



附：工程数学概率论与数理统计自学考试考试大纲

工程数学 概率论与数理统计

组编 / 全国高等教育自学考试指导委员会
主编 / 范金城

全国高等教育自学考试指定教材 (公共课程)

辽宁大学出版社

全国高等教育自学考试指定教材

工程数学

概率论与数理统计

(附:概率论与数理统计自学考试大纲)

全国高等教育自学考试指导委员会组编

范金城 编

辽宁大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程数学:概率论与数理统计/范金城编. —沈阳:辽宁大学出版社,
1999.5

全国高等教育自学考试指定教材

ISBN 7-5610-0004-21

I. 工… II. 范… III. ①工程数学-高等教育-自学考试-教材 ②
概率论-高等教育-自学考试-教材 ③数理统计-高等教育-自学考试-教
材 IV. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 05877 号

辽宁大学出版社出版

(沈阳市皇姑区崇山中路 66 号 邮政编码:110036)

北京飞达印刷厂

开本:880×1230 毫米 1/32 字数:300 千字 印张:11.5

印数:1—30100 册

2000 年 10 月第 2 版 2000 年 10 月第 1 次印刷

责任编辑:王本浩 李洪革 责任校对:王 城

定价:15.60 元

版权所有 翻印必究

如有印刷质量问题请与当地教材供应部门联系调换

组 编 前 言

当您开始阅读本书时,人类已经迈入了二十一世纪。

这是一个变幻难测的世纪,这是一个催人奋进的时代。科学技术飞速发展,知识更替日新月异。希望、困惑、机遇、挑战,随时随地都有可能出现在每一个社会成员的生活之中。抓住机遇,寻求发展,迎接挑战,适应变化的制胜法宝就是学习——依靠自己学习、终生学习。

作为我国高等教育组成部分的自学考试,其职责就是在高等教育这个水平上倡导自学、鼓励自学、帮助自学、推动自学,为每一个自学者铺就成才之路。组织编写供读者学习的教材就是履行这个职责的重要环节。毫无疑问,这种教材应当适合自学,应当有利于学习者掌握、了解新知识、新信息,有利于学习者增强创新意识、培养实践能力、形成自学能力,也有利于学习者学以致用、解决实际工作中所遇到的问题。具有如此特点的书,我们虽然沿用了“教材”这个概念,但它与那种仅供教师讲、学生听,教师不讲、学生不懂,以“教”为中心的教科书相比,已经在内容安排、形式体例、行文风格等方面都大不相同了。希望读者对此有所了解,以便从一开始就树立起依靠自己学习的坚定信念,不断探索适合自己的学习方法,充分利用已有的知识基础和实际工作经验,最大限度地发挥自己的潜能以达到学习的目标。

欢迎读者提出意见和建议。

祝每一位读者自学成功。

全国高等教育自学考试指导委员会

1999年10月

编者的话

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的数学学科，它是工程数学的重要分支，是工科各专业的一门重要的基础理论课。概率论从数量上研究随机现象的统计规律性，它是本课程的理论基础。本书的第一至五章是概率论的基本内容。数理统计研究处理随机性数据，建立有效的统计方法，进行统计推断。本书的第六至九章是数理统计的基本内容。通过本课程的学习，应使学生掌握概率论与数理统计的基本理论与方法，从而使学生初步掌握处理随机现象的基本思想和方法，培养学生运用概率统计方法分析和解决实际问题的能力。

本书按《工程数学（概率论与数理统计）自学考试大纲》编写。章节安排、考核知识点、自学要求、考核要求符合大纲要求。本书第九章（回归分析与方差分析）为备选内容，其他个别节次为备选内容，皆标以“*”号，自学考试大纲中未编入，自学考试不作要求。全书个别段落超出大纲要求者，都加有附注。

本书编写中力求突出重点，深入浅出，对基本概念、重要公式和定理注意其实际意义的解释说明；力求在循序渐进的过程中，使读者逐步掌握概率论与数理统计的基本方法。本书采用国内外通用的名词、术语与符号。为了便于自学，本书按节安排习题（个别超出大纲的习题标有“*”号），按章进行小结。这样做，目的是为了使学生掌握重点，并能进行全面的解题训练。本书外国人名采取最常见的译法，并在初次出现人名时附有外文原名。本书希

