

水力发电建设技术经验专题报导



拱坝試載法計算的簡化和改进

上海科学技术出版社

內 容 提 要

拱坝应力分析素称繁复,本书所述系将一般常用的精确试载法加以改进,计算方法较为简易。在拱圈计算过程中,以简便的查表方法和求解一个三元一次联立方程式代替了繁冗的计算工作。在悬臂梁计算中,由分块累加法改为积分算法,可减少分块数量,除减少计算工作量和提高计算精确度外,并适于计算各种荷载作用下的变位。本书可供水工设计者和高等学校水工结构系师生参考。

水力发电建设技术经验专题报导

拱坝试载法计算的简化和改进

水利电力部上海勘测设计院 编著

*

上海科学技术出版社出版

(上海南京西路2004号)

上海市书刊出版业营业许可出003号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店经售

商务印书馆上海厂印刷

*

开本787×1092 1/16 印张2 14/16 字数65,000

1960年1月第1版 1960年1月第1次印刷

印数1—2,700

统一书号: 15119 · 1393

定 价:(十二)0.36元

編写: 刘世康 馬昌仁	水力发电建設 技术經驗专题报导	沪技 0064 号 1959 年 12 月
----------------	--------------------	--------------------------

拱坝試載法計算的簡化和改进

目 录

一、概述	1
二、拱圈計算方法的改进	1
三、悬臂梁計算方法的改进	7
四、計算实例	11
五、結語	15
附录	16

一、概 述

在适当的地质地形条件下,拱坝常为混凝土坝中的最经济而又安全的一种。但是,由于拱坝的受力条件与其他混凝土坝颇不相同,坝体应力计算极为复杂,这是拱坝设计中的关键问题。拱坝的应力计算方法颇多,计有圆筒法、纯拱法、斜拱法、薄壳法、迭弛法、试载法等。其中精确度最差的圆筒法,在近代拱坝设计中已很少采用。纯拱法与斜拱法常用于初步选择拱坝断面时的应力校核工作(前者仅适用于薄拱坝,不适用于重力拱坝),但对最终确定断面时的应力校核,其精确度不能满足设计上的要求。薄壳法为应用薄壳理论而发展形成的一种方法,其适用范围仅限于厚度甚薄的圆拱坝。由于此法在数学处理上存在着许多问题,必须在某些假定基础上进行简化,故目前在拱坝计算中尚少应用。迭弛法乃以弹性理论为基础、以差分方程为工具的一种方法,此法在理论上讲最为合理,但其缺点则为计算工作量太繁重,常为设计力量及设计进度所限而不能采用。到目前为止,试载法(即悬臂拱法)尚不失为一种合理的和适用的计算拱坝应力的方法,其计算工作量虽亦较多,但尚为实际设计力量所能完成,在精确度方面亦能满足设计上的要求,故此法在近代拱坝设计中应用最广。

近几年来,不论在国内或国外,拱坝的修建均日见增多。为了加速拱坝的设计进度,缩短计算工日,研究试载法的改进和简化,实具有重要意义。我们结合在流溪河拱坝设计中的经验,提出拱圈及悬臂梁计算的改进方法,以供读者在今后设计拱坝和对试载法进一步研究时作为参考。

本书中所采用的符号除注明者外,均同参考文献(1)。

二、拱圈计算方法改进

在试载法的计算过程中,不难发现,最大部分的计算工作是花费在拱圈的变形计算中。因此,如何简化这一部分工作,是具有重要意义的。对于变截面圆拱(或其他形状的拱)的计算,一般只能采用分段累加法,我们尚未能予以简化;但对实际上采用得最多的等截面圆拱的计算,则是可以改进和简化的。

美国垦务局为了简化圆拱计算,已编制了不少数表,目前有二种方法计算等截面圆拱,即(1)精确法(Amplified Method)和(2)简约法(Abridged Method)。应用精确法计算的步骤如下:

(1) 根据拱圈的平均半径 r 、厚度 T 、中心角 ϕ_A 及基础常数等,可在参考文献(1)的第十表(200~213页)中查出拱圈上各点的拱常数系数,并可计算拱常数内基础影响部分,合计之,求得拱圈的拱常数。

(2) 就各种单位荷载,在参考文献(1)第十七、十八表中查出相应的载常数系数,计算载常数。

(3) 假定在拱顶处切开,计算拱圈上各点的静定力矩 M_L 、轴向力 H_L 及剪力 V_L 。

(4) 用拱常数及載常数成立平衡方程式, 解出拱頂超靜定力 M_0 、 H_0 及 V_0 。(对称拱的 $V_0=0$)。

(5) 任意点的应力可由下式計算:

$$\begin{aligned}M &= M_0 + H_0 Y + V_0 X - M_L \\H &= H_0 \cos \phi - V_0 \sin \phi + H_L \\V &= H_0 \sin \phi + V_0 \cos \phi - V_L\end{aligned}\quad (1)$$

(6) 任意点的变位(包括徑向、切向及轉动变位)可先求出拱端的三个变位及拱圈部分变形所引起的变位, 将两种影响相加, 即得各点最終变位。

(7) 在求出各种单位荷载下拱圈各点的各种变位值后, 应该連成曲綫, 以供試載法調整荷载时应用。

应用簡約法計算圓拱的步驟如下:

(1) 根据拱圈中心角及厚度半徑比, 在参考文献(2)第三章表 24 到 75 中查出拱圈在各种荷载下各点的变形及应力系数。

(2) 根据这些系数即可求出拱圈在各种单位荷载下的变形曲綫。

由此, 显然可見, 簡約法的計算工作远較精确法的少, 因为前者几乎把所有的繁冗拱圈計算工作全化为查表的工作, 把計算簡化到极限。但它最大的缺点是, 精确度不够, 因为簡約法的各数表是根据下述假定編制的: ①基岩彈性模量等于混凝土彈性模量; ②基岩面是垂直的; ③忽略基础变形中的次影响; ④假定基础面縱橫尺寸为一定比值^①。根据我們計算經驗, 这些假定常难符合实际情况, 而使簡約法得出的結果不能令人滿意。由于簡約法不能完全代替精确法, 我們不得不仍然采用后法作为主要計算工具。但它的缺点是計算过程太长, 在計算中要求精度很高(有效數字达七、八位以上), 必須应用計算机进行工作, 而且很容易发生錯誤, 需要进行反复細致的校核, 这严重地影响了工作进度。

