

高等数学

(下册)

徐玉民 唐宗贤 编

HIGHER MATHEMATICS



国防工业出版社

National Defense Industry Press

前 言

本书是根据编者多年的教学经验,紧紧围绕《高等数学课程教学基本要求》编写的。编写中突出基本理论、基本技能和基本方法的训练,并突出理论指导应用的过程。

本书在编写中,力图突出科学技术现代化发展对数学的需求。对工科学生来说,数学不仅是一种重要的“工具”或“方法”,也是一种思维模式,即“数学方式的理性思维”。数学训练在提高人的推理能力、抽象能力、分析能力和创造能力上,是其他训练难以替代的。

本书在概念、理论和方法的叙述和讲解上遵循承前启后、循序渐进的原则,具有结构严谨、叙述详细、通俗易懂等特点,便于自学。力图在下述方面对学生有所帮助:

1. 掌握必要的数学工具,用来处理和解决专业学习中普遍存在的数量化问题与逻辑推理问题。

2. 了解数学文化,提高数学素质。

3. 培养“数学方式的理性思维”,如抽象思维、逻辑思维等,使之潜移默化地影响人们的生活。

本书每章后面都有足够量的习题,习题分三部分:(1)复习概念时使用的题;(2)作为教师留给学生作业选用的基本要求题;(3)具有提高性质的题。本书具有广泛的应用性,它不仅适合作为大学本、专科教材,也可供报考研究生的读者在备考复习时参考。

为了加深对概念和方法的掌握,每章后面都有学习要点总结。每单元后面都备有检测题,全书上、下册共有八个单元十四套检测题。

在培养目标和要求不变的前提下,考虑到全国各独立学院的实际情况,本书的编写都力图使其更适合于这些学校的教学,达到良好的教学效果。

本书由燕山大学唐宗贤、徐玉民两位教授编写,下册由徐玉民、唐宗贤两位教授编写。在编写过程中得到了赵玉鹏、赵来玉、聂丽、姚文启各位教授的指导,在此表示感谢。

限于编者的水平,书中一定会存在不足,希望使用本书的教师和学生提出宝贵意见。

编 者

2005年6月

目 录

第八章 空间解析几何与向量代数	1
第一节 空间直角坐标系	1
一、空间直角坐标系	1
二、两点间的距离公式	2
第二节 向量及其线性运算	3
一、向量概念	3
二、向量的加减法	3
三、向量与数的乘法	4
第三节 向量的坐标	6
一、向量在轴上的投影	6
二、向量的坐标	7
三、向量的模、方向余弦的坐标表示	9
第四节 向量的乘积	10
一、两向量的数量积	10
二、两向量的向量积	12
三、向量的混合积	15
第五节 空间曲面的方程	16
一、曲面方程的概念	16
二、平行于坐标面的平面方程	17
三、球面方程	17
四、母线平行于坐标轴的柱面方程	18
五、旋转曲面方程	18
第六节 平面及其方程	20
一、平面的点法式方程	20
二、平面的一般方程	21
三、两平面的夹角	23
第七节 空间曲线的方程	24
一、空间曲线的一般方程	24

二、空间曲线的参数方程·····	25
三、空间曲线在坐标面上的投影·····	26
第八节 空间直线及其方程·····	27
一、直线的一般方程·····	27
二、直线的对称式方程·····	27
三、有关直线和平面的问题·····	29
第九节 二次曲面·····	34
一、椭球面·····	34
二、单叶双曲面·····	35
三、双叶双曲面·····	36
四、椭圆抛物面·····	37
五、双曲抛物面·····	37
六、二次锥面·····	38
习题八·····	39
本章学习要点·····	46
第五单元(空间解析几何与向量代数)检测题·····	48
第九章 多元函数及其微分法 ·····	51
第一节 多元函数的概念 二元函数的极限和连续性·····	51
一、平面点集 n 维空间·····	51
二、多元函数的概念·····	52
三、二元函数的极限·····	54
四、二元函数的连续性·····	57
第二节 偏导数·····	58
一、偏导数的定义及算法·····	58
二、高阶偏导数·····	62
第三节 全微分及其应用·····	64
一、全微分的概念·····	64
* 二、全微分在近似计算中的应用·····	68
第四节 多元函数复合函数的微分法·····	69
一、复合函数的全导数·····	69
二、复合函数偏导数·····	72
三、全微分形式的不变性·····	76
第五节 隐函数的微分法·····	77
一、一元隐函数求导公式·····	77
二、二元隐函数求导公式·····	79

