

混沌动力学基础及其应用

*Fundamentals and Applications
of Chaotic Dynamics*

刘宗华 编著

高等教育出版社

混沌动力学基础及其应用

Fundamentals and Applications of Chaotic Dynamics

刘宗华 编著

高等教育出版社

内 容 提 要

混沌动力学已发展成相对完备的体系,并在众多领域显示出强大的生命力。本书系统地反映了有关混沌动力学的研究现状,对典型的分立与连续混沌系统作了详细介绍,并结合部分前沿课题展示混沌动力学的潜在应用。全书共分7章,内容由浅入深、循序渐进,前四章主要介绍混沌的基本概念,能出混沌的典型分立与连续动力系统,及刻画混沌的常用手段。后三章则着重介绍混沌理论的纵深发展及其应用。为方便读者更好地掌握混沌研究的基本概念与方法,本书特地为混沌动力学的基本内容部分——第一章至第四章,配备了适量的习题,以供读者参考。

本书能帮助本科高年级的学生与研究生迅速进入前沿课题,找到合适的切入点。对从事非线性科学研究的工作者、理工科大学的教师及与非线性科学研究有关的交叉领域的研究人员也有一定的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

混沌动力学基础及其应用/刘宗华编著. —北京:
高等教育出版社, 2006. 11
ISBN 7-04-020490-8

I. 混... II. 刘... III. 混沌学: 动力学
IV. O313

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第120802号

策划编辑 王 超 责任编辑 张海雁 封面设计 李卫青
责任绘图 朱 静 版式设计 史新薇 责任校对 俞声佳
责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landrace.com
印 刷	北京宏伟双华印刷有限公司		http://www.landrace.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2006年11月第1版
印 张	11.5	印 次	2006年11月第1次印刷
字 数	180 000	定 价	22.40元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 20490-00

序

研究混沌的人们往往说“混沌动力学的诞生是继相对论与量子力学后的又一重要划时代的革命”。虽然这种说法不很恰当，因为相对论和量子力学改变了作为物理学基础的时空和动力学的基本概念，而混沌动力学却包含在它诞生之前的已有动力学之中。但它从确定论的动力学中得到了长时间上的不确定性，从简单的动力学系统中找出了复杂的动力学行为，这不能不被认为是一种革命。而且各学科中的非线性动力系统都可能出现混沌，因而有广泛的实际意义和应用价值，被许多领域的研究人员所关注。通过近二三十年的发展，混沌动力学已取得了令人瞩目的进展，新的成果不断涌现，已经成为自然科学中一门十分活跃的交叉学科。如何把混沌动力学的基本原理和近年来的进展以系统、合乎逻辑的方式传递给年轻学子，从而使他们对这门重要的新兴交叉学科发生兴趣并迅速进入到若干研究前沿，是非线性科学工作者的一项重要任务。本书中，刘宗华教授在他所熟悉的混沌动力学主流领域适时地完成了这一任务。

我目睹了刘宗华教授对混沌动力学的研究历程。他从1995年到我处攻读博士学位算起，至今已在混沌领域耕耘了10多年。他2004年回国后开始讲授混沌动力学，已讲完两届。因此可以说此书是在其多年科研实践与主讲混沌动力学的基础上撰写的，读完后觉得此书具有如下特点：系统地阐述了混沌动力学的基本概念、研究方法、典型出混沌的分立与连续系统，为初入混沌领域的读者提供了一本好的入门书，也为非线性工作者提供了一本案头常备的重要参考书；取材新颖，反映了混沌动力学的部分最新前沿进展，如混沌的同步与控制及癫痫病的预言等，并介绍了作者具有创新性的研究成果及应用实践；避免了繁琐的数学推导和定理证明，启发性地用深入浅出的语言加强了物理意义的论述。书中基础部分配有习题，便于读者学习和理解，适合于理工科各专业的本科及研究生。因此这是一本关于混沌动力学的入门与前沿知识的教科书，我把这本新书推荐给读者，希望你们喜欢。

