紧扣新编教材

优化训练项目

对应高考题型

突出学科能力

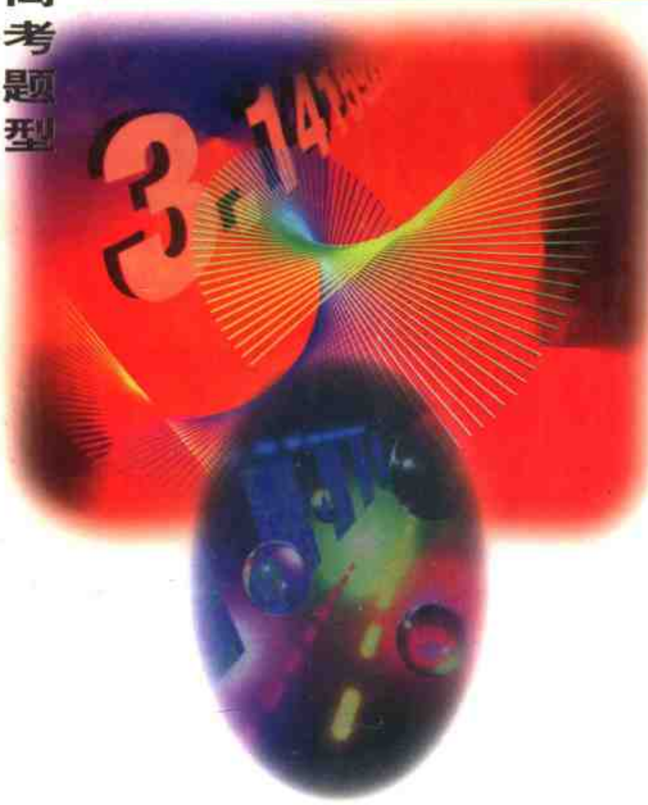
DAISHU

GAOZHONGXUEKENENGLIXUNLIANTICUI

高中学科能力训练题萃

——九省市重点中学题库联网

齐大成 编著



代数

下册

- 训练指要 纲领化
- 典题解析 标准化
- 基础训练 集约化
- 能力训练 综合化
- 综合检测 实战化

辽宁师范大学出版社

九省市重点中学题库联网

GAOZHONGXUEKENENGLIXUNLIANTICUI

编著 齐大成

高中学科能力训练题萃

代 数

下 册

辽宁师范大学出版社

高中学科能力训练题萃
代　数(下册)
齐大成　编著
辽宁师范大学出版社出版
(大连市黄河路850号　邮编:116029　电话:0411-4206854)
沈阳新华印刷厂印刷　新华书店发行

开本:787×1092毫米 1/16　字数:216千　印张:11¾
印数:20001—35000册
1997年8月第1版　1998年2月第3次印刷

责任编辑:张洋　刘文刚　责任校对:晓　庄
封面设计:冀贵收　版式设计:章　铭

ISBN 7—81042—216—2/G·121　定价:12.00元

《高中学科能力训练题萃》编委会

主　编：刘忠舜　林淑芬

编　委：谷　丹	北京市第四中学	高级教师
宁潜济	天津市第一中学	特级教师
石寅初	南京市教学研究室	高级教师
康英茂	沈阳市第五中学	特级教师
栾开亮	哈尔滨师范大学附中	特级教师
罗瑞兰	东北师范大学附中	高级教师
高体柱	辽宁师范大学附中	高级教师
李启文	辽宁省本溪市高级中学	特级教师
毛汉华	湖北省黄石市教委教研室主任	特级教师
郭国庆	山东省青岛市普教教研室	特级教师
陈庆军	山东省临沂地区教学研究室主任	特级教师

参编者：（以姓氏笔划为序）

王巧娜　王冰洁　王郁文　齐大成　刘文杰　刘忠舜
杨子玉　李玉成　张向阳　李启文　宋利刚　吴忠文
郎伟岸　赵　伟　赵雅琴　郭海根　魏向阳

前言

突出学科能力是高中新编教材和教学大纲的基本精神。为了更紧密地配合新编教材和教学大纲的改革和调整，突出学科能力的培养和训练，本书的编写不是按学年来划分，而是以学科来分类的。所谓学科能力是指根据学科特点，通过教学培养学生应具备的特有能力。这种能力不仅是认识、接受能力，更重要的是应用、探索、创造方面的能力。如何测定各有关学科的能力，经专家们近几年的研讨，现已在"考试说明"中有了明确的要求，但各学科教师怎样有针对性地组织教学，培养学生应有的学科能力，而学生在学习和复习过程中，怎样有意识地提高有关学科的能力，仍需一个较长的适应过程。为此，本书的编写不仅是必要的，也是适时的。这不仅是适应素质教育的需要，也是适应高考选拔的需要。从近几年的高考试题调整来看，突出学科特点，深入考查学科思想方法和学科语言，加大能力测试的力度仍将是今后高考命题的主导倾向。

根据上述编写主旨，本书在编写体例上突出基础训练和能力训练这两大块。在基础训练方面，凡教材中涉及到的知识点均全面练，重点知识突出练，具有集约化的特点和很强的针对性。在能力训练方面，根据教学大纲和《考试说明》关于学科能力的要求，特别是1997年国家考试中心提出的对学科能力的分类及要求，针对不同学科对学科能力的不同考查标准，进行全方位的科学训练。同时，为了最大限度地减轻学生负担，提高学习效率，本书所编选和设计的练习题不仅完全对应高考最新题型，而且典型性很强，具有较高的涵盖性、灵活性，有举一反三之效。为确保训练的科学性和系统性，本书在每单元训练之前，均有提纲挈领的指要性说明，而在训练题之前，又设有"典题解析"，即通过一些典型题的具体解析，向学生指出基本的解题思路和方法。本书的"期末测试题"则是期末模拟试卷，对学生进行实战性地综合检测。

参加本书编写的是九省市重点高中的特级教师和高级教师。这种集体编写方式，不仅汇集了各省市教学与科研的最新成果，而且在教辅读物的编写上开创了题库联网的合作方式。毫无疑问，这种方式对于提高编写质量提供了可靠的保证。但是，随着转型教育的深入，随着高考内容和形式的改革和调整，本书的内容也得随时予以调整和修订，我们期待着广大读者为我们多多提出改进意见。

刘忠舜　林淑芬

一九九七年六月十八日

目 录

第一章　不等式

一、不等式　不等式的证明

【训练指要】

1. 理解不等式的有关概念，掌握不等式的性质及其证明，并能运用这些性质解决一些简单问题. 对于不等式的性质，关键是正确的理解和运用，对不等式的每一条性质，要弄清条件和结论.