望读者采用具有统计计算功能的电子计算器，以便方便地进行样本均值、样本方差等统计计算。

本书承朱燕堂教授、吴可法教授、武忠祥副教授审阅，他们对本书初稿提出了宝贵意见，编者对他们深表感谢。

与本书配套使用的有《概率论与数理统计自学辅导》。

编 者

1999年1月

目 录

第一章 随机事件与概率	1
§ 1 随机事件	1
1.1 随机试验与随机事件	1
1.2 事件的关系与运算	2
习题 1	7
§ 2 概率	8
2.1 概率的定义与性质	8
2.2 古典概型	12
2.3 概率的计算	14
习题 2	15
§ 3 条件概率与事件的独立性	16
3.1 条件概率与乘法公式	16
3.2 全概率公式与贝叶斯 (Bayes) 公式	19
3.3 事件的独立性	22
3.4 贝努利 (Bernoulli) 概型	26
习题 3	29
小结	30
第二章 随机变量与概率分布	32
§ 4 离散随机变量	32
4.1 随机变量的概念	32
4.2 离散随机变量的分布列	34
4.3 两点分布与二项分布	38
4.4 泊松 (Poisson) 分布	40
习题 4	42
§ 5 连续随机变量	43
5.1 统计直方图	43
5.2 连续随机变量的概率密度	46
5.3 均匀分布	48

5.4 正态分布	50
5.5 指数分布与 Γ 分布	52
习题 5	54
§ 6 分布函数	55
6.1 随机变量的分布函数	55
6.2 分布函数的性质	60
6.3 正态分布的概率计算	62
习题 6	64
§ 7 随机变量的函数	66
7.1 离散随机变量函数的概率分布	66
7.2 连续随机变量函数的概率分布	68
习题 7	72
小结	73
第三章 随机向量	74
§ 8 二维随机向量	74
8.1 二维离散随机向量	74
8.2 二维连续随机向量	77
习题 8	81
§ 9 二维随机向量的分布函数与边缘分布	82
9.1 分布函数的定义与性质	82
9.2 二维随机向量的边缘分布	86
习题 9	89
§ 10 随机变量的独立性	90
10.1 两个随机变量的独立性	90
10.2 两个独立随机变量之和的概率分布	94
习题 10	100
§ 11 n 维随机向量	101
11.1 n 维随机向量	101
11.2 χ^2 分布、 t 分布与 F 分布	102
习题 11	108
小结	109
第四章 随机变量的数字特征	110
§ 12 期望	110
12.1 离散随机变量的期望	110

12.2	连续随机变量的期望	113
12.3	随机变量函数的期望	116
12.4	期望的性质	119
	习题 12	122
§ 13	方差	123
13.1	方差的定义与计算公式、标准差	123
13.2	常用概率分布的方差	127
13.3	方差的性质	131
	习题 13	133
§ 14	协方差、相关系数及矩	135
14.1	协方差及其性质	135
14.2	相关系数及其性质	138
14.3	矩	141
	习题 14	144
	小结	145
第五章 大数定律与中心极限定理		147
§ 15	大数定律	147
15.1	切比雪夫 (Chebyshev) 不等式	147
15.2	贝努利大数定律	149
15.3	独立同分布序列的切比雪夫大数定律	150
	习题 15	151
§ 16	中心极限定理	152
16.1	独立同分布序列的中心极限定理	152
16.2	棣莫弗 (De Moivre) - 拉普拉斯 (Laplace) 中心极限定理	155
16.3*	独立但不同分布序列的中心极限定理	157
	习题 16	158
	小结	159
第六章 样本及抽样分布		161
§ 17	总体与样本	161
17.1	总体、个体及总体分布	161
17.2	样本及样本分布	162
17.3	样本的数字特征	166
17.4	经验分布函数	171

习题 17	174
§ 18 统计量与抽样分布	175
18.1 统计量与抽样分布概念	175
18.2 正态总体的抽样分布	178
习题 18	183
小结	184
第七章 参数估计	186
§ 19 参数的点估计	186
19.1 参数点估计的概念	186
19.2 矩估计法	188
19.3 极大似然估计法	193
习题 19	200
§ 20 估计量的评选标准	201
20.1 无偏性	202
20.2 有效性	205
20.3 相合性	206
习题 20	208
§ 21 参数的区间估计	209
21.1 置信区间概念	209
21.2 正态总体均值的区间估计	211
21.3 正态总体方差的区间估计	216
21.4 非正态总体参数的区间估计	220
习题 21	224
小结	226
第八章 假设检验	227
§ 22 假设检验的基本概念	227
22.1 假设检验的基本原理	227
22.2 两类错误	230
22.3 假设检验的基本步骤	232
习题 22	233
§ 23 正态总体均值与方差的假设检验	234
23.1 正态总体均值的假设检验	234
23.2 正态总体方差的假设检验	243
习题 23	248