北京应用物理与计算数学研究所

陈式刚

2006年7月1日

本教材获华东师范大学
研究生教材建设基金资助

前 言

从1963年美国气象学家洛伦茨(Lorenz)发现奇怪吸引子到现在,在许多杰出科学家研究成果的基础上已经形成了一门新的学科——混沌动力学。混沌动力学是非线性科学的主要组成部分之一(另外两者为分形与孤立子),主要研究周期动力系统是如何发展成混沌的以及出现或进入混沌态后的一系列新的性质与可能的应用。混沌动力学已发展成为一门成熟的学科,因其自身的特点而为众多领域的科学工作者所青睐,如数学家、物理学家、应用科学家、工程师、经济学家及生态学家等。本书力图从基本概念入手,在保证基本概念清楚的前提下略去其繁琐的数学推导,仅保留必要的部分,然后逐步展示其丰富的内涵。内容涉及此领域内的部分最新研究成果。

本书的成书起因于2004年春作者从美国亚里桑那州立大学回到上海华东师范大学所开设的研究生选修课程。当时国际国内已有众多的混沌学方面的英文与中文书籍与资料。然而当我想从它们之中挑选一本合适的教材时,却深感无一得心应手之作。有些书籍数学味太浓,而另外一些书籍科普成分太重。因此促使作者想编写一本既可作为本科高年级学生及研究生的专业课选修教材又是以后科研工作中可随时查找资料的参考书。为此目的,本书将对典型的分立与连续混沌系统作详细介绍,使之适合于本科高年级的学生,同时希望此部分内容成为以后工作中的一本工具书,可随时查找常用混沌系统的有关知识,避免急用时到处找不着。然后对混沌动力学领域中目前还在发展的前沿课题进行介绍,以使初入此门的研究生能迅速进入课题,找到合适的切入点。

全书共分7章。第一章主要介绍混沌的发展历史,基本概念及最基本的数学基础。第二章与第三章详细介绍能出混沌的典型的分立与连续动力系统,并通过这些系统来展示混沌的丰富内涵。这些系统是混沌研究中比较公认与常用的系统,在以后的研究或应用中若用它们来作模型则不致于引起不必要的麻烦。第四章给出了刻画混沌的常用手段:功率谱分析、李雅普诺夫(Lyapunov)指数、分数维数、吸引子重构等,并给出了随机微分方程积分的数值算法。第五章介绍了耦合混沌系统的同步

化。这里的许多特点，如混沌形成与锁相等，是单个混沌系统所不具备的，是混沌理论的纵深发展。第六章主要介绍了我们的工作：混沌动力系统噪声效应。这方面的研究正处在发展之中。最后一章简单介绍了混沌的应用，内容涉及混沌控制与保密通信及癫痫病的预言与模拟。为方便读者更好地掌握混沌研究的基本概念与方法，本书特地为混沌动力学的基本内容部分——第一章至第四章，配备了适量的习题，以供读者参考。这些习题与书中的大部分内容来自于书后所附的参考文献，有兴趣的读者可进一步追踪。