(1)不等式的基本性质：$a-b>0\Leftrightarrow a>b$；$a-b=0\Leftrightarrow a=b$；$a-b<0\Leftrightarrow a<b$. 这三条基本性质是差值比较法的理论依据.

(2)不等式的性质，包括"单向性"和"双向性". 如：$a>b,b>c\Rightarrow a>c$；　$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$；　$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$；　$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$；　$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$；　$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{R}^+)$；　$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$. 均具有单向性，而 $a-b>0\Leftrightarrow a>b$；　$a-b=0\Leftrightarrow a=b$；$a-b<0\Leftrightarrow a<b$；　$a>b\Leftrightarrow b<a$；　$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$. 则具有双向性.

2. 掌握两个或三个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数这一定理及其推论，并能运用它们解决一些问题.

(1)两个重要不等式的等价变换及其引伸：

$$a^2+b^2\geqslant 2ab(a,b\in\mathbf{R})\Leftrightarrow ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}(a,b\in\mathbf{R})$$

$$a^2+b^2\geqslant 2ab(a,b\in\mathbf{R})\Rightarrow\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a,b\in\mathbf{R}^+)$$

$$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc(a,b,c\in\mathbf{R}^+)\Leftrightarrow abc\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\leqslant\frac{a^3+b^3+c^3}{3}(a,b,c\in\mathbf{R}^+)$$

$$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc(a,b,c\in\mathbf{R}^+)\Rightarrow\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$$

(2)在应用均值不等式时，尤其要注意"正数"和使等号成立的条件.

3. 掌握证明不等式的几种常用方法. 它们是比较法、综合法、分析法、反证法和数学归纳法.

【典题解析】

例 1　设命题甲为：$\begin{cases}2<x+y<4\\0<xy<3\end{cases}$；　命题乙为：$\begin{cases}0<x<1\\2<y<3\end{cases}$，那么(　　)

A. 甲是乙的充分不必要条件.

B. 甲是乙的必要不充分条件.

C. 甲是乙的充要条件.

D. 甲不是乙的充分条件，也不是乙的必要条件.

解：由$\begin{cases}0<x<1\\2<y<3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2<x+y<4\\0<xy<3\end{cases}$，所以甲是乙的必要条件，取 $x=1,y=2$，有$\begin{cases}2<x+y<4\\0<xy<3\end{cases}$，但$\begin{cases}0<x<1\\2<y<3\end{cases}$不能成立，所以甲不是乙的充分条件. 因此 B 是正确的.

例 2 比较下列各对式子的大小：

(1)$1+\log_x 3$ 与 $2\log_x 2(x>0,x\neq1)$

(2)$a^a b^b$ 与 $a^b b^a$(a,b 为不相等正数)

解：(1)$(1+\log_x 3)-2\log_x 2=\log_x\dfrac{3x}{4}$

当$\begin{cases}0<x<1\\0<\dfrac{3x}{4}<1\end{cases}\Rightarrow 0<x<1$ 或当$\begin{cases}x>1\\\dfrac{3x}{4}>1\end{cases}\Rightarrow x>\dfrac{4}{3}$时，有 $\log_x\dfrac{3x}{4}>0$

即 $1+\log_x 3>2\log_x 2$.

当$\begin{cases}0<x<1\\\dfrac{3}{4}x>1\end{cases}$或$\begin{cases}x>1\\0<\dfrac{3}{4}x<1\end{cases}\Rightarrow 1<x<\dfrac{4}{3}$时，$\log_x\dfrac{3x}{4}<0$，即 $1+\log_x 3<2\log_x 2$

当$\dfrac{3}{4}x=1\Rightarrow x=\dfrac{4}{3}$时，$\log_x\dfrac{3}{4}x=0$，即 $1+\log_x 3=2\log_x 2$

综上所述：当 $0<x<1$ 或 $x>\dfrac{4}{3}$时，$1+\log_x 3>2\log_x 2$

当 $1<x<\dfrac{4}{3}$时，$1+\log_x 3<2\log_x 2$

当 $x=\dfrac{4}{3}$时，$1+\log_x 3=2\log_x 2$

(2)$\dfrac{a^a b^b}{a^b b^a}=a^{a-b}b^{b-a}=(\dfrac{a}{b})^{a-b}$

当 $a>b>0$ 时，$\dfrac{a}{b}>1$，$a-b>0$ $\therefore(\dfrac{a}{b})^{a-b}>1$

当 $0<a<b$ 时，$\dfrac{a}{b}<1$，$a-b<0$ $\therefore(\dfrac{a}{b})^{a-b}>1$

综上有 $a^a b^b>a^b b^a$.

评析：例 1 说明在应用不等式的性质时，必须注意不等式性质的"单向性"和"双向性"，例 2 说明在比较两式(数)的大小时，最常用的方法是差值比较法和比值比较法. 而比值比较法就是利用当$\dfrac{a}{b}>1$，且 $b>0\Leftrightarrow a>b$ 来解决的.