三、方程组的情形	80
第六节 多元函数微分法在几何上的应用	85
一、空间曲线的切线及法平面	85
二、空间曲面的切平面与法线	88
第七节 方向导数与梯度	90
一、方向导数	90
* 二、梯度	92
第八节 多元函数极值及其求法	94
一、二元函数的极值概念	94
二、极值的必要条件	94
三、极值的充分条件	95
四、二元函数的最大值和最小值	96
五、条件极值	98
* 第九节 最小二乘法	102
习题九	105
本章学习要点	114
第六单元(多元函数微分学)检测题	116
第十章 重积分	121
第一节 二重积分的概念及性质	121
一、二重积分的概念	121
二、二重积分的性质	124
第二节 二重积分的计算	126
一、二重积分在直角坐标系中的计算	126
二、二重积分在极坐标系下的计算	132
* 三、二重积分的换元法	139
第三节 三重积分	143
一、三重积分的概念	143
二、三重积分在直角坐标系中的计算	144
三、三重积分在柱坐标系中的计算	149
四、三重积分在球面坐标系中的计算	151
* 五、三重积分的换元积分	157
第四节 重积分的应用	159
一、在几何上的应用	159
二、在物理上的应用	165
习题十	170

本章学习要点	181
第十一章 曲线积分与曲面积分	183
第一节 对弧长的曲线积分	183
一、对弧长曲线积分的概念及性质	183
二、对弧长曲线积分的计算法	185
第二节 对坐标的曲线积分	187
一、对坐标的曲线积分的概念及性质	187
二、对坐标的曲线积分的计算法	189
三、两类曲线积分的关系	193
第三节 格林公式 平面上曲线积分与路径无关的条件	193
一、格林(Green)公式	193
二、平面上曲线积分与路径无关的条件	199
第四节 全微分方程	202
一、全微分方程及其解的概念	202
二、二元函数全微分求积	203
三、全微分方程求解	207
* 四、积分因子	209
第五节 对面积的曲面积分	210
一、对面积的曲面积分的概念及性质	210
二、对面积的曲面积分的计算法	212
第六节 对坐标的曲面积分	214
一、对坐标的曲面积分的概念及性质	214
二、对坐标的曲面积分的计算法	218
第七节 高斯公式通量与散度	222
一、高斯(Gauss)公式	222
* 二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件	225
* 三、散度与通量	226
* 第八节 斯托克斯公式 环流量与旋度	227
一、斯托克斯(Stokes)公式	227
二、空间曲线积分与路径无关的条件	230
三、环流量与旋度	231
习题十一	232
本章学习要点	244
第七单元(多元函数积分学)检测题	245
第十二章 无穷级数	251