作者在从事混沌动力学方面的研究和本书的写作过程中得到了许多国内外同行的支持和帮助，其中的一些结果是我与合作者共同完成的。作者真正接触混沌始于1993年春到中科院理论物理研究所的访问。当时，郝柏林院士的博士生方海平给了我诸多帮助，还有谢发根、武作兵、刘军贤、付三清等的帮助，让我似懂非懂地知道了一些符号动力学的基础知识。1994年春到南京大学对倪皖荪教授的访问激发了我对混沌研究的兴趣，于是做出决定于1995年到陈式刚院士处攻读博士学位，系统地从事混沌动力学方面的研究。现在回想起来，1995到1998年这段时间是我人生最美好的时光。在这近3年的时间内，我得到了来自陈式刚院士的悉心指导，得到了我的师兄弟杨志安、张光才、刘世柄、谢柏松、许爱国、程太旺等的诚挚友谊，得到了应用物理与计算数学研究所的老师与同学们的热情关怀。使我小有所成，获得了中国工程物理研究院北京研究生部颁发的第一届“科技创新奖”。我真正的科研工作应该是始于这段时期，至今还记得当时发表第一篇PRE文章时的激动心情。1998年到香港浸会大学胡班比教授处从事博士后的研究工作，接触了更多的同仁，开阔了眼界。特别是与李保文、童培庆、赵鸿、郑志刚、汪秉宏、何大韧、王伟、黄国翔、陈庆虎、匡乐满、揭权林等教授的合作或友谊，让我受益匪浅。2000年到美国亚里桑那州立大学数学系后，得到了来颖诚教授的耐心指导，让我对混沌动力学有了较全面的了解。2003年转到生物工程系后，从杰西米迪(Leon D. Iasemidis)教授那里了解了混沌动力学在癫痫病方面的应用。借此机会，作者要特别感谢他们的帮助！还有许多对我提供过帮助的老师与同学，无法一一列出，在此对他们一并致以感谢！同时，作者还要深深地感谢我的夫人与小孩长期以来对我工作的理解、支持和帮助。

作者虽进入此领域10余年，但近20年来混沌动力学的发展太过迅速，涉及的面太广，作者无法一一涉猎，比如量子混沌、复杂性分类、混沌金融等，因此本书将不介绍这些方面的内容。而有些方面，如保守

系统的混沌与混沌的覆盖 (shadowing) 等, 作者虽有涉猎但研究不深, 故本书中也未作详细的展开讨论。因此, 本书只能算是作者在混沌动力学领域的研究足迹的一个阶段性总结。本书虽已在华东师范大学物理系研究生专业选修课上试用了两届 (2005 届、2006 届), 但鉴于作者水平有限, 且书中的部分结果是新近发表的, 错误在所难免, 热诚地期待读者们批评指正。若此书能对混沌领域的读者建立起基础知识与研究课题间的直接联系或对相关领域的读者从思想上有所启发, 则作者便甚感欣慰。

刘宗华

2006 年夏于

华东师范大学理论物理研究所

目 录

第一章 混沌概论	1
§ 1.1 混沌的发展史	1
§ 1.2 混沌的特征	4
§ 1.3 通向混沌之路	9
§ 1.3.1 倍周期分岔通向混沌	9
§ 1.3.2 阵发性通向混沌	11
§ 1.3.3 霍普夫分岔通向混沌	11
§ 1.3.4 哈密顿系统的 KAM 环面通向混沌	13
§ 1.4 混沌的测度与各态历经性	14
§ 1.5 非线性动力系统的稳定性分析	16
§ 1.6 动力系统的三种典型的分岔	19
§ 1.7 习题	22
第二章 一些典型的分立动力系统 中的混沌	23
§ 2.1 逻辑斯蒂映象	23
§ 2.2 埃农映象	28
§ 2.3 标准映象	30
§ 2.4 帐篷映象	32
§ 2.5 圆映象	34
§ 2.6 艾克达映象	37
§ 2.7 双转子映象	38
§ 2.8 习题	41
第三章 一些典型的连续动力系统 中的混沌	43
§ 3.1 流与映象的关系	43
§ 3.2 洛伦茨方程	44
§ 3.3 洛斯勒系统	49
§ 3.4 蔡氏电路	50
§ 3.5 达芬方程	52
§ 3.6 习题	54
第四章 混沌的刻画	56
§ 4.1 映象轨道的图像描述: 蜘蛛网图	56