例 3 已知 $f(x)=ax^2-c$，且$-4\leqslant f(1)\leqslant-1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant5$，求 $f(3)$的最大值和最小值.

解：$\because\begin{cases}a-c=f(1)\\4a-c=f(2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}[f(2)-f(1)]\\-c=\dfrac{4}{3}f(1)-\dfrac{1}{3}f(2)\end{cases}$

$\therefore f(3)=9a-c=\dfrac{8}{3}f(2)-\dfrac{5}{3}f(1)$ $\because -1\leqslant f(2)\leqslant5$ $\therefore-\dfrac{8}{3}\leqslant\dfrac{8}{3}f(2)\leqslant\dfrac{40}{3}$

$\because-4\leqslant f(1)\leqslant-1$ $\therefore\dfrac{5}{3}\leqslant-\dfrac{5}{3}f(1)\leqslant\dfrac{20}{3}$

$\therefore-1\leqslant\dfrac{8}{3}f(2)-\dfrac{5}{3}f(1)\leqslant20$， 即 $f(3)_{\max}=20$，$f(3)_{\min}=-1$.

评析:解此类问题常见的错误是:由题设可得$-4\leqslant a-c\leqslant -1$,$-1\leqslant 4a-c\leqslant 5$,消元可得$0\leqslant a\leqslant 3$,$1\leqslant c\leqslant 7$,于是有$-7\leqslant f(3)=9a-c\leqslant 26$,所以$f(3)_{\max}=26$,$f(3)_{\min}=-7$. 其错误原因是$\begin{cases}-4\leqslant a-c\leqslant -1\\ -1\leqslant 4a-c\leqslant 5\end{cases}$与$\begin{cases}0\leqslant a\leqslant 3\\ 1\leqslant c\leqslant 7\end{cases}$并非等价.

例 4　下面每组的四个结论中,有几个是正确的?说明理由.

$$(1)\ a<b<0\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b} & ①\\ |a|>|b| & ②\\ a^2>b^2 & ③\\ \sqrt{-a}<\sqrt{-b} & ④\end{cases}\qquad (2)\begin{cases}a>b\\ c>d\\ cd\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-c>b-d & ①\\ \dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d} & ②\\ c-b>d-a & ③\\ ac>bd & ④\end{cases}$$

解:(1)$\because a<b<0$　$\therefore -a>-b>0$　$\therefore -\dfrac{1}{a}<-\dfrac{1}{b}$　$\therefore \dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$,则①成立.

由绝对值定义知,较小的负数的绝对值较大,则②成立.

又$|a|>|b|\Leftrightarrow a^2>b^2$　则③成立.

$\because -a>-b>0$　$\therefore \sqrt{-a}>\sqrt{-b}$,则④不成立.

(2)用$a=5,b=3,c=4,d=1$(满足条件$a>b,c>d,cd\neq 0$)验算知①②均不成立.

用$a=-2,b=-3,c=2,d=1$(满足条件$a>b,c>d,cd\neq 0$)验算知④亦不成立.

$$\because\begin{cases}a>b\\ c>d\\ cd\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-b>-a\\ c>d\\ cd\neq 0\end{cases}\Rightarrow c-b>d-a,\text{则③成立.}$$

评析:要否定一个命题,只需举出一例,用一组满足条件的特殊值进行验证即可. 而要肯定一个命题,则需进行严密的逻辑证明.

例 5　实数a,b,c,d满足条件:

$$\begin{cases}d>c & ①\\ a+b=c+d & ②\\ a+d<b+c & ③\end{cases}$$

$a<b$

试将a,b,c,d按照从小到大的次序排列起来,并加以证明.

解:$a+d<b+c\Rightarrow d-b<c-a=b-d\Rightarrow d<b$　　④

由②④得　$a<c$　　⑤

由①④⑤得　$a<c<d<b$.

评析:四个实数比较大小,需找到一个合理的程序,则可减少解题的层次. 在这里②是一个尤其应注意的条件.

例 6　已知$x>a$,求证:$x^3+13a^2x>5ax^2+9a^3$.

证明:$\because x>a$,$\therefore x-a>0$

$$\begin{aligned}x^3+13a^2x-5ax^2-9a^3&=x^3-ax^2-4ax^2+4a^2x+9a^2x-9a^3\\&=x^2(x-a)-4ax(x-a)+9a^2(x-a)\\&=(x-a)(x^2-4ax+9a^2)\\&=(x-a)[(x-2a)^2+5a^2]>0\end{aligned}$$

$\therefore x^3+13a^2x>5ax^2+9a^3$.

例 7　设$a,b\in\mathbf{R}^+,n\in\mathbf{N}$,求证:$(a+b)(a^n+b^n)\leqslant 2(a^{n+1}+b^{n+1})$.

证明:$(a+b)(a^n+b^n)-2(a^{n+1}+b^{n+1})=a^{n+1}+ab^n+ba^n+b^{n+1}-2a^{n+1}-2b^{n+1}$

$=ab^n+ba^n-a^{n+1}-b^{n+1}=a^n(b-a)+b^n(a-b)=(b-a)(a^n-b^n)$

当 $a=b$ 时，$(b-a)(a^n-b^n)=0$

当 $a>b>0$ 时，$(b-a)<0$，而 $a^n-b^n>0$ $\quad\therefore(b-a)(a^n-b^n)<0$

当 $b>a>0$ 时，$(b-a)>0$，而 $a^n-b^n<0$ $\quad\therefore(b-a)(a^n-b^n)<0$

综上所述，有 $(a+b)(a^n+b^n)-2(a^{n+1}+b^{n+1})\leqslant 0$.

$\therefore(a+b)(a^n+b^n)\leqslant 2(a^{n+1}+b^{n+1})$.