第一节 常数项级数概念和基本性质	251
一、常数项级数的基本概念	251
二、级数的基本性质	253
三、级数收敛的必要条件	255
第二节 正项级数收敛性的判别法	257
一、正项级数的概念及判别收敛的基本法则	257
二、正项级数的比较判别法	257
三、正项级数的比值判别法	262
四、正项级数的根值判别法	264
第三节 任意项级数收敛性的判别法	265
一、交错级数及其收敛性判别法	265
二、任意项级数的绝对收敛与条件收敛	267
第四节 幂级数	269
一、函数项级数概念及其收敛域	269
二、幂级数及其收敛域	270
三、幂级数的性质	274
第五节 函数的幂级数展开	277
一、泰勒(Taylor)公式	277
二、泰勒级数定理	282
三、初等函数的泰勒级数展开式	284
第六节 幂级数应用举例	291
一、欧拉(Euler)公式	291
* 二、近似计算	292
* 三、微分方程的幂级数解法	296
第七节 傅里叶(Fourier)级数	298
一、三角级数 三角函数系的正交性	298
二、函数展开成傅里叶级数	299
三、正弦级数和余弦级数	305
四、函数在任意区间上的傅里叶级数	309
习题十二	313
本章学习要点	325
第八单元(无穷级数)检测题	327
习题答案与提示	332

第八章 空间解析几何与向量代数

在中学数学中,我们已经学过平面解析几何。平面解析几何是建立在平面直角坐标系的基础上,使平面上的点与一对有序数组构成的一一对应关系,把平面上的曲线与方程对应起来,从而用代数方法研究几何问题。平面解析几何是学习一元微积分必不可少的知识。要学习多元函数微积分,则必须掌握空间解析几何。为此,我们应首先掌握工程技术中广泛应用的向量代数。它也是学习空间解析几何的重要工具。

第一节 空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

在空间一定点 O 引出三条互相垂直的数轴,它们有相同的坐标原点 O 和相同的长度单位,三个轴分别称为 Ox 轴(横轴)、 Oy 轴(纵轴)、 Oz 轴(竖轴),简称 x 轴、 y 轴和 z 轴,统称为坐标轴, O 称为坐标原点。三个轴的位置符合右手法则,即右手的大拇指、食指和中指互相垂直,若大拇指指向 Ox 轴正向,食指指向 Oy 轴正向,那么中指就指向 Oz 轴的正向,这样便建立了一个空间直角坐标系(见图 8-1)。

每两个坐标轴决定一个平面,称为坐标平面,显然有三个坐标平面。分别称为 xOy 面、 yOz 面和 zOx 面,简称为 xy 面、 yz 面和 zx 面。

三个坐标面把空间分为八个部分,称为八个卦限,依次用 I、II、III、IV、V、VI、VII 和 VIII 表示(见图 8-1)。

对于空间一点 M ,过 M 分别作与 x 轴、 y 轴和 z 轴垂直的平面,与各坐标轴的交点分别为 P 、 Q 和 R ,这三点在三轴上的坐标依次为 x 、 y 和 z (见图 8-2)。

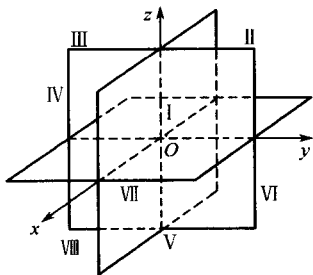


图 8-1

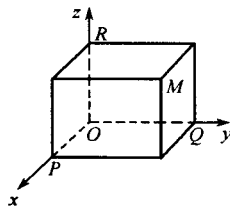


图 8-2

反之,给定一组有序的数 x 、 y 和 z , 分别在 x 轴、 y 轴和 z 轴上取坐标 x 、 y 和 z 的点 P 、 Q 和 R , 然后过 P 、 Q 和 R 分别作垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴的平面, 三个平面交于空间的一点 M 。这样我们便建立了空间点 M 和一组有序的数 x 、 y 和 z 之间一一对应关系。称 x 、 y 和 z 为点 M 的坐标, 记作 (x, y, z) , 并依次称为横标、纵标和竖标。

坐标面和坐标轴上的点有如下特征: 坐标面上的点有一个坐标为零, 如 xy 面上点有 $z = 0$; yz 面上点有 $x = 0$; zx 面上点有 $y = 0$ 。坐标轴上的点有两个坐标为零, 如 x 轴上点有 $y = z = 0$; y 轴上点有 $x = z = 0$; z 轴上点有 $x = y = 0$ 。