§ 4.2	功率谱分析	57
§ 4.3	李雅普诺夫指数	59
§ 4.3.1	李雅普诺夫指数的定义	59
§ 4.3.2	李雅普诺夫指数的数值计算	62
§ 4.3.3	噪声时间序列中的最大李雅普诺夫指数的检测	65
§ 4.4	分数维数	67
§ 4.4.1	豪斯多夫维数	67
§ 4.4.2	计盒维数	68
§ 4.4.3	信息维数	68
§ 4.4.4	关联维数	69
§ 4.4.5	李雅普诺夫维数	70
§ 4.4.6	广义维数	70
§ 4.5	时间序列的吸引子重构	71
§ 4.6	数值计算方法	75
§ 4.6.1	龙格-库塔方法	75
§ 4.6.2	噪声环境下的休息方法	76
§ 4.7	习题	77
第五章	耦合混沌系统的集体行为——混沌同步化	78
§ 5.1	同步化现象	78
§ 5.2	完全同步化	79
§ 5.3	相同步化	82
§ 5.4	延迟同步化	88
§ 5.5	广义同步化	90
§ 5.6	大量耦合振子的锁相	93
§ 5.7	耦合振子中的阵发及其机制	97
§ 5.8	分立系统的相刻画	101
第六章	混沌动力系统噪声效应	107
§ 6.1	外噪声作用下的阵发效应	107
§ 6.2	噪声诱导混沌及统计平均量的观测	111
§ 6.3	噪声对混沌吸引子中性方向的影响	117
§ 6.4	混沌系统中的相关共振	123
§ 6.5	无序抑制混沌	131
第七章	混沌的应用	134
§ 7.1	控制混沌	134
§ 7.2	保密通信	140

§ 7.3 耦合强度及方向性检测	144
§ 7.4 癫痫病的模拟	147
§ 7.4.1 非线性探测——替代数据法	149
§ 7.4.2 癫痫机制的动力学模型探讨	152
参考文献	155
附录 科学家中英文名对照表	163

Contents

1 Introduction of chaos	1
§ 1.1 Some history	1
§ 1.2 The features of chaos	4
§ 1.3 Routes to chaos	9
§ 1.3.1 Period - doubling route to a chaotic attractor	9
§ 1.3.2 Intermittency transition to a chaotic attractor	11
§ 1.3.3 Hopf bifurcation to chaos	11
§ 1.3.4 KAM torus to chaos	13
§ 1.4 Natural measure and ergodicity	14
§ 1.5 Stability analysis of nonlinear dynamical systems	16
§ 1.6 Three typical bifurcations of dynamical systems	19
§ 1.7 Exercises	22
2 Chaos in typical maps	23
§ 2.1 The Logistic map	23
§ 2.2 The Henon map	28
§ 2.3 The standard map	30
§ 2.4 The tent map	32
§ 2.5 The circle map	34
§ 2.6 The Ikeda map	37
§ 2.7 The double rotor map	38
§ 2.8 Exercises	41
3 Chaos in typical flows	43
§ 3.1 Poincaré surface of section	43
§ 3.2 The Lorenz equation	44
§ 3.3 The Rössler equation	49
§ 3.4 Chua's circuit	50
§ 3.5 Duffing's equation	52
§ 3.6 Exercises	54
4 Description of chaos	56
§ 4.1 Cobweb plot: Graphical representation of an orbit	56