§ 24* 非正态总体参数的假设检验	250
24.1 概率 p 的假设检验	250
24.2 非正态总体均值的大样本检验	254
习题 24*	256
§ 25 总体分布假设的 χ^2 检验法	256
25.1 皮尔逊 (Pearson) 的 χ^2 检验法	256
25.2 总体分布假设的 χ^2 检验法	259
习题 25	263
小结	263
第九章* 回归分析与方差分析	265
§ 26* 一元线性回归	265
26.1 两种不同类型的变量关系	265
26.2 一元线性回归模型	266
26.3 a 、 b 的最小二乘估计	267
26.4 估计量 a 、 b 的分布及 σ^2 的估计	270
26.5 回归方程显著性检验	275
26.6 预测	278
习题 26*	280
§ 27* 单因素方差分析	281
27.1 单因素方差分析模型实例	282
27.2 单因素方差分析模型	284
27.3 单因素方差分析方法	290
27.4 单因素方差分析中的参数估计	293
习题 27*	294
小结	296
习题答案	297
附表 1 标准正态分布表	311
附表 2 泊松分布表	312
附表 3 t 分布表	314
附表 4 χ^2 分布表	316
附表 5 F 分布表	320
后记	329
概率论与数理统计自学考试大纲	331

第一章 随机事件与概率

§ 1 随机事件

1.1 随机试验与随机事件

自然界中出现的现象，可以分为两大类，一类为确定性现象，另一类为随机现象。

所谓确定性现象，是指一定条件下必然发生的现象。例如：物体在重力作用下，必然向下落；又如在标准大气压下，水加热到 100°C ，必然会沸腾等等。

所谓随机现象，即通常所称的偶然现象，是指一定条件下可能发生也可能不发生的现象。从一大批产品中任意抽取一个产品，这个产品可能是正品，也可能是废品，结果带有随机性。远距离射击较小的目标，可能击中，也可能不击中，结果也带有随机性。从某生产线上用同一种工艺生产出来的灯泡的寿命，有的长，有的短，同样显出随机性。诸如此类的现象都是随机现象。

上面所说的随机现象总在一定条件下进行，并进行观察。把一次观察看做一次试验。满足下列条件的试验称为随机试验：

- (1) 试验可以在相同条件下重复进行；
- (2) 每次试验结果不止一个，并能事先明确试验的可能结果；
- (3) 试验前不知道会出现什么结果。

例如：抛掷一枚硬币，观察正面、反面出现情况；投掷一颗骰子，观察出现的点数；记录某电话总机在一分钟内所接到的呼唤次数；从一大批元件中任意抽取一个，测试它的寿命等等都是随机试验的例子。

在随机试验中，可能发生，也可能不发生的事件称为随机事

件. 随机事件是本课程主要的研究对象.

〔例 1〕 一枚硬币, 有花的一面叫“正面”, 有字的一面叫“反面”. 在抛掷一枚硬币的随机试验中, “出现正面”、“出现反面”都是随机事件.

〔例 2〕 骰子是一个正六面体, 每面分别标有“1”、“2”、“3”、“4”、“5”、“6”. 进行抛掷骰子的随机试验中, “出现 4 点”、“出现偶数”、“出现数字小于 3”等都是随机事件.

〔例 3〕 一个电话总机一分钟内接到的呼唤次数的随机试验中, “接到 3 次呼唤”, “超过 5 次呼唤”等都是随机事件.

〔例 4〕 从一批灯泡中随机抽取一只, 测试它的寿命, “寿命在 1000 至 2000 小时之间”、“寿命超过 1500 小时”等都是随机事件.

随机试验中, 必然会发生的事件叫做必然事件, 必然不发生的事件叫做不可能事件. 例如在例 2 中, “点数不大于 6”是必然事件, “点数大于 6”是不可能事件.

今后, 随机事件常简称为事件. 一般用大写字母表示随机事件, 譬如 $A, B, C, \dots$ 或 $A_1, A_2, \dots$ 等; 也可以用语言描述再加花括弧来表示事件, 如 {出现正面}、{呼唤次数小于 3 次} 等. 必然事件以记号 Ω 表示, 不可能事件以记号 ϕ 表示.

1.2 事件的关系与运算

在随机试验中, 有许多事件发生, 而这些事件之间又有联系. 详细分析事件之间的关系, 可以帮助我们更深刻地认识随机事件. 让我们以两个典型例题来讨论事件间的关系及事件的运算. 其中一个典型例题是例 2, 另一个典型例题如下.