由于这些原因, 我們着手研究了如何改进簡約法的数表, 使它能适用于更广泛的情况。经过較长时期的摸索和分析, 我們认为关键問題在于基础变形影响。因为基础变形对拱圈变形影响很大, 决不能忽略, 基础变形又受到很多因素的影响, 要包括各种可能的变数(如 ψ 、 μ 、 E 、 T 、 b/a ……等)在內。如欲編制一套完整的图表, 則表格的数量, 将浩大无比(正由于这个原因, 所以美国垦务局在編制簡約法数表中, 被迫采用了許多假定把基础影响硬性規定下来)。因此, 要解决这个矛盾, 必須把基础影响与拱圈本身变形分离开来, 这样才有可能利用数表, 再輔以一些簡單計算, 方可解决各种情况下的拱圈計算問題。

根据上述原理, 我們建議利用以下兩組数表, 来解算問題:

(1) 基础絕對剛固时、拱圈在各种单位荷载下的变形及应力系数表(詳見附录一)。这組表的形式和美国垦务局的簡約法数表完全相似, 仅是将基础影响剔除而已。

(2) 拱端基础发生单位变位时、拱圈的变形及应力系数表(詳見附录二)。这組表又可分为三种:

1. 基础发生单位轉动时、拱圈上各点的三种变位及应力系数表;
2. 基础发生单位徑向位移时、拱圈上各点的三种变位及应力系数表;

^① 詳見参考文献(2)基础常数一节。拱頂的基坑为空間崎曲面的, 計算时把空間崎曲面展开在平面上, 并化为矩形面积, 平行河流方向为 a , 垂直河流方向为 b 。

3. 基础发生单位切向位移时、拱圈上各点的三种变位及应力系数表。

有了这些数表后,计算的方法与步骤将如下述:

(1) 根据拱圈尺寸及荷载类型,分别从第一组表中查出拱圈各点的变位及应力值,这时假定基础是绝对刚固的;同时,也求得这情况下的拱端三个应力,即力矩 ${}_FM_A$ 、推力 ${}_FH_A$ 和剪力 ${}_FV_A$ 。

(2) 将拱端基础放松,使其恢复自然情况,则无异于有一组不平衡力系 ${}_FM_A$ 、 ${}_FH_A$ 、 ${}_FV_A$ 作用在拱端上,而使拱端和基础发生变位。这一点和普通的力矩分配法原理无所不同,因为不妨把基础视为一特殊的“杆件”来看待,基础及拱端将发生三个变位 θ 、 Δr 、 Δs , 其值可从下列方程式中得到:

$$\begin{aligned} (M_{A\theta} + M_{f\theta})\theta - (M_{As})\Delta s + (M_{Ar} - M_{fr})\Delta r - {}_FM_A &= 0 \\ (H_{A\theta})\theta - (H_{As} + H_{fs})\Delta s + (H_{Ar})\Delta r - {}_FH_A &= 0 \\ (V_{A\theta} - V_{f\theta})\theta - (V_{As})\Delta s + (V_{Ar} + V_{fr})\Delta r - {}_FV_A &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

式中 θ 、 Δs 、 Δr 为未知数, ${}_FM_A$ 、 ${}_FH_A$ 及 ${}_FV_A$ 是步骤(1)中求出的“固定端应力”,而 $M_{A\theta}$ 、 $M_{f\theta}$ ……等均为拱圈及基础的“形常数”,其定义如下:

$M_{f\theta}$ ——基础发生单位转动时所需的力矩

$$M_{f\theta} = \frac{1}{\alpha - \frac{(\alpha_2)^2}{\gamma}} \quad (3)$$

式中 α 、 α_2 、 γ (及以后的 β) 等,即指参考文献(1)中所述的基础常数,当基岩物理性质及基坑尺寸倾角等已知后,可以迅速求出

$$V_{f\theta} = M_{f\theta} \frac{\alpha_2}{\gamma} = \frac{1}{\frac{\alpha\gamma}{\alpha_2} - \alpha_2} \quad (4)$$

$V_{f\theta}$ ——基础发生单位转动时所需的剪力;

M_{fr} ——基础发生单位径向位移时所需的力矩

$$M_{fr} = V_{f\theta} \text{ (馬氏互等定律);} \quad (5)$$

V_{fr} ——基础发生单位径向位移时所需的剪力

$$V_{fr} = M_{fr} \frac{\alpha}{\alpha_2} = \frac{1}{\gamma \frac{(\alpha_2)^2}{\alpha} - \alpha} \quad (6)$$

H_{fs} ——基础发生单位切向位移时所需的轴向力,

$$H_{fs} = \frac{1}{\beta} \quad (7)$$

$M_{A\theta}$ 、 $H_{A\theta}$ 、 $V_{A\theta}$ ——拱端发生单位转动时所需加在拱端的力矩、轴向力及剪力;

M_{As} 、 H_{As} 、 V_{As} ——拱端发生单位切向位移时所需加在拱端的力矩、轴向力及剪力;

M_{Ar} 、 H_{Ar} 、 V_{Ar} ——拱端发生单位径向位移时所需加在拱端的力矩、轴向力及剪力。

上列 $M_{A\theta} \sim V_{Ar}$ 九个数是拱圈尺寸的函数,可以在第二组表中查出[代入式(2)时取绝对值]①。

① 式(2)中各项系数均按取绝对值后面排列的符号,否则式中正负号将有所变换。

(3) 求出 θ 、 Δs 及 Δr 后, 再在第二組表內查出相应的变位及应力系数, 各乘以 θ 、 Δs 及 Δr 后, 与步驟(1)中求得之值相迭加, 即为最后結果。

由上可見, 采用我們所建議的方法, 計算工作比用精确法大为减少, 比用簡約法略多一些 [即多了步驟(2)及(3)], 而所得結果的精确度与用精确法所得的极为接近, 仅在查表过程中由于内插而可能引起一些誤差。在步驟(2)中需解一組三元方程式, 用它来代替精确法的浩大計算工作, 显然是合算的。

