-1$ D. n^2

10. (2005·八中月考)已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x^4) = \log_2 x$, 则 $f(16)$ _____.

11. (2005·八中月考)已知

$$f(a+b) = f(a) \cdot f(b), f(1) = 2, \text{ 则}$$

$$\frac{f^2(1)+f(2)}{f(1)} + \frac{f^2(2)+f(4)}{f(3)} + \frac{f^2(3)+f(6)}{f(5)} =$$

12. (2005·渝东三诊)对任意两实数 a, b , 定义运算“ $*$ ”如下: $a * b = \begin{cases} a, & \text{若 } a \leq b, \\ b, & \text{若 } a > b, \end{cases}$ 函

数 $f(x) = \left\lceil \log_{\frac{1}{2}} x \right\rceil * \log_2 x$ 的值域为 _____.

13. (2005·一中月考)已知 $f(x)$ 是定义在 $[0, 3]$ 上的

函数 $f(x)$

的图象如

图 2-6 所

示, 则不

等式 $f(x)$

$\cos x < 0$ 的

解集是 _____.

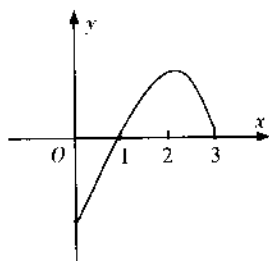


图 2-6

14. (2005·一中月考)函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x^2) & -1 < x < 0, \\ e^{x-1} & x \geq 0. \end{cases} \text{ 若 } f(1) + f(a) =$$

2, 则 a 的值为 _____.

15. (2005·信息卷)已知函数 $y=f(x), x \in D, y \in \mathbf{R}^+$, 且正数 C 为常数. 对于任意的 $x_1 \in D$, 存在一个 $x_2 \in D$, 使 $\sqrt{f(x_1)f(x_2)} = C$, 则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上的均值为 C . 试依据上述定义, 写出一个均值为9的函数的例子: _____.

16. (2006·南开月考)正比例函数 $f(x) = kx$ ($k \neq 0$)满足 $f(x_1+x_2) = k(x_1+x_2) = kx_1+kx_2 = f(x_1)+f(x_2)$, 以上过程抽象的概括为: $f(x+y) = f(x)+f(y)$, 则抽象函数 $f(xy) = f(x)+f(y)$ 是由特殊函数 _____ 抽象而成的. (填入一个即可)

17. (2006·南开月考)设函数 $y=f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$, 且对于任意的 $x, y \in \mathbf{R}, f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ 恒成立, 当 $x < 0$ 时, $f(x) > 1$, 数

列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = f(0)$, 且 $f(a_{n+1}) = \frac{1}{f(-2-a_n)}$

($n \in \mathbf{N}^*$).

(1)求 $f(0)$ 的值;

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3)是否存在正数 k , 使 $\left\{1 + \frac{1}{a_1}\right\}, \left\{1 + \frac{1}{a_2}\right\}, \dots$

$\left\{1 + \frac{1}{a_n}\right\} \geq k\sqrt{2n+1}$ 对一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 均

成立, 若存在, 求出 k 的最大值, 并证明, 若不存在请说明理由.

18. (2006·育才月考) 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, 对任意实数 x , 都有 $f(x+2) = -f(x)$, 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时 $f(x) = x^3$.

- (1) 试证: $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴;
(2) 证明函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数, 并求 $x \in [1, 5]$ 时 $f(x)$ 的解析式.

3. (2005·南开模拟) 已知函数 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数, 若 $f(x) - g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, 则 $f(1)$, $g(0)$, $g(-2)$ 的大小顺序是 ()

- A. $g(0) < f(1) < g(-2)$ B. $g(-2) < g(0) < f(1)$
C. $f(1) < g(0) < g(-2)$ D. $g(-2) < f(1) < g(0)$

4. (2006·一中月考) 已知 $f(x)$, $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, $\frac{f(x)}{g(x)} = a^x$, $g(x) \neq 0$, $f'(x) \cdot g(x) < f(x) \cdot g'(x)$, 且 $\frac{f(1)}{g(1)} + \frac{f(-1)}{g(-1)} = \frac{5}{2}$, 在无穷数列 $\left\{ \frac{f(n)}{g(n)} \right\} (n=1, 2, \dots, 10)$ 中, 任意取前 k 项相加, 则前 k 项和大于 $\frac{15}{16}$ 的概率是 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

5. (2005·市二诊) 如果一个点是一个指数函数的图象与一个对数函数的图象的公共点, 那么称这个点为“好点”. 有如下五个点:

$$M(1, 1), N(1, 2), P(2, 1), Q(2, 2), G\left(2, \frac{1}{2}\right),$$

其中“好点”的个数为 ()

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

6. (2006·南开月考) 函数 $y = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{x}{2}}$ 的部分图象大致是图 2-7 中的 ()

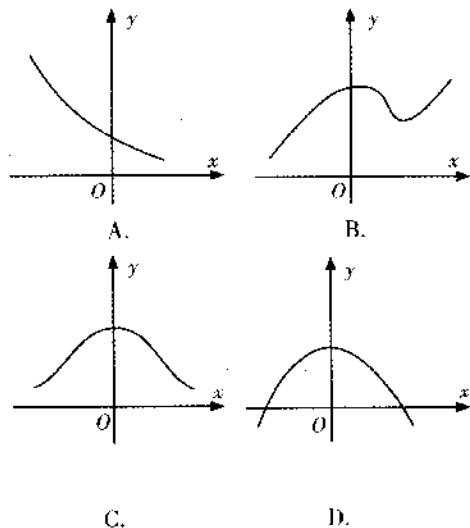


图 2-7

§2.2 指数与指数函数

1. (2005·一中月考) 若关于 x 的方程 $25^{x+1} - 4 \times 5^{-10x+11} - m = 0$ 有实数根, 则 m 的取值范围是 ()

- A. $[-3, 0]$ B. $(-\infty, -4]$
C. $[-3, 0]$ D. $(-3, 0)$

2. (2005·一中月考) 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的恒不为零的函数, 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x) \cdot f(y) = f(x+y)$ 成立. 若 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = f(n) (n \in \mathbf{N}^+)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的取值范围所在的最小区间是 ()

- A. $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ B. $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$
C. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ D. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$