〔例 5〕 假设打靶击中某正方形区域为必然事件 Ω . 击中此正方形某区域 A 是随机事件. 我们可以把区域 A 形象地表示 {击中区域 A } 这一随机事件 (见图 1—1). 这是随机事件的图象表示法. 在下面讨论事件关系与运算中, 采用图象表示法是非常有益的.

下面介绍事件的关系与运算.

(1) 事件的包含与相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生, 则称事件 B 包含事件 A , 记为:

$$B \supset A \text{ 或 } A \subset B.$$

例 2 中, 含 $A = \{\text{出现“2”}\}$, $B = \{\text{出现偶数}\}$, 则 $A \subset B$.

例 5 中, $B \supset A$ 即打靶击中 A 时必然击中区域 B , 所以图象上即表示区域 B 包含区域 A (见图 1—2).

若事件 A 与事件 B 在意义上表示同一事件, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A = B$. 若 $A = B$, 当 A 发生时, B 也必然发生, 即有 $B \supset A$, 同理 $A \supset B$. 反过来, 若 $A \supset B$, 又 $B \supset A$, 则 A 与 B 表示同一事件, 即 $A = B$.

例 2 中, 令 $A = \{\text{出现“2”、“4”或“6”}\}$, $B = \{\text{出现偶数}\}$, 则 $A = B$.

(2) 和事件

事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件称为事件 A 与事件 B 的和事件, 记为 $A \cup B$. $A \cup B$ 发生意味着: 或事件 A 发生, 或事件 B 发生, 或事件 A 和事件 B 都发生. 即: $A \cup B = \{A, B \text{ 中至少发生一个}\}$.

例 2 中, 令 $A = \{\text{出现偶数}\}$, $B = \{\text{出现小于 5 的数}\}$, 则 $A \cup B = \{\text{出现“1”、“2”、“3”、“4”或“6”}\} = \{\text{不出现“5”}\}$.

例 5 中, 如图 1—3, 区域 $A \cup B$ 表示区域 A 与区域 B 的并; 打靶击中区域 $A \cup B$, 意味着至少击中区域 A 、 B 中的一个.

由于和事件 $A \cup B$ 可以用区域 A 与区域 B 的并的图象表示, 因此, 也可称 $A \cup B$ 为 A 与 B 的并事件.

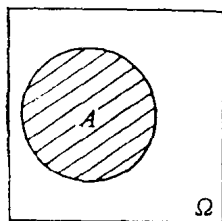


图 1—1

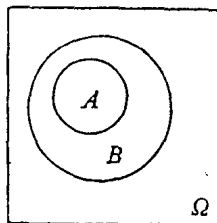


图 1—2

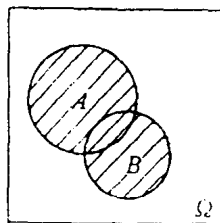


图 1—3

给定 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 定义它们的和事件 $\bigcup_{k=1}^n A_k$ 为:

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{A_1, A_2, \dots, A_n \text{ 中至少发生一个}\};$$

同样, 给定无穷个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, 定义它们的和事件

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ 为:}$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots = \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \text{ 至少发生一个}\}.$$

(3) 积事件

事件 A 与事件 B 都发生的事件称为事件 A 与事件 B 的积事件, 记为 $A \cap B$, 简记为 AB . 也就是说, 事件 $A \cap B$ 发生意味着事件 A 发生且事件 B 也发生. 即:

$$A \cap B = AB = \{A, B \text{ 都发生}\} = \{A \text{ 发生且 } B \text{ 也发生}\}.$$

例 2 中, 令 $A = \{\text{出现偶数}\}$, $B = \{\text{出现小于 5 的数}\}$, 则

$$A \cap B = \{\text{出现“2”, “4”}\}.$$

例 5 中, 如图 1—4, 区域 $A \cap B$ 表示区域 A 与区域 B 的交; 打靶击中区域 $A \cap B$, 意味着击中区域 A 与区域 B 的公共部分, 即 A 与 B 的交.

由于积事件 $A \cap B$ 可以用区域 A 与 B 的交的图象表示, 因此, 也可称 $A \cap B$ 为 A 与 B 的交事件.