編制上述兩組数表, 在理論上是沒有困难的, 但需要組織一定力量进行才可完成。这二組数表中各項系数的計算公式列于表一中。

表

	荷 載	拱 頂		任	
		力 矩	軸 向 力	力 矩	軸 向 力
第 一 組	單位 荷載 1	$m_0 = \frac{K''}{K'} [12a^2(B_1'D_1' - B_1D_1') + B_1''D_1' - B_1'D_1'']$	$h_0 = \frac{K''}{K'} [12a^2(A_1'D_1' - B_1'D_1') + A_1'D_1'']$	$m = m_0 + h_0 \text{vers } \phi - m_L$ $m_L = 1000K'' \text{vers } \phi$	$h = h_0 \cos \phi + h_L$ $h_L = 1000K'' \text{vers } \phi$
		$M_0 = m_0 r^2$	$H_0 = h_0 r$	$M = m r^2$	$H = h r$
	2	公式形式同單位荷載 1, 仅載常数 D_1 、 D_3 等需用各單位荷載的載常数	同左	公式形式与單位荷載 1 相同, 仅 m_L 需用各單位荷載下的 m_L	公式形式与單位荷載 1 相同, 仅 h_L 需用各單位荷載下的 h_L
	3				
	4				
	5				
	溫度 荷載	$m_0 = \frac{1}{ak'} (-B_1' \sin \phi_A)$ $M_0 = m_0 (r^2 \text{ct } E_c)$	$h_0 = \frac{1}{ak'} (A_1' \sin \phi_A)$ $H_0 = h_0 (r \text{ct } E_c)$	$m = m_0 + h_0 \text{vers } \phi$ $M = m (r \text{ct}^2 E_c)$	$h = h_0 \cos \phi$ $H = h (r \text{ct } E_c)$
	拱端 單位 轉動	$m_0 = \frac{1}{ak'} (-B_1' - B_1''/12a^2 + B_1' \text{vers } \phi_A)$ $M_0 = m_0 (r^2 E_c)$	$h_0 = -\frac{1}{ak'} (A_1' \text{vers } \phi_A - B_1')$ $H_0 = h_0 (r E_c)$	$m = m_0 + h_0 \text{vers } \phi$ $M = m (r^2 E_c)$	$h = h_0 \cos \phi$ $H = h (r E_c)$
	單位 半徑 向 變位	$m_0 = \frac{B_1'}{ak'} \sin \phi_A$ $M_0 = m_0 (r E_c)$	$h_0 = -\frac{A_1'}{ak'} \sin \phi_A$ $H_0 = h_0 E_c$	$m = m_0 + h_0 \text{vers } \phi$ $M = m (r E_c)$	$h = h_0 \cos \phi$ $H = h E_c$
	單位 切向 變位	$m_0 = -\frac{B_1'}{ak'} \cos \phi_A$ $M_0 = m_0 (r E_c)$	$h_0 = \frac{A_1'}{ak'} \cos \phi_A$ $H_0 = h_0 E_c$	$m = m_0 + h_0 \text{vers } \phi$ $M = m (r E_c)$	$h = h_0 \cos \phi$ $H = h E_c$

$$c = \frac{r}{T}, K' = 12A_1'B_1'\phi^2 + A_1'B_1'' - 12(B_1')^2\phi^2$$

在水利电力部上海勘测设计院领导的支持下,我們已完成徑向調整中所需的各種數表(詳見附录)。附录一中的第一組數表,包括五種單位徑向荷載在假定基礎為絕對剛固時的變形及應力系數,其中未列入溫度荷載及單位徑向集中荷載的各項系數,因為當單位徑向集中荷載作用時 M 、 H 、 V 及 Δr 均為 0, 僅拱端剪力 $rV_A=1000$ 。當計算溫度荷載所引起的應力及變形時,可應用下列公式:

$$H = (hr - 1000aK'') \left(\frac{\sigma t E_c}{1000aK''} \right)$$

$$M = mr^2 \left(\frac{\sigma t E_c}{1000aK''} \right)$$

意		點	
剪 力	徑 向 變 位	切 向 變 位	角 變 位
$v = h_0 \sin \phi - v_L$ $v_L = 1000K'' \sin \phi$	$K_1 = 12a^3(mc'_1 + hB'_2 + vc'_2 - K''D'_2) + a(hB'_2 + vc'_2 - K''D'_2)$	$K_1 = -12a^3(mB'_1 + hB'_2 + vB'_2 - K''D'_2) - a(hB'_2 + vB'_2 - K''D'_2)$	$K_1 = 12a^3(mA'_1 + hB'_1 + vc'_1 - K''D'_1)$
$V = vr$	$\Delta r = K_1 r / E_c$	$\Delta s = K_1 r / E_c$	$\theta = K_1 / E_c$
公式形式與單位荷載 1 相同, 僅 v_L 需用各單位荷載下的 v_L	公式形式與單位荷載 1 相同, 僅 D'_2 及 D'_2 需用各單位荷載下的 D'_2 及 D'_2	公式形式與單位荷載 1 相同, 僅 D'_2 及 D'_2 需用各單位荷載下的 D'_2 及 D'_2	公式形式與單位荷載 1 相同, 僅 D'_1 及 D'_1 需用各單位荷載下的 D'_1 及 D'_1
$v = h_0 \sin \phi$	K_1 公式形式同上, 僅 $K''D'_2$ 及 $K''D'_2$ 應改用溫度荷載下的 D'_2 及 D'_2	K_1 公式形式同上, 僅 $K''D'_2$ 及 $K''D'_2$ 應改用溫度荷載下的 D'_2 及 D'_2	K_1 公式形式同上, 僅 $K''D'_1$ 應改用溫度荷載下的 D'_1
$V = v(r E_c)$	$\Delta r = K_1 r c t$	$\Delta s = K_1 r c t$	$\theta = K_1 c t$
$v = h_0 \sin \phi$	$K_1 = 12a^3(mc'_1 + hB'_2 + vc'_2) + a(hB'_2 + vc'_2) + \sin \phi$	$K_1 = -12a^3(mB'_1 + hB'_2 + vB'_2) - a(hB'_2 + vB'_2) - \text{vers } \phi$	$K_1 = 12a^3(mA'_1 + hB'_1 + vc'_1) + 1$
$V = v(r E_c)$	$\Delta r = K_1 r$	$\Delta s = K_1 r$	$\theta = K_1$
$v = h_0 \sin \phi$	$K_1 = 12a^3(mc'_1 + hB'_2 + vc'_2) + a(hB'_2 + vc'_2) + \cos \phi$	$K_1 = -12a^3(mB'_1 + hB'_2 + vB'_2) - a(hB'_2 + vB'_2) - \sin \phi$	$K_1 = 12a^3(mA'_1 + hB'_1 + vc'_1)$
$V = v E_c$	$\Delta r = k_1$	$\Delta s = k_1$	$\theta = k_1 / r$
$v = h_0 \sin \phi$	$K_1 = 12a^3(mc'_1 + hB'_2 + vc'_2) + a(hB'_2 + vc'_2) + \sin \phi$	$K_1 = -12a^3(mB'_1 + hB'_2 + vB'_2) + 1 - a(hB'_2 + vB'_2)$	$K_1 = 12a^3(mA'_1 + hB'_1 + vc'_1)$
$V = v E_c$	$\Delta r = K_1$	$\Delta s = K_1$	$\theta = K_1 / r$