例 8 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，求证：$a^ab^bc^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

证明：不失一般性，设 $a\geqslant b\geqslant c>0$，则 $a-b\geqslant 0,b-c\geqslant 0,a-c\geqslant 0,\frac{a}{b}\geqslant 1,\frac{b}{c}\geqslant 1,\frac{a}{c}\geqslant 1$.

$$\frac{a^ab^bc^c}{(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}}=a^{a-\frac{a+b+c}{3}}b^{b-\frac{a+b+c}{3}}c^{c-\frac{a+b+c}{3}}=a^{\frac{2a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{c}{3}}b^{\frac{2b}{3}-\frac{a}{3}-\frac{c}{3}}c^{\frac{2c}{3}-\frac{a}{3}-\frac{b}{3}}$$

$$=(\frac{a}{b})^{\frac{a-b}{3}}(\frac{b}{c})^{\frac{b-c}{3}}(\frac{a}{c})^{\frac{a-c}{3}}>1 \quad \therefore a^ab^bc^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$$

评析：以上三例采用的是比较法. 在利用差值比较法时，通常在做差之后，通过因式分解的办法，将整体符号的判断转化为各个因式符号的判断，有时也通过配方利用非负数的概念或函数的单调性的性质判断各个因式的符号. 而当不等式的两边都是幂的形式时，可采用比值比较法.

例 9 求证：$a^4+b^4+c^4\geqslant abc(a+b+c)$

证明：$a^4+b^4\geqslant 2a^2b^2,b^4+c^4\geqslant 2b^2c^2,c^4+a^4\geqslant 2a^2c^2$

$\therefore a^4+b^4+c^4\geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

而 $a^2b^2+b^2c^2\geqslant 2ab^2c,b^2c^2+c^2a^2\geqslant 2abc^2,c^2a^2+a^2b^2\geqslant 2a^2bc$

$\therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant ab^2c+abc^2+a^2bc=abc(a+b+c)$

$\therefore a^4+b^4+c^4\geqslant abc(a+b+c)$

评析：此题的证明是从基本不等式出发，推出要证明的不等式，这种方法叫做综合法.

例 10 已知 $a>2$，求证：$\log_a(a-1)\cdot\log_a(a+1)<1$

证明：$\because a>2$，$\therefore\log_a(a-1)>0,\log_a(a+1)>0$，且 $\log_a(a-1)\neq\log_a(a+1)$

$$\therefore\sqrt{\log_a(a-1)\log_a(a+1)}<\frac{1}{2}[\log_a(a-1)+\log_a(a+1)]$$

$$=\frac{1}{2}\log_a(a-1)(a+1)=\frac{1}{2}\log_a(a^2-1)<\frac{1}{2}\log_aa^2=1$$

$\therefore\log_a(a-1)\log_a(a+1)<1$.

评析：在不等式的证明过程中，“放”和“缩”是常用的证题技巧，“放”和“缩”的方向与“放”和“缩”的量的大小，都应经分析而得出. 本题从结论的要求分析，有如下的推理过程：

若要证明 $\log_a(a-1)\log_a(a+1)<1$，只需证明 $\sqrt{\log_a(a-1)\log_a(a+1)}<1$，即 $\frac{1}{2}\log_a(a^2-1)<1$，即 $\log_a(a^2-1)<2$. 而 $2=\log_aa^2$，只需证明 $\log_a(a^2-1)<\log_aa^2$ 成立，这样证明中“放”的方法就成为必然了.

例 11 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\sqrt{3\cdot 4}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$.

求证：$\frac{n(n+1)}{2}<a_n<\frac{(n+1)^2}{2}$.

证明：由于 $\sqrt{n(n+1)}>\sqrt{n^2}=n$

$\therefore \sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\sqrt{3\cdot 4}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}>1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

即：$a_n>\frac{n(n+1)}{2}$.

又由于 $\sqrt{n(n+1)}<\frac{n+(n+1)}{2}=\frac{2n+1}{2}$,

$\therefore \sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\sqrt{3\cdot 4}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}<\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\cdots+\frac{2n+1}{2}$

$<\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\cdots+\frac{2n+1}{2}=\frac{1}{2}[1+3+5+\cdots+(2n+1)]=\frac{(n+1)^2}{2}$

即 $a_n<\frac{(n+1)^2}{2}$，综上结果有$\frac{n(n+1)}{2}<a_n<\frac{(n+1)^2}{2}$.

评析：平均值定理可以作为不等关系“放”和“缩”的工具. 对形如“$A+B(A>0,B>0)$”的式子，容易想到“缩”为“$2\sqrt{AB}$”的式子，而“$A\cdot B(A>0,B>0)$”的式子，则容易想到“放”为“$\frac{A+B}{2}$”的式子. 在证明过程中，注意分析题目的结构特征，合理恰当的选择公式，是一项重要的能力.

例 12　已知 $a>b>0$，求证：$\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}$.

证明：$\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}\Leftarrow\frac{(a-b)^2}{4a}<a+b-2\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{4b}$

$\Leftarrow(\frac{a-b}{2\sqrt{a}})^2<(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<(\frac{a-b}{2\sqrt{b}})^2\Leftarrow 0<\frac{a-b}{2\sqrt{a}}<\sqrt{a}-\sqrt{b}<\frac{a-b}{2\sqrt{b}}$

$\Leftarrow\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}<1<\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{b}}$

$\Leftarrow 1+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}<2<1+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$\Leftarrow\sqrt{\frac{b}{a}}<1<\sqrt{\frac{a}{b}}\Leftarrow\frac{b}{a}<1<\frac{a}{b}$

由于 $a>b>0$，故最后不等式是成立的，所以有$\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}$.