§ 4.2	Power spectra	57
§ 4.3	Lyapunov exponents	59
§ 4.3.1	Definition of Lyapunov exponents	59
§ 4.3.2	Numerical calculation of Lyapunov exponents	62
§ 4.3.3	Measuring the maximal Lyapunov exponent from data	65
§ 4.4	Fractal dimensions	67
§ 4.4.1	Hausdorff dimension	67
§ 4.4.2	Box-counting dimension	68
§ 4.4.3	Information dimension	68
§ 4.4.4	Correlation dimension	69
§ 4.4.5	Lyapunov dimension	70
§ 4.4.6	Generalized dimension	70
§ 4.5	Phase space reconstruction from time series	71
§ 4.6	Two typical numerical approaches	75
§ 4.6.1	Runge – Kutta approach	75
§ 4.6.2	Heun approach with noise	76
§ 4.7	Exercises	77
5	Collective behaviors of coupled chaotic systems——	
	chaos synchronization	78
§ 5.1	Synchrony phenomenon	78
§ 5.2	Identical synchronization	79
§ 5.3	Phase synchronization	82
§ 5.4	Lag synchronization	88
§ 5.5	Generalized synchronization	90
§ 5.6	Phase locking of a population of coupled oscillators	93
§ 5.7	Intermittency of coupled oscillators	97
§ 5.8	Phase of discrete systems	101
6	Noise effect of chaotic systems	107
§ 6.1	Intermittency with external noise	107
§ 6.2	Chaos induced by noise and its statistical average	111
§ 6.3	Noise effect on the neutral direction of chaotic attractor	117
§ 6.4	Coherence resonance in chaotic systems	123
§ 6.5	Suppression of chaos by disorder	131
7	Applications of chaos	134
§ 7.1	Chaos control	134

§ 7.2	Secure communication	140
§ 7.3	Detection of coupling strength and direction	144
§ 7.4	Modelling of epileptic seizure	147
§ 7.4.1	Testing for nonlinearity with surrogate data	149
§ 7.4.2	Dynamical model of epileptic seizure	152
References		155
Appendix Comparative table for Chinese and English name of Scientist		163

第一章 混沌概论

§ 1.1 混沌的发展史

现代科学始于牛顿于 1686 年提出的三大定律。加上万有引力定律，牛顿便可以推导开普勒总结的行星运动的经验定律及解释诸多的自然现象，像月亮的椭圆运动、海水的潮起潮落、自由落体等。根据牛顿力学，人们还发现了海王星与冥王星、预测了彗星的出现和其他天体的运动、设计了各种火箭并把航天器送到了宇宙空间。牛顿定律的一个直接推论就是：给定初始条件及相互作用力，物体以后的运动就完全确定了。即使初始条件有一定的误差，只要误差足够小，我们也可以基本准确地给出未来的所有发展情况。于是拉普拉斯于 1851 年断言：如果有一位智慧之神在某一时刻能获知自然界一切物体的位置及相互作用力，那么他就可以预测宇宙的未来状况（《Philosophical Essay on probabilities》“Given for one instant an intelligence which could comprehend all the forces by which nature is animated and the respective situation of the beings who compose it——an intelligence sufficiently vast to submit these data to analysis——it would embrace in the same formula the movements of the greatest bodies of the universe and those of the lightest atom; for it, nothing would be uncertain and the future, as the past, would be present before its eyes”）。

对天体轨道的预言是牛顿力学成功的典范，然而牛顿定律只能精确地描述单体与二体问题，对稍微复杂的三体问题便无法求得精确解。19 世纪末 20 世纪初，庞加莱 (Poincaré) 在研究限制性三体问题时遇到了混沌问题，发现三体引力相互作用能产生出惊人的复杂性。限制性三体问题指所讨论的 3 个天体中，有一个天体的质量与其他两个天体的质量相比，小到可以忽略，即不考虑它对另外两者的吸引。庞加莱发现就是这样一个限制性三体问题的相对运动也与单体问题及二体问题不同，它是无法求出精确解的。庞加莱把动力系统和拓扑学有机地结合起来，指出三体问题中，在一定范围内，其解是随机的。即在确定论系统中，相空间轨道有可能呈现高度不稳定性，初始条件的任何微小扰动都会在未来的发展中引起完全不同的后果。这是科学家第一次指出确定论系统中的