$$K'' = 1 + \frac{1}{2a}$$

$$V = vr \left(\frac{\sigma t E_c}{1000 a K''} \right)$$

$$\Delta r = K_1 r \left(\frac{\sigma t E_c}{1000 a K''} \right) \quad (8)$$

式中 $a = \frac{r}{T}$, $K'' = 1 + \frac{1}{2a}$, h 、 m 、 v 及 K_1 为单位徑向荷载 $N0.1$ 的应力及变形系数。

附录二中的第二組数表,未列入拱端发生单位切向位移时的各項系数,計算这一情况下的应力及变形时,可利用拱端发生单位徑向位移时的各項系数,但 H 、 M 、 V 及 Δr 的計算公式应改为

$$\begin{aligned} H &= -h E_c \operatorname{ctg} \phi_A \\ M &= -m r E_c \operatorname{ctg} \phi_A \\ V &= -v E_c \operatorname{ctg} \phi_A \\ \Delta r &= (\cos \phi_A \cos \phi - K_1) \operatorname{ctg} \phi_A + \sin \phi_A \cos \phi \end{aligned} \quad (9)$$

式中 ϕ_A 为拱頂与拱端之間的夹角, ϕ 为任意点与拱端之間的夹角。

本附录中的数表仅适用于徑向調整的范围,关于切向及扭轉調整中所需的各種数表,目前尚未編制。根据我們的經驗,通过徑向調整后,拱与悬臂梁的荷载分配已大致定局,其精确度常能满足一般拱坝設計中的需要,通过切向及扭轉調整后,当能进一步提高計算精确度,但計算工作量将增加数倍,故在許多拱坝計算中,为了簡化計算起見,不考虑切向及扭轉調整。

关于切向及扭轉調整中的拱圈应力与变形計算,經研究后,认为可以利用美国垦务局已編制好的一套簡約法数表,只要进行一些“还原”工作即可,其步骤如下:

(1) 利用簡約法数表,分別查出拱圈在切向或扭轉荷载下的各点变位和应力系数,特别是决定拱端的三个应力 M_A 、 H_A 、 V_A 。

編制該簡約法数表时系假定基础变位常数采取下列的簡單形式:

$$\bar{M}_{f0} = \frac{ET^2}{5.075}, \quad \bar{H}_{f0} = \frac{E}{1.556}, \quad \bar{V}_{f0} = \frac{E}{1.785}$$

其余各常数均为 0, 式中 E 即为混凝土的彈性模量(因在簡約法中假定基岩的 E 和混凝土的相同), 因此,根据拱端应力 M_A 、 H_A 、 V_A 即可直接求出在簡約法假定下的基础变形值(当然这不是真正的基础变形值)。

$$[\theta] = \frac{5.075 M_A}{ET^2}, \quad [\Delta s] = -\frac{1.556 H_A}{E}, \quad [\Delta r] = \frac{1.785 V_A}{E}$$

(2) 应用第二組表,查出該拱圈的拱端变位常数 $M_{A0} \sim V_{A0}$ (共計九个), 将这些常数及上面求得的 $[\theta]$ 、 $[\Delta s]$ 、 $[\Delta r]$ 代入(1)中, 可以算出基础绝对剛固时的拱端应力 ${}_r M_A$ 、 ${}_r H_A$ 及 ${}_r V_A$ 如下:

$$\begin{aligned} {}_r M_A &= (M_{A0} + \bar{M}_{f0}) [\theta] - (M_{A0}) [\Delta s] + (M_{Ar}) [\Delta r] \\ {}_r H_A &= (H_{A0}) [\theta] - [H_{A0} + \bar{H}_{f0}] [\Delta s] + (H_{Ar}) [\Delta r] \\ {}_r V_A &= (V_{A0}) [\theta] - (V_{A0}) [\Delta s] + (V_{A0} + \bar{V}_{f0}) [\Delta r] \end{aligned} \quad (10)$$

(3) 根据实际基础資料計算真正基础常数:

$$M_{r0}, M_{r1}, H_{r0}, V_{r0}, V_{r1}$$

将这些常数連同第(2)步骤中求得的拱端常数和 ${}_r M_A$ 、 ${}_r H_A$ 、 ${}_r V_A$ 等代入式(2)中, 求出

真正的基础变位 θ 、 Δr 及 Δs 。

(4) 計算两次基础变位之差, 即 $\theta - [\theta]$ 、 $\Delta r - [\Delta r]$ 、 $\Delta s - [\Delta s]$, 将这些差值乘以第二組表中查出的拱圈各点变位和应力(在附录二中仅能查出应力及徑向变位, 而切向变位及角变位需按表一中的公式补算)与第(1)步骤中所得之值相迭加, 即为最后結果。