评析：此题的证明方法是分析法. 分析法是从求证的不等式出发，分析使这个不等式成立的条件，只要使不等式成立的条件已具备，就断定原不等式成立. 使用分析法时，要保证“后一步”是“前一步”的充分条件，通常采用“欲证……只需……已知”的格式，分析法的思路是“执果索因”. 而“综合法”的证明，是要保证“后一步”是“前一步”成立的必要条件，其思路是“由因导果”，也就是从已知的不等式出发，不断地用必要条件代替前面的不等式，直至推导出欲证的不等式.

在不等式的证明过程中，表述时常用“$\Rightarrow$”“$\Leftarrow$”的符号，这里要注意箭头的方向，用分析法时，一般用“$\Leftarrow$”，用综合法时，一般用“$\Rightarrow$”.

例 13　已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$，求证：$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

证明：$\because a,b\in\mathbf{R}^+$，$\therefore\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}\Leftarrow(\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}})^2\geqslant(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$\Leftarrow\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geqslant a+b\Leftarrow a^3+b^3\geqslant ab(a+b)\Leftarrow a^2-ab+b^2\geqslant ab\Leftarrow(a-b)^2\geqslant 0$,

而$(a-b)^2\geqslant 0$成立，所以$\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$成立.

例 14 已知$|a|<1,|b|<1$,求证:$\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1$.

证明:$\begin{cases}|a|<1\\|b|<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2<1\\b^2<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1-a^2>0\\1-b^2>0\end{cases}\Rightarrow(1-a^2)(1-b^2)>0$

而$\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1\Leftarrow|a+b|<|1+ab|\Leftarrow a^2+2ab+b^2<1+a^2b^2+2ab\Leftarrow(1-a^2)(1-b^2)>0$

由上知，$\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1$成立.

例 15 已知a,b,c是不全相等的正数，求证:$\lg\dfrac{a+b}{2}+\lg\dfrac{b+c}{2}+\lg\dfrac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c$

证明:$\lg\dfrac{a+b}{2}+\lg\dfrac{b+c}{2}+\lg\dfrac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c\Leftarrow\lg(\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{b+c}{2}\cdot\dfrac{c+a}{2})>\lg abc$

$\Leftarrow\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{b+c}{2}\cdot\dfrac{c+a}{2}>abc$, 又$\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>0,\dfrac{b+c}{2}>\sqrt{bc}>0,\dfrac{c+a}{2}>\sqrt{ca}>0$

$\Rightarrow\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{b+c}{2}\cdot\dfrac{c+a}{2}>abc$,由上知，$\lg\dfrac{a+b}{2}+\lg\dfrac{b+c}{2}+\lg\dfrac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c$成立.

评析:以上两例采用的是"分析——综合"法，分析法与综合法结合使用，使问题更易解决，我们应很好体会，灵活运用.

例 16 已知a,b,c都是小于1的正数，求证$(1-a)b,(1-b)c,(1-c)a$不能同时大于$\dfrac{1}{4}$.

证明:假设$(1-a)b,(1-b)c,(1-c)a$都大于$\dfrac{1}{4}$,由条件知 $1-a>0,1-b>0,1-c>0$

$$\therefore\begin{cases}\dfrac{(1-a)+b}{2}\geqslant\sqrt{(1-a)b}>\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}\\\dfrac{(1-b)+c}{2}\geqslant\sqrt{(1-b)c}>\dfrac{1}{2}\\\dfrac{(1-c)+a}{2}\geqslant\sqrt{(1-c)a}>\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{(1-a)+b}{2}+\dfrac{(1-b)+c}{2}+\dfrac{(1-c)+a}{2}>\dfrac{3}{2}$$

$\Rightarrow\dfrac{3}{2}>\dfrac{3}{2}$ 这是不可能的，所以命题得证.

评析:此题证明运用的是反证法. 对于否定性命题，唯一性命题常用反证法予以证明.

例 17 已知$a>b>c$,求证:$\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}>0$.

证明:令$a=b+t,b=c+u(t,u>0)$,

于是$\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}=\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{t+u}=\dfrac{u(t+u)+t(t+u)-tu}{tu(t+u)}=\dfrac{t^2+tu+u^2}{tu(t+u)}>0$

评析:此题证明采用的是增量法. 如果某些不等式问题中的已知条件中存在着若干个实数，那么，可以将各个较大的实数表示成其中最小的数(或较小的数)加上某个非负的差数，然后代人有关式子中进行验证. 我们把最小的数(或较小的数)视为基本量，差数视为增量. 因此，这种方法称为增量法.

例 18 已知$a+b=1,(a,b\in\mathbf{R}^+)$,求证:(1)$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{ab}\geqslant 8$; (2)$(a+\dfrac{1}{a})(b+\dfrac{1}{b})\geqslant\dfrac{25}{4}$.

证明:(1)证法1(比较法) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{ab}-8=1+\dfrac{b}{a}+1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}-8$

$=4+2(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})-8=2(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})-4=2(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2)=2\frac{(a-b)^2}{ab}\geqslant 0$,

故原不等式成立.

证法 2(综合法) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}=4+2(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})\geqslant 4+4=8$

或者 $\because a+b=1 \quad \therefore ab\leqslant\frac{1}{4}$, $\frac{1}{ab}\geqslant 4$,

则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}=(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})+\frac{1}{ab}\geqslant 4+4=8$.

证法 3(分析法) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}\geqslant 8\Leftarrow\frac{a+b+1}{ab}\geqslant 8\Leftarrow\frac{1}{ab}\geqslant 4\Leftarrow\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}-4\geqslant 0$

$\Leftarrow\frac{(a-b)^2}{ab}\geqslant 0$,此式恒成立,故原不等式成立.