内在随机性——混沌。庞加莱的发现回答了瑞典国王奥斯卡二世(Oscar II)的问题:太阳系是否稳定,因而获得了其悬赏。这个例子及随后的研究表明,牛顿力学不仅对研究宏观天体与微观粒子不能适用,而且对研究由多个要素构成的复杂系统也存在困难。即使对于宏观的保守系统,牛顿力学也仅能解决少数可积系统的问题,而大量的实际问题仍无法用牛顿力学来解决。过去,随机性只是和不可逆性联系在一起。而现在,在确定性的、可逆的牛顿方程内部出现了内在的随机性。然而非常遗憾的是庞加莱没有沿着这条路继续走下去,在双曲点附近无限复杂精细的栅栏结构面前却步了。他说“这些东西太稀奇古怪了,我没有耐心去仔细考虑它们”。

1954年,前苏联数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)提出一个定理;1963年,他的学生阿诺德(Arnold)给出定理的严格证明,瑞士数学家莫西(Moser)给出一个改进的证明。因此,这个定理叫做KAM定理,即用这三位发现者的名字命名的定理。定理的内容可以粗略地叙述如下:对 N 个自由度的哈密顿系统,若哈密顿函数可以表示为

$$H = H_0 + V \quad (1.1)$$

其中 H_0 表示一个可积系统的哈密顿量, V 表示一个小扰动(弱非线性),则在足够阶数的可微及非退化条件下, H 的绝大多数的解,仍然停留在一个 N 维环面上,此环面与可积系统的 H_0 环面同胚。可积系统指存在 N 个运动积分的系统,此时系统的解位于 N 维环面上并可以用这 N 个运动积分表示出来。不可积系统指不存在 N 个运动积分的系统,其系统的解将不再限制在 N 维环面上。KAM定理表明,在小扰动下,近可积系统的绝大多数解仍限制在稍有变形的 N 维环面上。这些环面称为KAM环面。因此,KAM定理为揭示哈密顿系统中KAM环面的破坏以及混沌运动奠定了基础。KAM定理表征了小扰动不能导致复杂的运动,规则运动具有稳定性,贯穿相空间的无理环面将混沌区与规则区完全隔开。作为例子,我们考虑一个小行星围绕太阳的运动,它们的运动受到木星的扰动,因此是一个不可积的三体问题。稳定的小行星轨道的存在可以被看做是对KAM定理的一个证明。1963年,洛伦茨在著名论文《决定论非周期流》中讨论了天气预报的困难和大气湍流现象,给出了耗散系统中第一个确定论方程导出混沌解的实例,这个模型表明长期天气预报的不可能性。洛伦茨提出了一个形象的比喻:“巴西的一只蝴蝶扇动几下翅膀,可能会改变3个月后美国得克萨斯州的气候”(The “butterfly effect”: Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?),即“蝴蝶效应”,见图1.1。(我国苏轼也曾写过“竹中

一滴曹溪水,涨起西江十八滩”。)洛伦茨系统作为第一个混沌的物理和数学模型,成为后人研究混沌理论的出发点和基石,洛伦茨因而被誉为“混沌之父”。

1964年,法国天文学家埃农(Henon)从研究球状星团以及洛伦茨吸引子中得到启发,得到了一个二维不可积哈密顿系统中的确定性随机行为,即埃农映象。1971年,法国物理学家茹厄勒(Ruelle)和荷兰数学家塔肯斯(Takens)证明朗道的湍流理论是不正确的,为耗散系统引入“奇怪吸引子”概念,提出用混沌来说明湍流的形成。

1975年,美国数学家约克(Yorke)和李天岩在美国《数学月刊》发表了题为《周期3意味着混沌(Period three implies chaos)》的著名文



图 1.1 美国得克萨斯州的龙卷风^[1]

章,被认为是混沌的第一次正式表述,混沌一词从此被正式使用。在这篇文章中,如果一个连续映象 f 有一个周期3点,则它必定具有任意周期 k 的点。此后不久人们发现令人惊奇的李-约克定理并不是一个新发现,它只是1964年苏联数学家萨柯夫斯基(Sharkovskii)定理的子定理或特例^[2]。由于此定理的重新发现,使得萨柯夫斯基定理也广为人知。