由上可見, 本法在具备足够数表的条件下能大大簡化計算工作, 当缺乏数表的輔助时, 可利用簡約法的数表, 仅需补充少量計算, 亦能达到节省計算工日的目的。

三 悬臂梁計算方法的改进

在拱坝中, 悬臂梁断面均为变截面, 故以选用分块累計法計算較為适宜。此法除便于計算悬臂梁任意高程的变位外, 并能考虑悬臂梁局部开裂对变位的影响; 但在选择分块尺寸时, 分块高度不宜取得太大(即分块块数不宜过少), 以免影响变位的精确度, 因此常需在各拱圈高程之間补插若干分块, 这样就大大增加了計算工作量。为了弥补这个缺点, 我們研究了一种新的計算方法——分块积分法。我們所建議的为一种分块与积分相結合的方法; 各分块的变位按积分法計算, 然后将各分块变位进行組合。由于此法在計算各分块变位时精确度較分块累計法高, 故在选择悬臂梁分块时, 可取較少的分块数目(通常以拱圈高程作为分块的界綫), 这样就节省了大量計算工作。此法特別适于計算悬臂梁在各种单位荷载作用下的变位。

計算各分块变位时, 假定任意高程的截面积 A 与慣性矩 I 系按以下关系式表达:

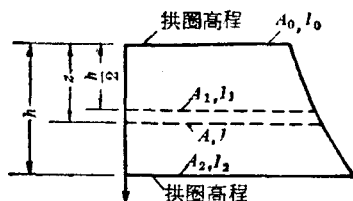


图 1

$$\begin{aligned}\frac{1}{A} &= \frac{1}{A_0} + az + bz^2 \\ \frac{1}{I} &= \frac{1}{I_0} + cz + dz^2\end{aligned}\quad (11)$$

式中 A 及 I 分别为任意高程处的截面积及慣性矩; A_0 、 A_1 及 A_2 分别为分块頂、中間及底的截面积; I_0 、 I_1 及 I_2 分别为分块頂、中間及底的慣性矩(如图 1 所示); a 、 b 、 c 及 d 均为常数, 可在下式中求解:

$$\begin{aligned}\frac{1}{A_1} &= \frac{1}{A_0} + \frac{1}{2}ah + \frac{1}{4}bh^2 \\ \frac{1}{A_2} &= \frac{1}{A_0} + ah + bh^2 \\ \frac{1}{I_1} &= \frac{1}{I_0} + \frac{1}{2}ch + \frac{1}{4}dh^2\end{aligned}$$

$$\frac{1}{I_2} = \frac{1}{I_0} + ch + dh^2 \quad (12)$$

解之,得

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{h} \left(-\frac{3}{A_0} + \frac{4}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) \\ b &= \frac{1}{h^2} \left(\frac{2}{A_0} - \frac{4}{A_1} + \frac{2}{A_2} \right) \\ c &= \frac{1}{h} \left(-\frac{3}{I_0} + \frac{4}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) \\ d &= \frac{1}{h^2} \left(\frac{2}{I_0} - \frac{4}{I_1} + \frac{2}{I_2} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

在計算各种单位荷载所引起的变位之前,可先計算各单独分块在四种基本荷载作用下的变位,然后进行变位的組合。四种基本荷载的变位計算公式推导如下:

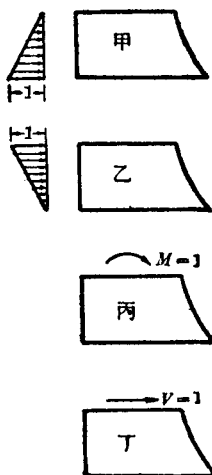


图 2

(1) 三角形荷载 I [詳见图 2 (甲)] 任意点的力矩及剪力为

$$M = \frac{z^3}{6h} \quad V = \frac{z^2}{2h}$$

块頂角变位

$$\begin{aligned} \theta &= \int_0^h \frac{M dz}{EI} = \frac{1}{E} \int_0^h \frac{z^3}{6h} \left(\frac{1}{I_0} + cz + dz^2 \right) dz \\ &= \frac{1}{6Eh} \left[\frac{z^4}{4I_0} + \frac{cz^5}{5} + \frac{dz^6}{6} \right]_0^h \\ &= \frac{h^3}{24E} \left[\frac{1}{I_0} + \frac{4ch}{5} + \frac{2dh^2}{3} \right] \end{aligned}$$

块頂徑向变位(由于弯曲)

$$\begin{aligned} \Delta r_1 &= \int_0^h \frac{M(h-z) dz}{EI} = \frac{1}{E} \int_0^h \frac{z^3}{6h} (h-z) \left(\frac{1}{I_0} + cz + dz^2 \right) dz \\ &= \frac{1}{6Eh} \int_0^h \left(\frac{z^3 h}{I_0} + cz^4 h + dz^5 h - \frac{z^4}{I_0} - cz^5 - dz^6 \right) dz \\ &= \frac{1}{6Eh} \left[\frac{z^4 h}{4I_0} + \frac{cz^5 h}{5} + \frac{dz^6 h}{6} - \frac{z^5}{5I_0} - \frac{cz^6}{6} - \frac{dz^7}{7} \right]_0^h \\ &= \frac{h^4}{120E} \left[\frac{1}{I_0} + \frac{2ch}{3} + \frac{10dh^2}{21} \right] \end{aligned}$$

块頂徑向变位(由于剪切)

$$\begin{aligned} \Delta r_2 &= \int_0^h \frac{KV dz}{AG} = \frac{h}{E} \int_0^h \frac{V dz}{A} = \frac{3}{E} \int_0^h \frac{z^2}{2h} \left(\frac{1}{A_0} + az + bz^2 \right) dz \\ &= \frac{3}{2Eh} \left[\frac{z^3}{3A_0} + \frac{az^4}{4} + \frac{bz^5}{5} \right]_0^h \\ &= \frac{h^3}{2E} \left[\frac{1}{A_0} + \frac{3ah}{4} + \frac{3bh^2}{5} \right] \end{aligned}$$