证法 4(增量法) 设 $a=\frac{1}{2}+u, b=\frac{1}{2}-u \quad (0\leqslant u<\frac{1}{2})$

$$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}=\frac{2}{1+2u}+\frac{2}{1-2u}+\frac{4}{(1+2u)(1-2u)}=\frac{2(1-2u)+2(1+2u)+4}{(1+2u)(1-2u)}$$

$$=\frac{8}{(1+2u)(1-2u)}=\frac{8}{1-4u^2},$$

又 $0\leqslant u<\frac{1}{2} \quad \therefore 0\leqslant u^2<\frac{1}{4} \quad \therefore 0\leqslant 4u^2<1 \quad \therefore 0<1-4u^2\leqslant 1$,

故 $\frac{8}{1-4u^2}\geqslant 8$, $\therefore$ 原不等式成立。

证法 5(换元法) $\because a+b=1 \quad (a,b\in\mathbf{R}^+)$, 设 $a=\cos^2\theta$, $b=\sin^2\theta$, $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$

则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}=4+2(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})=4+2(\mathrm{tg}^2\theta+\mathrm{ctg}^2\theta)\geqslant 4+4=8$,

故原不等式成立.

(2)证法 1(比较法) $\because \quad a+b=1,(a,b\in\mathbf{R}^+) \quad \therefore ab\leqslant\frac{1}{4}$

而 $(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})-\frac{25}{4}=\frac{a^2+1}{a}\cdot\frac{b^2+1}{b}-\frac{25}{4}=\frac{4a^2b^2-33ab+8}{4ab}$

$=\frac{(1-4ab)(8-ab)}{4ab}\geqslant 0$,所以 $(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geqslant\frac{25}{4}$

证法 2(综合法) 由上知 $ab\leqslant\frac{1}{4} \quad \therefore 1-ab\geqslant\frac{3}{4} \quad \therefore (1-ab)^2\geqslant\frac{9}{16}$

$$\therefore \begin{cases}(1-ab)^2+1\geqslant\frac{25}{16}\\ \frac{1}{ab}\geqslant 4\end{cases} \quad \therefore \frac{(1-ab)^2+1}{ab}\geqslant\frac{25}{4} \quad \therefore (a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geqslant\frac{25}{4}$$

证法 3(分析法) $(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geqslant\frac{25}{4}\Leftarrow\frac{4a^2b^2-33ab+8}{4ab}\geqslant 0\Leftarrow(4ab-1)(ab-8)\geqslant 0$

$\because a+b=1(a,b\in\mathbf{R}^+) \quad \therefore ab\leqslant\frac{1}{4} \quad \therefore 4ab-1\leqslant 0, ab-8<0$,

则恒有 $(4ab-1)(ab-8)\geqslant 0$,故原不等式成立.

证法 4(增量法) 设 $a=\frac{1}{2}+u, b=\frac{1}{2}-u \quad (0\leqslant u<\frac{1}{2})$

$$则(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=(\frac{1+2u}{2}+\frac{2}{1+2u})(\frac{1-2u}{2}+\frac{2}{1-2u})=\frac{u^4+\frac{3}{2}u^2+\frac{25}{16}}{\frac{1}{4}-u^2}\geqslant\frac{25}{4}$$

证法 5(换元法) 设 $a=\cos^2\alpha,b=\sin^2\alpha\quad \alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$

$$则(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=(\cos^2\alpha+\frac{1}{\cos^2\alpha})(\sin^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha})=\frac{\sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+2}{\sin^2 2\alpha/4}$$

$$=\frac{(4-\sin^2 2\alpha)^2+16}{4\sin^2 2\alpha},$$

又 $\sin^2 2\alpha\leqslant 1\quad\therefore 4-\sin^2 2\alpha\geqslant 3$,又 $\frac{1}{4\sin^2 2\alpha}\geqslant\frac{1}{4}$,

则 $\frac{(4-\sin^2 2\alpha)^2+16}{4\sin^2 2\alpha}\geqslant\frac{25}{4}$,故有 $(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geqslant\frac{25}{4}$

评析:不等式的证明,由于题型多变,结构复杂,证明的方法多样,技巧性强,无固定的程序可循,因而常有一定的难度,解决这个困难的关键在于深刻理解不等式证明中常用的数学思想方法,熟练掌握不等式性质和一些基本不等式,灵活应用常用的证题方法.不等式的性质是证明不等式的理论基础,恒等变形和等价变换是证明不等式的基本功,重要不等式的积累是缩短证题过程的法宝.

例 19 若 $\alpha,\beta\in\mathbf{R},c\in\mathbf{R}^+$,求证:$|\alpha+\beta|^2\leqslant(1+c)|\alpha|^2+(1+\frac{1}{c})|\beta|^2$.

证明:右式 $=|\alpha|^2+|\beta|^2+c|\alpha|^2+\frac{1}{c}|\beta|^2\geqslant|\alpha|^2+|\beta|^2+2\sqrt{c}|\alpha|\frac{1}{\sqrt{c}}|\beta|$

$$=|\alpha|^2+|\beta|^2+2|\alpha||\beta|=(|\alpha|+|\beta|)^2\geqslant|\alpha+\beta|^2$$

评析:绝对值不等式的证明要注意正确的使用公式.

例 20 求函数 $y=\log_2 x+\log_x 2x$ 的值域.

解:原解析式可化为 $y=\log_2 x+\log_x 2+1$. 由条件知:$x>0$ 且 $x\neq 1$.

当 $x>1$ 时,$y=\log_2 x+\frac{1}{\log_2 x}+1\geqslant 3$

当 $0<x<1$ 时,$-(\log_2 x+\frac{1}{\log_2 x})\geqslant 2\quad\therefore y=\log_2 x+\frac{1}{\log_2 x}+1\leqslant -1$

所以,函数的值域为 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty]$.

评析:利用均值不等式求函数的值域是常用的办法.本题的关键是利用换底公式化为同底.

例 21 求下列函数的最值:

(1) $y=x^3+\frac{1}{x}(x>0)$ 的最小值; (2) 当 $0<x<3$,$y=x^2(3-x)$ 的最大值.

