高等数学

（下册）

徐玉民　唐宗贤　编

HIGHER MATHEMATICS

国防工业出版社

National Defense Industry Press

前　言

本书是根据编者多年的教学经验，紧紧围绕《高等数学课程教学基本要求》编写的。编写中突出基本理论、基本技能和基本方法的训练，并突出理论指导应用的过程。

本书在编写中，力图突出科学技术现代化发展对数学的需求。对工科学生来说，数学不仅是一种重要的"工具"或"方法"，也是一种思维模式，即"数学方式的理性思维"。数学训练在提高人的推理能力、抽象能力、分析能力和创造能力上，是其他训练难以替代的。

本书在概念、理论和方法的叙述和讲解上遵循承前启后、循序渐进的原则，具有结构严谨、叙述详细、通俗易懂等特点，便于自学。力图在下述方面对学生有所帮助：

1. 掌握必要的数学工具，用来处理和解决专业学习中普遍存在的数量化问题与逻辑推理问题。

2. 了解数学文化，提高数学素质。

3. 培养"数学方式的理性思维"，如抽象思维、逻辑思维等，使之潜移默化地影响人们的生活。

本书每章后面都有足够量的习题，习题分三部分：(1)复习概念时使用的题；(2)作为教师留给学生作业选用的基本要求题；(3)具有提高性质的题。本书具有广泛的应用性，它不仅适合作为大学本、专科教材，也可供报考研究生的读者在备考复习时参考。

为了加深对概念和方法的掌握，每章后面都有学习要点总结。每单元后面都备有检测题，全书上、下册共有八个单元十四套检测题。

在培养目标和要求不变的前提下，考虑到全国各独立学院的实际情况，本书的编写都力图使其更适合于这些学校的教学，达到良好的教学效果。

本书由燕山大学唐宗贤、徐玉民两位教授编写，下册由徐玉民、唐宗贤两位教授编写。在编写过程中得到了赵玉鹏、赵来玉、聂丽、姚文启各位教授的指导，在此表示感谢。

限由于编者的水平，书中一定会存在不足，希望使用本书的教师和学生提出宝贵意见。

编　者

2005 年 6 月

目　　录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第八章　空间解析几何与向量代数

在中学数学中，我们已经学过平面解析几何。平面解析几何是建立在平面直角坐标系的基础上，使平面上的点与一对有序数组构成的一一对应关系，把平面上的曲线与方程对应起来，从而用代数方法研究几何问题。平面解析几何是学习一元微积分必不可少的知识。要学习多元函数微积分，则必须掌握空间解析几何。为此，我们应首先掌握工程技术中广泛应用的向量代数。它也是学习空间解析几何的重要工具。

第一节　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

在空间一定点 O 引出三条互相垂直的数轴，它们有相同的坐标原点 O 和相同的长度单位，三个轴分别称为 Ox 轴(横轴)、Oy 轴(纵轴)、Oz 轴(竖轴)，简称 x 轴、y 轴和 z 轴，统称为坐标轴，O 称为坐标原点。三个轴的位置符合右手法则，即右手的大拇指、食指和中指互相垂直，若大拇指指向 Ox 轴正向，食指指向 Oy 轴正向，那么中指就指向 Oz 轴的正向，这样便建立了一个空间直角坐标系(见图 8-1)。

每两个坐标轴决定一个平面，称为坐标平面，显然有三个坐标平面。分别称为 xOy 面、yOz 面和 zOx 面，简称为 xy 面、yz 面和 zx 面。

三个坐标面把空间分为八个部分，称为八个卦限，依次用 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ 和 Ⅷ 表示(见图 8-1)。

对于空间一点 M，过 M 分别作与 x 轴、y 轴和 z 轴垂直的平面，与各坐标轴的交点分别为 P、Q 和 R，这三点在三轴上的坐标依次为 x、y 和 z(见图 8-2)。