1976年,美国生态学家梅(May)在美国《自然》杂志上发表题为《具有极复杂的动力学的简单数学模型》的文章。文中指出,逻辑斯谛(Logistic)映象中存在着丰富的内容。在这个基础上,美国物理学家费根鲍姆(Feigenbaum)于1978年发现了倍周期分岔通向混沌的两个普适常数,并引入了重整化群的思想。

20世纪70年代中期,实验物理学家也加入了混沌学的研究行列。1974年,美国物理学家斯温尼(Swinney)和格鲁布(Gollub)用实验间接地证实了茹厄勒-塔肯斯理论;1984年,美国物理学家肖(Shaw)和他的同事用水龙头进行混沌实验,并由实验数据重建了奇怪吸引子^[3]。肖的实验如下:一只自来水龙头如果在将闭未闭之际,即漏水口很小,而水压恒定的时候,水滴积累重力超过了表面张力,水滴就下落,新的一滴水又开始积累。则每次形成一滴水而落下的时间是一个常数,即滴

水是一个周期的性态。试将漏水口放大一点点，周期将缩短，反之将延长。加大到一个临界值，这周期就发生忽长忽短的不规则性态了。一长一短，这是倍周期。再加大漏水口，可见四周期。继续加大，可出现完全不恒定的周期，即混沌。

自此以后，混沌学进入了蓬勃发展的阶段。近 20 多年来，非线性科学成为科学研究的热点之一。尤其是在 70 年代末，80 年代初，非线性科学的研究热潮就像当年量子力学、相对论刚问世一样，导致了整个科学界的震撼。非线性科学宣布了几百年来主导科学界的经典决定论的局限性。它指出，即使对于通常的宏观尺度和一般物体的运动速度，经典决定论也不符合对非线性系统中混沌轨道行为分析得出的客观结论。非线性科学涵盖各种各样尺度的系统，可包括从非常基本到最先进及从非常数学化到最定向的应用。涉及以任意速率运动的对象，具有广泛的应用性。对作为非线性科学的一个主要分支的混沌的研究不仅推动了其他学科的发展，而且其他科学的发展又促进了混沌的深入研究。因此，混沌学的应用已经涉及了几乎所有的学科^{[4][5]}。有鉴于此，物理学家福德(Ford)认为混沌引起的影响与相对论及量子力学相似，并得出结论：“相对论消除了关于绝对空间与时间的幻想；量子力学消除了关于可控测量过程的牛顿式的梦；而混沌则消除了拉普拉斯关于决定论式可预测性的幻想。”

混沌研究能有如此迅速的发展，除了物理思想的更新外，主要得力于计算机技术的长足进展。计算机是研究混沌科学的必备工具，没有计算机就没有混沌学的今天，正如没有显微镜就看不见细菌，没有望远镜就分不清遥远的星，没有高能加速器就看不见微观粒子。有了计算机的武装，我们就可以在混沌学领域内自由地飞翔了。

§ 1.2 混沌的特征

混沌现象普遍存在于自然界中，并与我们的日常生活息息相关。大家都有过或看到过别人吸烟的经历：一支燃着的香烟，烟雾在平稳的气流中冉冉升起，突然卷曲成一团剧烈扰动的烟雾，四处飘散。仔细观察烟雾的上升过程可以发现，在烟雾上升的初始，是一种较平稳的层流状态气流；而上升到某些高度后，开始在烟雾边界出现一些极小的振动图案；然后，这些振动图案迅速增大，并开始出现一些卷曲结构；再向上走，这些卷曲就扰乱了整个烟雾。这个系统很明显对初始的微小扰动非常敏感，卷曲后形成的空间图案依赖于微小的扰动。这是在热气流加速