八个卦限中的点的坐标正负号由下表确定:

卦限	I	II	III	IV
符号	(+, +, +)	(-, +, +)	(-, -, +)	(+, -, +)
卦限	V	VI	VII	VIII
符号	(+, +, -)	(-, +, -)	(-, -, -)	(+, -, -)

读者不难看出: 两点关于坐标面对称, 其对应的坐标特征如何; 两点关于坐标轴对称, 其坐标特征如何; 两点关于坐标原点对称, 其坐标特征如何。以上问题作为练习留给读者思考。

二、两点间的距离公式

已知两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 求两点间的距离 $|M_1M_2|$ (见图 8-3)。

由图 8-3 可见

$$\begin{aligned} |M_1M_2|^2 &= |M_1N|^2 + |NM_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2 = \\ &= |P_1P_2|^2 + |Q_1Q_2|^2 + |R_1R_2|^2 \end{aligned}$$

由于 $|P_1P_2| = |x_2 - x_1|$, $|Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|$, $|R_1R_2| = |z_2 - z_1|$, 于是

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

特别地, O 到 $M(x, y, z)$ 的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

例 8-1-1 求两点 $M_1(2, 0, -2)$ 和 $M_2(-3, -1, 5)$ 间的距离。

解 $|M_1M_2| = \sqrt{(-3-2)^2 + (-1-0)^2 + (5+2)^2} = 5\sqrt{3}$

例 8-1-2 在 z 轴上求与两点 $A(-4, 1, 7)$ 和 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点。

解 设所求点为 $M(0, 0, z)$, 由已知条件有

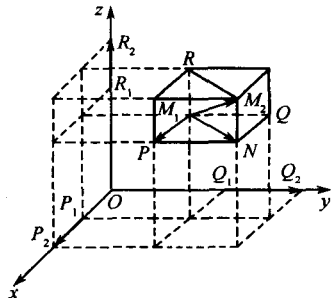


图 8-3

$$|MA| = |MB|$$

$$\text{即 } \sqrt{(0+4)^2 + (0-1)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (0-5)^2 + (z+2)^2}$$

$$\text{化简后得 } z = \frac{14}{9}$$

所以 M 点的坐标为 $(0, 0, \frac{14}{9})$ 。

第二节 向量及其线性运算

一、向量概念

在实际问题中,我们所研究的量有两类:一类是数量,它仅用数值大小就可以表示,如面积、体积、质量、温度等;另一类量,仅用数值大小表示还不够,还需要说明它们的方向,如力、速度、加速度等。

我们称既有大小又有方向的量为向量或矢量,向量用有向线段来表示。以 M_1 为起点 M_2 为终点的有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$, 也可以用一个字母表示,如 a (见图 8-4)。有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向为向量的方向。向量的大小称为向量的模,用 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ 或 $|a|$ 表示。模为 1 的向量称为单位向量,记作 $\overrightarrow{M_1M_2}^0$ 或 a^0 。模为零的向量称为零向量,记作 0 , 零向量的方向是不确定的。

在实际问题中,有些向量与起点有关,有些向量与起点无关。我们在数学上仅研究与起点无关的向量,这类向量称为自由向量。下面如无特殊说明,所研究的向量就是自由向量。

由上面的规定,我们认为两个向量 a 与 b 如果大小相等方向相同,那么它们就是两个相等的向量,记作 $a = b$,也就是说向量在空间可以任意进行平行移动。

二、向量的加减法

由力学上两个力的合力的平行四边形法则,我们来定义两个向量的加法。

1. 向量的加法

设两个向量 a 和 b 有共同的起点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$, 以 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 为邻边作平行四边形 $OACB$ (见图 8-5), 则称对角线向量 $\overrightarrow{OC}$ (记 $\overrightarrow{OC} = c$) 为 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 的和, 记作