(2) 三角形荷載 II [詳見圖 2 (乙)]

$$M = \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6h} \quad V = z - \frac{z^2}{2h}$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= \int_0^h \frac{M dz}{EI} = \frac{1}{E} \int_0^h \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6h} \right) \left(\frac{1}{I_0} + cz + dz^2 \right) dz \\ &= \frac{h^3}{8E} \left[\frac{1}{I_0} + \frac{11ch}{15} + \frac{26dh^2}{45} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta r}_1 &= \int_0^h \frac{M(h-z) dz}{EI} \\ &= \frac{1}{E} \int_0^h \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6h} \right) (h-z) \left(\frac{1}{I_0} + cz + dz^2 \right) dz \\ &= \frac{h^4}{30E} \left[\frac{1}{I_0} + \frac{7ch}{12} + \frac{8dh^2}{21} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta r}_2 &= \int_0^h \frac{KV dz}{AG} = \frac{3}{E} \int_0^h \left(z - \frac{z^2}{2h} \right) \left(\frac{1}{A_0} + az + bz^2 \right) dz \\ &= \frac{h^3}{E} \left[\frac{1}{A_0} + \frac{5ah}{8} + \frac{9bh^2}{20} \right] \end{aligned}$$

(3) 單位力矩 [詳見圖 2 (丙)]

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= \int_0^h \frac{M dz}{EI} = \frac{1}{E} \int_0^h \left(\frac{1}{I_0} + cz + dz^2 \right) dz \\ &= \frac{h}{E} \left[\frac{1}{I_0} + \frac{ch}{2} + \frac{dh^2}{3} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta r}_1 &= \int_0^h \frac{M(h-z) dz}{EI} = \frac{1}{E} \int_0^h (h-z) \left(\frac{1}{I_0} + cz + dz^2 \right) dz \\ &= \frac{h^2}{2E} \left[\frac{1}{I_0} + \frac{ch}{3} + \frac{dh^2}{6} \right] \end{aligned}$$

$$\bar{\Delta r}_2 = 0$$

(4) 單位剪力 [詳見圖 2 (丁)]

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= \int_0^h \frac{M dz}{EI} = \frac{1}{E} \int_0^h z \left(\frac{1}{I_0} + cz + dz^2 \right) dz \\ &= \frac{h^2}{2E} \left[\frac{1}{I_0} + \frac{2ch}{3} + \frac{dh^2}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta r}_1 &= \int_0^h \frac{M(h-z) dz}{EI} = \frac{1}{E} \int_0^h z(h-z) \left(\frac{1}{I_0} + cz + dz^2 \right) dz \\ &= \frac{h^3}{6E} \left[\frac{1}{I_0} + \frac{ch}{2} + \frac{3dh^2}{10} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta r}_2 &= \int_0^h \frac{KV dz}{AG} = \frac{3}{E} \int_0^h \left(\frac{1}{A_0} + az + bz^2 \right) dz \\ &= \frac{3h}{E} \left[\frac{1}{A_0} + \frac{ah}{2} + \frac{bh^2}{3} \right] \end{aligned}$$

为便于应用起见, 兹将 $\bar{\theta}$ 、 $\bar{\Delta r}_1$ 及 $\bar{\Delta r}_2$ 的公式列于表二:

表二 四种基本荷载的分块变位公式

荷 载	$\bar{\theta}$	$\bar{\Delta r}_1$	$\bar{\Delta r}_2$
三角形荷载 I	$\frac{h^3}{24E} \left[\frac{1}{I_0} + \frac{4ch}{5} + \frac{2dh^2}{3} \right]$	$\frac{h^4}{120E} \left[\frac{1}{I_0} + \frac{2ch}{3} + \frac{10dh^2}{21} \right]$	$\frac{h^3}{2E} \left[\frac{1}{A_0} + \frac{3ah}{4} + \frac{3bh^2}{5} \right]$
三角形荷载 II	$\frac{h^3}{8E} \left[\frac{1}{I_0} + \frac{11ch}{15} + \frac{26dh^2}{45} \right]$	$\frac{h^4}{30E} \left[\frac{1}{I_0} + \frac{7ch}{12} + \frac{8dh^2}{21} \right]$	$\frac{h^3}{E} \left[\frac{1}{A_0} + \frac{5ah}{8} + \frac{9bh^2}{20} \right]$
单位力矩	$\frac{h}{E} \left[\frac{1}{I_0} + \frac{ch}{2} + \frac{dh^2}{2} \right]$	$\frac{h^2}{2E} \left[\frac{1}{I_0} + \frac{ch}{3} + \frac{dh^2}{6} \right]$	0
单位剪力	$\frac{h^2}{2E} \left[\frac{1}{I_0} + \frac{2ch}{3} + \frac{dh^2}{2} \right]$	$\frac{h^3}{6E} \left[\frac{1}{I_0} + \frac{ch}{2} + \frac{3dh^2}{10} \right]$	$\frac{3h}{E} \left[\frac{1}{A_0} + \frac{ah}{2} + \frac{bh^2}{3} \right]$

用上表的公式算出各分块在四种基本荷载作用下的 $\bar{\theta}$ 及 $\bar{\Delta r}$ ($\bar{\Delta r} = \bar{\Delta r}_1 + \bar{\Delta r}_2$) 后, 即可进行变位的组合, 算出在各种单位荷载作用下任意高程的最终变位。兹将变位组合的步骤说明于下:

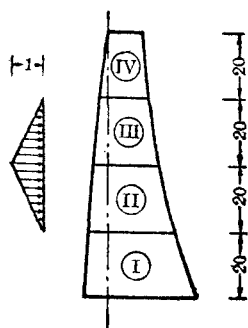


图 3

(1) 分别计算各分块的荷载系数。以图 3 中的悬臂梁及单位荷载为例,

$$\text{块① } p_1=0, p_2=0, V=2 \times \frac{1}{2} \times 20 \times 1 = 20, M=20 \times 20 = 400$$

$$\text{块② } p_1=0, p_2=1, V=\frac{1}{2} \times 20 \times 1 = 10, M=10 \times \frac{20}{3} = 66.67$$

$$\text{块③ } p_1=1, p_2=0, V=0, M=0$$

$$\text{块④ } p_1=0, p_2=0, V=0, M=0$$

以上 p_1 及 p_2 分别为三角形荷载作用在块 I 及 II 的荷载强度, p_1 指在块底的, p_2 指在块顶的, V 及 M 分别为块顶剪力及力矩。

(2) 将以上的荷载系数各乘以相应的 $\bar{\theta}$ 及 $\bar{\Delta r}$ (按表 2 的公式求得), 即得各分块的实际变位值。

(3) 将各分块的角变位进行迭加, 得各高程的实际角变位 (在迭加中, 应从基础开始自下向上进行, 并应计入基础的角变位 $\theta_1 = M\alpha + V\alpha_2$)。