解:(1) $y=x^3+\frac{1}{x}=x^3+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x}$. $\because x>0,\therefore x^3,\frac{1}{3x}$ 均大于 0.

$$\therefore y=x^3+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x}\geqslant 4\sqrt[4]{x^3\cdot\frac{1}{3x}\cdot\frac{1}{3x}\cdot\frac{1}{3x}}=4\sqrt[4]{\frac{1}{27}}=4\times 3^{-\frac{3}{4}}$$

此时 $x^3=\frac{1}{3x}$,得 $x=\sqrt[4]{\frac{1}{3}}=3^{-\frac{1}{4}}$. $\therefore$ 当 $x=3^{-\frac{1}{4}}$ 时,y 的最小值为 $4\times 3^{-\frac{3}{4}}$.

(2) $\because 0<x<3\quad\therefore 3-x>0,\frac{x}{2}>0$

$\therefore y=x^2(3-x)=4\,\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}(3-x)\leqslant 4\left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+(3-x)}{3}\right)^3=4$

此时，$\frac{x}{2}=(3-x)$，得 $x=2\in(0,3)$. $\therefore$ 当 $x=2$ 时，y 的最大值为 4.

评析：我们知，诸正数和为定值时，积有最大值，而积为定值时，和有最小值. 其保证条件是当诸正数相等时. 因此，在解题过程中，必须进行合理的拆分，满足均值不等式成立的条件. 如(1)中将$\frac{1}{x}$拆分为$\frac{1}{x}=\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x}+\frac{2}{4x}$形式，虽然积还是定值，但等号不能成立.

例 22　如图 1-1，已知圆锥的底面半径为 R，高为 H，在其中有一个高为 x，下底面半径与上底面半径之比为 $k(0<k<1)$ 的内接圆台，试问当 x 为何值时，圆台的体积最大？

解：设内接圆台的上底面半径为 r，则下底面半径为 kr，由平面几何知识，得 $r=R(1-\frac{x}{H})$，则圆台体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi x(r^2+r\cdot kr+k^2r^2)=\frac{1}{3}\pi xr^2(1+k+k^2)$$
$$=\frac{1}{3}\pi xR^2(1-\frac{x}{H})^2(1+k+k^2)$$
$$=\frac{1}{6}\pi R^2H(1+k+k^2)\cdot\frac{2x}{H}(1-\frac{x}{H})^2$$

由 $0<\frac{x}{H}<1$，得 $1-\frac{x}{H}>0$，$\frac{2x}{H}+(1-\frac{x}{H})+(1-\frac{x}{H})=2$ 为定值

$\therefore$ 当$\frac{2x}{H}=1-\frac{x}{H}=\frac{2}{3}$时，即 $x=\frac{H}{3}$时，$\frac{2x}{H}(1-\frac{x}{H})^2$ 取得最大值为$\frac{8}{27}$. 所以，当 $x=\frac{H}{3}$时，$V_{\max}=\frac{4}{81}\pi R^2H(1+k+k^2)$.

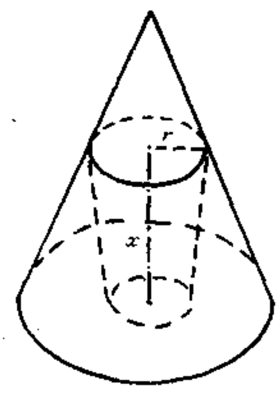


图 1-1

评析：这是一道求几何体的体积的最值问题，利用均值不等式来解决数学应用题中最值问题是普遍适用的数学方法. 其关键是对实际问题，通过分析，联想，转化，抽象建立数学模型.

例 23　一轮船在一定的距离内航行，它的耗油量与其速度的平方成正比，当轮船每小时行 S 海里时，它的耗油量价值为 m 元，又设此船每行一小时除耗油费用外，其它消耗为 n 元，试求此船最经济的行船速度($S,m,n\in\mathbf{R}^+$，且为常量).

解：设最经济的航速为 x 海里/小时，按此速度在距离为 l 的 A，B 两地间航行总耗费为 y 元.

依题意，设油耗为 y_1，则 $y_1=kx^2$，设除油耗外其它消耗为 y_2，则 $y_2=n\cdot l/x$，而当 $x=S$ 时，$y_1=m$，故 $m=kS^2$.　$\therefore k=\frac{m}{S^2}$，$\therefore y_1=x^2m/S^2$.

所以 $y=y_1+y_2=\frac{m}{S^2}x^2+\frac{nl}{x}=\frac{m}{S^2}x^2+\frac{nl}{2x}+\frac{nl}{2x}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{mn^2l^2}{4S^2}}$

当$\frac{mx^2}{S^2}=\frac{nl}{2x}$时，即 $x=\sqrt[3]{\frac{nlS^2}{2m}}$时，$y_{\min}=3\sqrt[3]{\frac{mn^2l^2}{4S^2}}$. 所以，最经济的行船速度为$\sqrt[3]{\frac{nlS^2}{2m}}$.

【基础训练】

一、选择题

1. 以下四个命题中正确命题的个数是(　　　)

①$a>b\Rightarrow|a|>b$　　②$a>b\Rightarrow a^2>b^2$　　③$|a|>b\Rightarrow a>b$　　④$a>|b|\Rightarrow a>b$

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

2. 若 $a>0>b,0>c>d$,则下列不等式中不成立的是(　　)

A. $ac>bd$　　B. $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$　　C. $a+c>b+d$　　D. $a-d>b-c$

3. 若 $a<b<0$,则下列不等式中不成立的是(　　)

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. $\frac{1}{a-b}<\frac{1}{a}$　　C. $|a|>|b|$　　D. $a^2>b^2$

4. 若 $ac>bd$,且 $a>b>0$,则有(　　)

A. $c>d$　　B. $c>d>0$　　C. $c<d$　　D. c,d 大小关系不定

5. 若 $a>b$,则下列不等式一定成立的是(　　)

A. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B. $\frac{b}{a}<1$　　C. $2^a>2^b$　　D. $\lg(a-b)>0$

6. 已知 $0<b<a<\frac{1}{4}$,则 $\sqrt{a-b},a-b,\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 的大小顺序是(　　)

A. $\sqrt{a-b}>a-b>\sqrt{a}-\sqrt{b}$　　B. $\sqrt{a}-\sqrt{b}>\sqrt{a-b}>a-b$

C. $\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}>a-b$　　D. $a-b>\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$

7. lg9·lg11 与 1 的大小关系是(　　)

A. lg9·lg11>1　　B. lg9·lg11=1　　C. lg9·lg11<1　　D. 不能确定

8. $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,则一定有(　　)

A. $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}>3$　B. $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geqslant3$　C. $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}<3$　D. $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\leqslant3$

9. 设 a_1,a_2,b_1,b_2 都是实数,则有(　　)

A. $(a_1b_1+a_2b_2)^2>(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$　　B. $(a_1b_1+a_2b_2)^2\geqslant(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$

C. $(a_1b_1+a_2b_2)^2<(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$　　D. $(a_1b_1+a_2b_2)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$

10. 已知 x,y 为非零实数,下列不等式恒成立的是(　　)

A. $\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$　　B. $(\frac{x+y}{2})^2\geqslant xy$　　C. $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant2$　　D. $|x+y|>|x-y|$

11. 设实数 x,y,m,n 满足 $x^2+y^2=1,m^2+n^2=3$,那么 $mx+ny$ 的最大值是(　　)

A. 2　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

12. 设 $0<a<b,a+b=1$,则下列四数中最大的是(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. b　　C. $2ab$　　D. a^2+b^2

13. 已知 $a>b>0$,则下列不等式成立的是(　　)

A. $a>b>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$　　B. $a>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>b$

C. $a>\frac{a+b}{2}>b>\sqrt{ab}$　　D. $a>\sqrt{ab}>\frac{a+b}{2}>b$

14. 若 $\log_2x=\log_3y=\log_5z<0$,则 $x^{\frac{1}{2}},y^{\frac{1}{3}},z^{\frac{1}{5}}$ 之间的大小关系是(　　)

A. $y^{\frac{1}{3}}<x^{\frac{1}{2}}<z^{\frac{1}{5}}$　　B. $x^{\frac{1}{2}}<y^{\frac{1}{3}}<z^{\frac{1}{5}}$　　C. $z^{\frac{1}{5}}<y^{\frac{1}{3}}<x^{\frac{1}{2}}$　　D. $x^{\frac{1}{2}}<z^{\frac{1}{5}}<y^{\frac{1}{3}}$

15. “$a+b>2$”且“$ab>1$”是“$a>1,b>1$”成立的(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

16. 若$|a+b|=|a|+|b|$成立，$a,b\in\mathbf{R}$，则有（　　）

A. $ab<0$　　B. $ab>0$　　C. $ab\geqslant 0$　　D. 以上都不对

17. 若$x,y\in\mathbf{R}$，且$xy<0$，则有（　　）

A. $|x+y|>|x-y|$　　B. $|x+y|<|x|-|y|$

C. $|x+y|<|x-y|$　　D. $|x-y|<|x|+|y|$

18. 已知$h>0$，设命题甲为：两个实数a,b满足$|a-b|<2h$；命题乙为：两个实数a,b满足$|a-1|<h$且$|b-1|<h$，那么（　　）

A. 甲是乙的充分但不必要条件　　B. 甲是乙的必要但不充分条件

C. 甲是乙的充分且必要条件　　D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

19. 将一半径为R的木球加工成一正方体木块，则木块的最大体积为（　　）

A. $\frac{8}{27}\sqrt{3}R^3$　　B. $\frac{8}{9}\sqrt{3}R^3$　　C. $\frac{8}{9}R^3$　　D. $\frac{3}{8}\sqrt{3}R^3$

二、填空题

1. 设$a>b>0$，$m>0$，$n>0$，则$\frac{b}{a}$，$\frac{a}{b}$，$\frac{b+m}{a+m}$，$\frac{a+n}{b+n}$之间的大小顺序是________.

2. 若$a>0$，且$a\neq 1$，$x,y\in\mathbf{N}$，则$1+a^{x+y}$与a^x+a^y的大小关系为________.

3. 设$60<a<84$，$28<b<33$，则$a+b$所在的区间为________. $a-b$所在的区间为________，$\frac{a}{b}$所在的区间为________.

4. 若$a>b>c>0$，那么$\sqrt{ab}$，$\sqrt{bc}$，$\sqrt{ca}$，c四个数从小到大排列的顺序是________.

5. $\sqrt{7}+\sqrt{10}$与$2\sqrt{2}+3$的大小关系为________.

6. 设$\alpha\in(0,\frac{1}{2})$，$A=\cos(1+\alpha)$，$B=\cos(1-\alpha)$，则A与B的大小关系为________.

7. 若$a,b\in\mathbf{R}^+$，那么$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2}}$与$\sqrt{a+b}$的大小关系是________.

8. $a,b\in\mathbf{R}$，$\sqrt{a^2+b^2}$，$\frac{1}{2}(|a|+|b|)$，$|a|+|b|$由小到大排列为________.

9. 某工厂生产机器的产量，第二年比第一年增长的百分率为p_1，第三年比第二年增长的百分率为p_2，第四年比第三年增长的百分率为p_3，设年平均增长率为p，且$p_1+p_2+p_3$为定值，则p的最大值为________.

三、解答题

1. 求证：$a^2+b^2+c^2+4\geqslant ab+3b+2c$.

2. 设$x>0$，$y>0$，且$x\neq y$，求证：$(x^3+y^3)^{\frac{1}{3}}<(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$.