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \text{ 或 } c = a + b$$

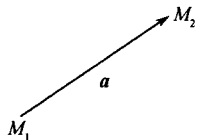


图 8-4

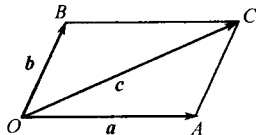


图 8-5

这种求和向量的方法称为平行四边形法则。

由图 8-5 可见 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC} = b$, 这又说明把 b 的起点放在 a 的终点上, 则以 a 的起点为起点, b 的终点为终点的向量 c 就是 a 与 b 的和, 这种求和方法称为三角形法则。

向量的加法满足如下运算规则:

$$(1) a + b = b + a \text{ (交换律)}$$

$$(2) (a + b) + c = a + (b + c) \text{ (结合律)}$$

交换律成立可用三角形法则说明, 由图 8-5 可见

$$b + a = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} = a + b$$

结合律成立可用图 8-6 说明:

$$\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{AB} = b$$

$$\overrightarrow{OB} = a + b, \overrightarrow{BC} = c, \text{ 所以}$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = (a + b) + c$$

$$\text{另一方面, } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = b + c, \text{ 所以 } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = a + (b + c)$$

故

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

2. 向量的减法

我们定义向量的减法为向量加法的逆运算。若 $b + c = a$, 则称 c 为 a 与 b 的差, 记作 $c = a - b$ 。

由图 8-7 可见, 将 a 与 b 的起点放在一起, 则以 b 的终点为起点, a 的终点为终点的向量就是 $a - b$ 。

我们把与向量 b 的模相等方向相反的向量称为 b 的负向量, 记作 $-b$ 。由图 8-7 可见

$$a - b = a + (-b) = c$$

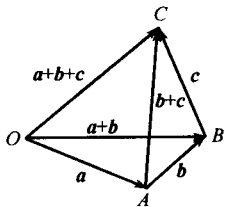


图 8-6

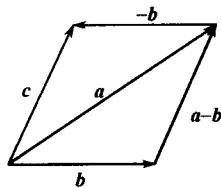


图 8-7

三、向量与数的乘法

设 λ 为一实数, a 为一向量, 我们定义 λa 为一向量: 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 同向, 且有 $|\lambda a| = |\lambda| |a| = \lambda |a|$; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 反向, 且有 $|\lambda a| = |\lambda| |a| = -\lambda |a|$; 当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda a = 0$ 。

由定义可得如下运算法则:

$$(1) \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a \quad (\lambda, \mu \text{ 为实数})$$

$$(2) (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$$

$$(3) \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$$

这些法则可通过向量与数量乘法的定义来说明,这里从略。

由向量与数的乘法,我们可以把单位向量和负向量表示如下:

(1) 设 a 为非零向量,与 a 方向相同模为 1 的单位向量可表示为

$$a^0 = \frac{1}{|a|}a, \text{ 即 } a = |a|a^0$$

(2) a 的负向量表示为 $-a = (-1)a$

例 8-2-1 设有平行四边形 $ABCD$, 其中 $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{AD} = b$, M 是对角线的交点。试用 a 与 b 表示向量 $\overrightarrow{MA}$ 、 $\overrightarrow{MB}$ 、 $\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$ (见图 8-8)。

$$\text{解} \quad \overrightarrow{MC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2} (a + b)$$

$$\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2} (b - a)$$

$$\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MC} = -\frac{1}{2} (a + b)$$

$$\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MD} = -\frac{1}{2} (a - b)$$

例 8-2-2 设有等腰梯形 $ABCD$ (见图 8-9), 其中 $\overrightarrow{AD} = b$, $\overrightarrow{AB} = a$, $\angle A = 60^\circ$ 。试用 a 和 b 表示 $\overrightarrow{BC}$ 、 $\overrightarrow{CD}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{BD}$ 。