(4) 各高程的实际径向变位亦应由基础开始自下向上计算。

在基础处

$$\Delta r_1 = V\gamma + M\alpha_2 \quad (14)$$

在基础以上高程

$$\Delta r = \Delta r' + \theta'h + \bar{\Delta r} \quad (15)$$

式中 θ' 及 $\Delta r'$ 分别为块底的角变位及径向变位。

由上可见, 本法计算甚为简便, 当计算各种不同单位荷载的变位时, 各分块变位 $\bar{\theta}$ 及 $\bar{\Delta r}$ 不必重算, 仅需修正荷载系数后作相应补算, 即得最终变位。

四、計算实例

【例一】 設某拱圈的尺寸及基礎特性如下：

$$\begin{aligned} r &= 105.5 \text{ 米} & E_F &= E_G \\ T &= 5.0 \text{ 米} & \mu_F &= 0.17 \\ \phi_A &= 57^\circ \end{aligned}$$

求單位荷載 1 (即均勻水壓力 $p=1000$) 作用下的拱圈徑向位移及拱頂拱端力矩、軸向力與剪力。

(1) $T/r = 5/105.5 = 0.0474$, $\phi_A = 57^\circ$, 由第一組表中查出, 當基礎絕對剛固時, 拱端的應力系數(畫成曲綫后用插補法求之)

$$\begin{aligned} m &= -2.469, 5 & {}_F M_A &= m r^2 = -27, 980 \\ h &= 1019.11 & {}_F H_A &= h r = 107, 516 \\ v &= -7.066, 8 & {}_F V_A &= v r = -745.55 \end{aligned}$$

(2) 計算基礎常數, 由基礎特性, 可求出

$$\alpha = 0.0351/E_F, \beta = 0.06204/E_F, \gamma = 0.3568/E_F, \alpha_2 = 0.0057/E_F \text{ (詳細計算從略)}$$

于是

$$M_{r\theta} = \frac{1}{\alpha - (\alpha_2)^2 / \gamma} = 28.564, 13 E_F$$

$$M_{tr} = V_{r\theta} = \frac{1}{\alpha \gamma / \alpha_2 - \alpha_2} = 0.456, 92 E_F$$

$$H_{r\theta} = \frac{1}{\beta} = 16.118, 633 E_F$$

$$V_{tr} = \frac{1}{\gamma - (\alpha_2)^2 / \alpha} = 2.809, 98 E_F$$

此外, 從第二組表中查出應力系數后即可算得拱端常數

$$\begin{aligned} m &= -0.0^+49, 44 & M_{A\theta} &= m r^2 E_C = -0.560, 13 E_G \\ h &= -0.0^+75, 84 & H_{A\theta} &= h r E_C = -0.008, 001 E_G \\ v &= -0.000, 116, 9 & V_{A\theta} &= v r E_C = -0.012, 29 E_G \\ m &= -0.000, 117, 1 & M_{Ar} &= m r E_C = -0.012, 35 E_G \\ h &= -0.000, 213, 5 & H_{Ar} &= h E_C = -0.000, 213, 5 E_G \\ v &= -0.000, 828, 8 & V_{Ar} &= v E_C = -0.000, 328, 8 E_G \\ m &= 0.0^+75, 91 & M_{As} &= m r E_G = 0.008, 009 E_G \\ h &= 0.000, 138, 7 & H_{As} &= h E_G = 0.000, 138, 7 E_G \\ v &= 0.000, 213, 5 & V_{As} &= v E_G = 0.000, 213, 5 E_G \end{aligned}$$

取拱端常數的絕對值(不計負号)代入方程式(2), 得

$$\begin{aligned} 29.124, 26 E_G \theta - 0.008, 009 E_G \Delta s - 0.443, 97 E_G \Delta r + 27, 980 &= 0 \\ 0.008, 001 E_G \theta - 16.118, 772 E_G \Delta s + 0.000, 213, 5 E_G \Delta r - 107, 516 &= 0 \\ -0.444, 03 \theta - 0.000, 213, 5 E_G \Delta s + 2.810, 309, 3 E_G \Delta r + 745.55 &= 0 \end{aligned}$$

解之,

$$\theta = -968.95/E_G$$

$$\Delta r = -418.90/E_0$$

$$\Delta s = -6,670.7/E_0$$

(3) 由第一組表中查出各点(指拱頂, 1/4 点, 1/2 点及 3/4 点)变位系数 k_1 后, 即求得当基础为绝对刚固时各点的 Δr [下表中第(1)項]; 同样, 在第二組表中分别求得当基础发生单位轉动、单位徑向变位、单位切向变位时的各点 Δr 值, 将这些值各乘以相应的基础实际变位 [即步骤(2)中所求得的 θ 、 Δr 、 Δs 值], 即得下表中的第(2)、(3)、(4)各項数值, 最后, 将第(1)、(2)、(3)、(4)項进行疊加, 即得各点在单位荷载 I 作用下的徑向变位。

		拱 頂	1/4 点	1/2 点	3/4 点	拱 端
(1)	基础为绝对刚固	$-4,448,000/E_0$	$-3,892,000/E_0$	$-2,461,000/E_0$	$-825,000/E_0$	0
(2)	基础轉动的影响	$12,740/E_0$	$8,000/E_0$	$-2,920/E_0$	$-10,440/E_0$	0
(3)	基础徑向变位的影响	$+367/E_0$	$+270/E_0$	$+16/E_0$	$-274/E_0$	$-419/E_0$
(4)	基础切向变位的影响	$-11,780/E_0$	$-10,500/E_0$	$-7,170/E_0$	$-3,020/E_0$	0
(5)	总 和	$-4,446,673/E_0$	$-3,894,230/E_0$	$-2,471,074/E_0$	$-838,734/E_0$	$-419/E_0$