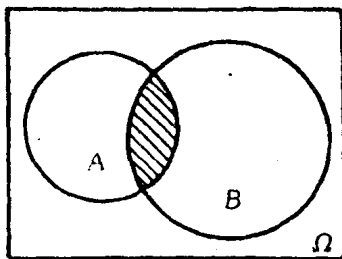


图 1—4

类似地, 可以定义 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的积事件.

$$\bigcap_{k=1}^n A_k = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{A_1, A_2, \dots, A_n \text{ 都发生}\}; \text{ 也可}$$

定义 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的积事件:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots = \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \text{ 都发生}\}.$$

(4) 差事件

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件, 记为 $A - B$.

例 2 中, 令 $A = \{\text{出现偶数}\}$, $B = \{\text{出现小于 5 的数}\}$, 则 $A - B = \{\text{出现“6”}\}$.

图 1—5 的阴影部分表示 $A - B$.

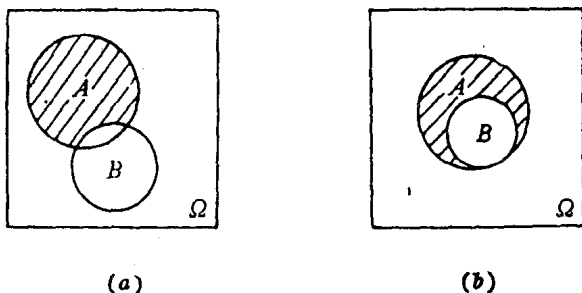


图 1—5

(5) 互不相容

若事件 A 与事件 B 不能同时发生, 即 $AB = \phi$, 则称事件 A 与事件 B 是互不相容的事件; 简称事件 A 与事件 B 互不相容 (或称互斥). 对于 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 如果它们两两互不相容, 即: $A_i A_j = \phi$ (当 $i \neq j$), 则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为互不相容事件.

例 2 中, 令 $A = \{\text{出现偶数}\}$, $B = \{\text{出现“3”}\}$, 则 $AB = \phi$; 即 A 与 B 互不相容.

图 1—6 中, 区域 A 与区域 B 不相交, 它直观地表示了事件 A 与事件 B 互不相容.

(6) 对立事件

“ A 不发生”的事件称为事件 A 的对立事件 (或称逆事件), 记为 $\bar{A}$.

若事件 A 与事件 B 至少发生一个, 又互不相容, 即:

$A \cup B = \Omega$, $AB = \phi$, 则称 A, B 是互为对

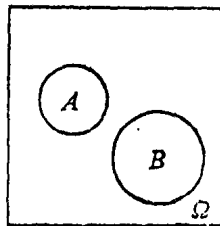


图 1—6

立事件. 这时, 必有 $B = \bar{A}$; 又 $A = \bar{B}$.

例 2 中, 令 $A = \{\text{出现偶数}\}$, 则 $\bar{A} = \{\text{出现奇数}\}$. 若又记 $B = \{\text{出现奇数}\}$, 则 A, B 是互为对立事件.

例 5 中, $\bar{A}$ 发生意味着没有击中区域 A .

图 1—7 中, $\bar{A}$ 表示区域 A 外的部分.

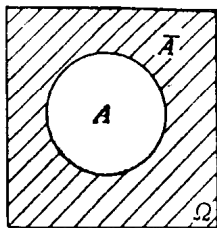


图 1—7

由定义容易验证:

$$A - B = A \bar{B}$$

对于事件的运算, 满足下列运算规律:

交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$$(AB)C = A(BC)$$

分配律 $(A \cup B)C = AC \cup BC$

对偶律 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \bar{B}$

$$\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

〔例 6〕 证明对偶律:

(1) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \bar{B}$

(2) $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$

〔证〕 (1) $\overline{A \cup B} = \overline{\{A, B \text{ 至少发生一个}\}} = \{A, B \text{ 都不发生}\} = \{\bar{A}, \bar{B} \text{ 都发生}\} = \bar{A} \bar{B}$.

(2) $\overline{AB} = \overline{\{A, B \text{ 都发生}\}} = \{A, B \text{ 至少不发生一个}\} = \{\bar{A}, \bar{B} \text{ 至少发生一个}\} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

〔例 7〕 设 A, B, C 表示三个随机事件, 试以 A, B, C 的运算来表示下列事件:

(1) 仅 A 发生;

(2) A, B, C 都不发生;

(3) A, B, C 恰好一个发生.

〔解〕 (1) $A \bar{B} \bar{C}$;

(2) $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$;

(3) $A \bar{B} \bar{C} \cup \bar{A} B \bar{C} \cup \bar{A} \bar{B} C$.

注意: 在进行事件运算时, 关于它们的运算次序作如下的约