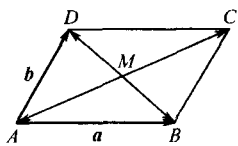


图 8-8

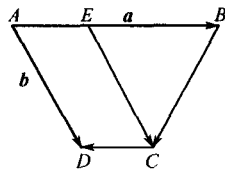


图 8-9

解 作 $EC \parallel AD$, $\triangle BEC$ 为等边三角形, 因此有 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EC} = b$, $\overrightarrow{EB} = |b|a^0 = \frac{|b|}{|a|}a$, 于是

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EB} = b - \frac{|b|}{|a|}a$$

$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AE} = -(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EB}) = -\left(a - \frac{|b|}{|a|}a\right) = \frac{|b|}{|a|}a - a$$

$$\overrightarrow{BD} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \mathbf{b} + \frac{|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}$$

第三节 向量的坐标

一、向量在轴上的投影

首先给出两向量的夹角概念。设有向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$, 在空间一点 O 作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, 称 $\angle AOB = \varphi$ 为两向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角, 其中 $0 \leq \varphi \leq \pi$, 记作 $(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})$ 或 $(\hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{a}})$ 。向量与轴的夹角也可类似定义。

所谓空间一点 M 在轴 u 上的投影, 即过点 M 作与轴 u 垂直的平面, 该平面与轴 u 的交点为 M' , 称点 M' 为点 M 在轴 u 上的投影。

现有一向量 $\overrightarrow{AB}$ 和轴 u , 向量的起点 A 和终点 B 在轴 u 上的投影分别为 A' 和 B' (见图 8-10), 称有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 的值 $A'B'$ 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影, 记作 $\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = A'B'$, 轴 u 称为投影轴。

注 轴上有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 的值是这样的一个数, 该数的绝对值等于 $\overrightarrow{A'B'}$ 的长度, 该数的符号由 $\overrightarrow{A'B'}$ 的方向是否与轴 u 的正向相同或相反决定, 相同取正号, 相反取负号, 由上述规定可得

$$A'B' = x_2 - x_1 \quad (8-1)$$

其中 x_1 和 x_2 分别为 A' 和 B' 在轴 u 上的坐标。

关于向量在轴上投影有下面两个定理。

定理 8-3-1 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影, 等于向量的模乘以轴与向量夹角 φ 的余弦, 即

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = A'B' = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi \quad (8-2)$$

证 如图 8-11 所示, 过 A 引轴 u' 与轴 u 平行且有相同的正方向, 那么 $\overrightarrow{AB}$ 与轴 u' 的夹角也等于 φ , 且有

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = \text{Prj}_{u'} \overrightarrow{AB}$$

但是

$$\text{Prj}_{u'} \overrightarrow{AB} = AB'' = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi$$

所以

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi$$

向量在轴上的投影是一个数, 当向量和轴的夹角为锐角时投影为正, 成钝角时投影为负, 成直角时投影为零。

由定理 8-3-1 可知, 两向量相等, 它们在轴的投影也是相等的。

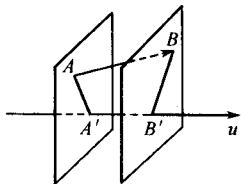


图 8-10

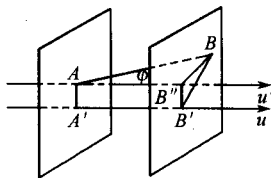


图 8-11

定理 8-3-2 有限个向量的和在轴上的投影等于各个向量在轴上的投影之和,即

$$\text{Prj}_u(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n) = \text{Prj}_u \mathbf{a}_1 + \text{Prj}_u \mathbf{a}_2 + \cdots + \text{Prj}_u \mathbf{a}_n \quad (8-3)$$