采用同上的步骤即可求得拱端与拱頂的 M 、 H 、 V 如下表

		M		H		V	
		拱 頂	拱 端	拱 頂	拱 端	拱 頂	拱 端
(1)	基础为绝对刚固	12,400	-21,870	107,000	107,300	0	-639
(2)	基础轉动的影响	-137	546	14.3	8.1	0	14
(3)	基础徑向变位的影响	-3.14	5.07	0.145	0.063	0	0.166
(4)	基础切向变位的影响	32.6	-52.6	-1.50	-0.65	0	-1.72
(5)	总 和	12,292.5	-21,371.6	107,013.0	107,307.5	0	-626.5

当計算其他单位荷载时, 仅需在調換基础为绝对刚固时的 M 、 H 、 V 及 Δr 后, 作相应的补充計算, 即可得出最終結果。

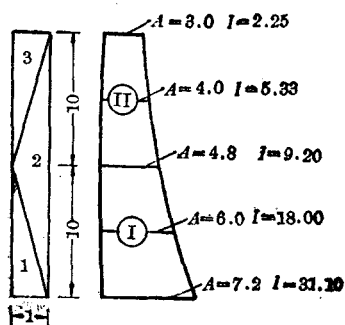


图 4

在本例题中, 由于 T/r 较小, ϕ_A 较大, 故基础变形的影响甚微; 当 T/r 较大, ϕ_A 较小时; 基础变形的影响将甚为显著。

【例二】 設某悬臂梁的断面及其单位荷载如图 4 所示, 假定 $E_c = E_f$, 基础常数 α_1 、 α_2 及 γ 同例一, 計算悬臂梁在三种单位荷载作用下的变位 ①。

(1) 根据式(12)求得

$$\text{块②: } a = \frac{1}{10} \left(-\frac{3}{4.8} + \frac{4}{6} - \frac{1}{7.2} \right) = -0.00972$$

① 例二悬臂梁計算为了便于說明方法起見, 采用了簡略的結構形式和数值, 在实际工程应力分析中, 須按結構状况及需要精度确定分段块数, 进行計算。

$$b = \frac{1}{100} \left(\frac{2}{4.8} - \frac{4}{6} + \frac{2}{7.2} \right) = 0.000278$$

$$c = \frac{1}{10} \left(-\frac{3}{9.2} + \frac{4}{18} - \frac{1}{31.1} \right) = -0.01360$$

$$d = \frac{1}{100} \left(\frac{2}{9.2} - \frac{4}{18} + \frac{2}{31.1} \right) = 0.000595$$

块②

$$a = \frac{1}{10} \left(-\frac{3}{3} + \frac{4}{4} - \frac{1}{4.8} \right) = -0.02080$$

$$b = \frac{1}{100} \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{4} + \frac{2}{4.8} \right) = 0.000833$$

$$c = \frac{1}{10} \left(-\frac{3}{2.25} + \frac{4}{5.33} - \frac{1}{9.2} \right) = -0.06920$$

$$d = \frac{1}{100} \left(\frac{2}{2.25} - \frac{4}{5.33} + \frac{2}{9.2} \right) = 0.00356$$

(2) 根据表二的公式,即可求得下表中的各项数值。

	块 I		块 II	
	$\bar{\theta}$	$\bar{\Delta r}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\Delta r}$
三角形荷载 I	$1.65/E_0$	$11.59/E_0$	$5.34/E_0$	$27.62/E_0$
三角形荷载 II	$5.45/E_0$	$33.36/E_0$	$17.82/E_0$	$82.88/E_0$
单位力矩	$0.61/E_0$	$3.66/E_0$		
单位剪力	$2.39/E_0$	$18.60/E_0$		

(3) 根据单位荷载的图形,计算下表中的荷载系数。

荷载系数 单位荷载	块 I				块 II			
	P_1	P_2	M	V	P_1	P_2	M	V
单位荷载 1	1	0	0	0	0	0	0	0
单位荷载 2	0	1	16.67	5	1	0	0	0
单位荷载 3	0	0	33.33	5	0	1	0	0

(4) 将荷载系数乘以相应的 $\bar{\theta}$ 及 $\bar{\Delta r}$ 后进行叠加,即得各分块的变位值。

单位荷载 1

	块 I		块 II	
	$\bar{\theta}$	$\bar{\Delta r}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\Delta r}$
三角形荷载 I	$1.65/E_C$	$11.59/E_C$	0	0
三角形荷载 II	0	0	0	0
块顶力矩	0	0	0	0
块顶剪力	0	0	0	0
合 计	$1.65/E_C$	$11.59/E_C$	0	0

单位荷载 2

	块 I		块 II	
	$\bar{\theta}$	$\bar{\Delta r}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\Delta r}$
三角形荷载 I	0	0	$5.34/E_C$	$27.62/E_C$
三角形荷载 II	$5.45/E_C$	$33.36/E_C$	0	0
块顶力矩	$10.08/E_C$	$61.10/E_C$	0	0
块顶剪力	$11.95/E_C$	$93.00/E_C$	0	0
合 计	$27.48/E_C$	$187.46/E_C$	$5.34/E_C$	$27.62/E_C$

单位荷载 3

	块 I		块 II	
	$\bar{\theta}$	$\bar{\Delta r}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\Delta r}$
三角形荷载 I	0	0	0	0
三角形荷载 II	0	0	$17.82/E_C$	$82.88/E_C$
块顶力矩	$20.16/E_C$	$123.20/E_C$	0	0
块顶剪力	$11.95/E_C$	$93.00/E_C$	0	0
合 计	$32.11/E_C$	$215.20/E_C$	$17.82/E_C$	$82.88/E_C$

(5) 各高程的角变位及径向变位计算:

单位荷载 1

基础高程

$$\theta_f = 16.67(0.0351/E_F) + 5(0.0057/E_F) = 0.614/E_F$$

$$\Delta r_f = 16.67(0.0057/E_F) + 5(0.3568/E_F) = 1.879/E_F$$

块 I 顶高程

$$\theta = 0.614/E_F + 1.65/E_C = 2.264/E_C$$

$$\Delta r = 1.879/E_F + 0.614/E_F \times 10 + 11.59/E_C = 19.61/E_C$$

块 II 顶高程

$$\theta = 2.264/E_C + 0 = 2.264/E_C$$

$$\Delta r = 19.61/E_C + 2.264/E_C \times 10 + 0 = 42.25/E_C$$

单位荷载 2

基础高程