证明从略。

二、向量的坐标

下面我们建立向量和一组有序数之间的对应关系。

设向量 $\mathbf{a}$ 的起点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 终点为 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 即 $\overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{a}$, M_1 在三个轴上的投影分别为 P_1, Q_1, R_1 , M_2 在三个轴上的投影分别为 P_2, Q_2, R_2 , 设 a_x, a_y, a_z 分别为 $\mathbf{a}$ 在三个坐标轴上的投影, 即 a_x 为有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的值, a_y 为有向线段 $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ 的值, a_z 为有向线段 $\overrightarrow{R_1R_2}$ 的值, 由式(8-1)可知

$$a_x = x_2 - x_1, a_y = y_2 - y_1, a_z = z_2 - z_1$$

由图 8-3 可见

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1N} + \overrightarrow{NM_2} = \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{M_1Q} + \overrightarrow{M_1R} = \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{Q_1Q_2} + \overrightarrow{R_1R_2} \quad (8-4)$$

称 $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{Q_1Q_2}, \overrightarrow{R_1R_2}$ 为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 x, y, z 轴上的分向量。

若以 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别表示 x, y, z 轴正向的单位向量, 并称它们为基本单位向量, 则有

$$\overrightarrow{P_1P_2} = a_x \mathbf{i} = (x_2 - x_1) \mathbf{i}$$

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = a_y \mathbf{j} = (y_2 - y_1) \mathbf{j}$$

$$\overrightarrow{R_1R_2} = a_z \mathbf{k} = (z_2 - z_1) \mathbf{k}$$

$$\text{所以} \quad \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1) \mathbf{i} + (y_2 - y_1) \mathbf{j} + (z_2 - z_1) \mathbf{k} \quad (8-5)$$

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (8-6)$$

称式(8-5)或式(8-6)为向量 $\mathbf{a}$ 按基本单位向量的分解式。 a_x, a_y, a_z 称为 $\mathbf{a}$ 的坐标, 把表达式

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$$

称为 $\mathbf{a}$ 的坐标表达式, 即

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

由式(8-6)可见,向量 $\mathbf{a}$ 的坐标即为向量 $\mathbf{a}$ 在三个坐标轴上的投影。由式(8-5)可知,如果向量的起点和终点的坐标已知,则向量的坐标等于终点的坐标减去起点的坐标。另外,若两向量相等,当且仅当它们的坐标对应相等。

特殊地,若向量的起点为 O ,终点为 $M(x, y, z)$,则向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表示式为 $\overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$,这说明,如果向量的起点在原点,则终点的坐标就是向量的坐标。 $\overrightarrow{OM}$ 又称为 M 点关于 O 点的向径,记作 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ 。

利用向量的坐标表示式,可得向量的加法、减法和数乘运算如下:

设 $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, λ 为数,则有

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \pm \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \pm (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = \\ &= (a_x \pm b_x) \mathbf{i} + (a_y \pm b_y) \mathbf{j} + (a_z \pm b_z) \mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) = \lambda a_x \mathbf{i} + \lambda a_y \mathbf{j} + \lambda a_z \mathbf{k}$$

$$\text{即} \quad \mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\} \quad (8-7)$$

$$\lambda \mathbf{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\} \quad (8-8)$$

例 8-3-1 已知 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, M 分 $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 为定比 λ ,即

$$\frac{M_1 M}{M M_2} = \lambda \quad (\lambda \neq -1)$$

求 $M(x, y, z)$ 的坐标。

解 因为 $\overrightarrow{M_1 M} = \lambda \overrightarrow{M M_2}$, 而

$$\overrightarrow{M_1 M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$$

$$\overrightarrow{M M_2} = \{x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z\}$$

于是

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), y - y_1 = \lambda(y_2 - y), z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$$

$$\text{最后求得} \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad (8-9)$$

特殊地,当 $\lambda = 1$ 时,得中点坐标公式

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

例 8-3-2 已知 $M_1(2, -2, 5)$, $M_2(-1, 6, 7)$, 求 $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 在三个轴上的投影、分向量和坐标表示式。

解 $\overrightarrow{M_1 M_2} = \{-3, 8, 2\} = -3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, 故 $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 在三个轴上的投影依次为 -3 、

8.2, 分向量依次为 $-3i, 8j, 2k$ 。

三、向量的模、方向余弦的坐标表示

现在, 我们用向量的坐标表示式来表示出向量的模及方向。

对于非零向量 $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$, 我们用它与三个坐标轴正向的夹角 α, β, γ 来表示向量的方向 ($0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi, 0 \leq \gamma \leq \pi$), 称 α, β, γ 为向量 $\mathbf{a}$ 的方向角。通常也用方向角的余弦来表示向量的方向, 称 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为方向余弦。向量的模 $|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{M_1M_2}|$ 也就是两点 M_1 和 M_2 之间的距离。

设 $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 其中 $a_x = x_2 - x_1, a_y = y_2 - y_1, a_z = z_2 - z_1$, 则

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

即

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (8-10)$$

由定理 8-3-1 可知 $a_x = |\mathbf{a}| \cos\alpha, a_y = |\mathbf{a}| \cos\beta, a_z = |\mathbf{a}| \cos\gamma$

所以

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos\beta &= \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \end{aligned} \quad (8-11)$$

由式(8-11)可得

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad (8-12)$$

$$\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \{a_x, a_y, a_z\} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}$$

这说明 $\mathbf{a}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 是与 $\mathbf{a}$ 方向相同的单位向量。

例 8-3-3 已知 $P(2, -3, 5), Q(-1, 0, 2)$ 求 $\overrightarrow{PQ}$ 、 $|\overrightarrow{PQ}|$ 、 $\overrightarrow{PQ}^0$ 的方向余弦和方向角, $\overrightarrow{PQ}$ 方向的单位向量。

解 $\overrightarrow{PQ} = \{-3, 3, -3\}$, $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{3}$

$$\cos\alpha = -\frac{3}{3\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cos\gamma = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

所以

$$\alpha = \gamma = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 125^\circ 16', \beta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 54^\circ 44'$$

$$\overrightarrow{PQ}^0 = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

例 8-3-4 设有三个力 $F_1 = \{-2, 3, -2\}$, $F_2 = \{5, -2, 5\}$, $F_3 = \{4, 3, 1\}$ 作用于一点, 试求合力 R 的大小和方向。

解 因为

$$R = F_1 + F_2 + F_3 = \{7, 4, 4\}$$

所以

$$|R| = \sqrt{7^2 + 4^2 + 4^2} = 9, \cos\alpha = \frac{7}{9}, \cos\beta = \frac{4}{9}, \cos\gamma = \frac{4}{9}$$

第四节 向量的乘积

关于向量与向量的乘积, 根据实际问题的需要, 我们定义了两种乘积, 即向量的数量积和向量的向量积。

一、两向量的数量积

设有一物体在常力 F 的作用下沿直线由点 A 移动到点 B , 求力 F 对物体所作的功 W (见图 8-12)。

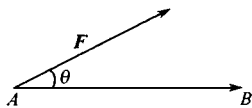


图 8-12

由物理学知

$$W = |F| |\overrightarrow{AB}| \cos\theta$$

其中 θ 为 F 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角。由此可见, 这是由两个向量确定一个数量的运算。为此, 给出如下定义。

1. 数量积的定义

两向量 a 与 b 的模和夹角余弦的乘积称为两向量的数量积, 记作 $a \cdot b$, 即

$$a \cdot b = |a| |b| \cos(\widehat{a, b}) \quad (8-13)$$

由于 $|b| \cos(\widehat{a, b}) = \text{Prj}_a b$, $|a| \cos(\widehat{a, b}) = \text{Prj}_b a$ 所以式(8-13) 又可写成

$$a \cdot b = |a| \text{Prj}_a b = |b| \text{Prj}_b a \quad (8-14)$$

由两向量数量积的定义可知, 前面讨论的功可用数量积表示为

$$W = F \cdot \overrightarrow{AB}$$

2. 数量积的性质和运算法则

由数量积的定义可推出如下性质和运算法则:

$$(1) a \cdot a = |a|^2$$