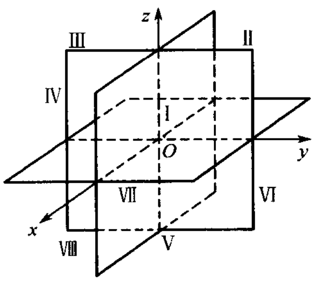

图 8-1

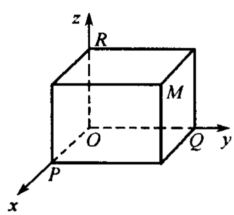

图 8-2

反之,给定一组有序的数 x、y 和 z,分别在 x 轴、y 轴和 z 轴上取坐标 x、y 和 z 的点 P、Q 和 R,然后过 P、Q 和 R 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面,三个平面交于空间的一点 M。这样我们便建立了空间点 M 和一组有序的数 x、y 和 z 之间一一对应关系。称 x、y 和 z 为点 M 的坐标,记作 (x,y,z),并依次称为横标、纵标和竖标。

坐标面和坐标轴上的点有如下特征:坐标面上的点有一个坐标为零,如 xy 面上点有 $z=0$;yz 面上点有 $x=0$;zx 面上点有 $y=0$。坐标轴上的点有两个坐标为零,如 x 轴上点有 $y=z=0$;y 轴上点有 $x=z=0$;z 轴上点有 $x=y=0$。

八个卦限中的点的坐标正负号由下表确定:

卦限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
符号	$(+,+,+)$	$(-,+,+)$	$(-,-,+)$	$(+,-,+)$
卦限	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
符号	$(+,+,-)$	$(-,+,-)$	$(-,-,-)$	$(+,-,-)$

读者不难看出:两点关于坐标面对称,其对应的坐标特征如何;两点关于坐标轴对称,其坐标特征如何;两点关于坐标原点对称,其坐标特征如何。以上问题作为练习留给读者思考。

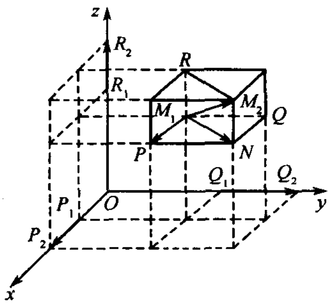

图 8-3

二、两点间的距离公式

已知两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,求两点间的距离 $|M_1M_2|$(见图 8-3)。

由图 8-3 可见

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2 =$$

$$|P_1P_2|^2 + |Q_1Q_2|^2 + |R_1R_2|^2$$

由于 $|P_1P_2| = |x_2 - x_1|$, $|Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|$, $|R_1R_2| = |z_2 - z_1|$,于是

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

特别地,O 到 $M(x,y,z)$ 的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

例 8-1-1 求两点 $M_1(2,0,-2)$ 和 $M_2(-3,-1,5)$ 间的距离。

解 $|M_1M_2| = \sqrt{(-3-2)^2 + (-1-0)^2 + (5+2)^2} = 5\sqrt{3}$

例 8-1-2 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点。

解 设所求点为 $M(0,0,z)$,由已知条件有

$$|MA| = |MB|$$

即 $$\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2} = \sqrt{(0-3)^2+(0-5)^2+(z+2)^2}$$

化简后得 $$z = \frac{14}{9}$$

所以 M 点的坐标为 $\left(0,0,\frac{14}{9}\right)$。

第二节 向量及其线性运算

一、向量概念

在实际问题中，我们所研究的量有两类：一类是数量，它仅用数值大小就可以表示，如面积、体积、质量、温度等；另一类量，仅用数值大小表示还不够，还需要说明它们的方向，如力、速度、加速度等。

我们称既有大小又有方向的量为向量或矢量，向量用有向线段来表示。以 M_1 为起点 M_2 为终点的有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$，也可以用一个字母表示，如 $\boldsymbol{a}$（见图 8-4）。有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向为向量的方向。向量的大小称为向量的模，用 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$ 表示。模为 1 的向量称为单位向量，记作 $\overrightarrow{M_1M_2^0}$ 或 $\boldsymbol{a}^0$。模为零的向量称为零向量，记作 $\boldsymbol{0}$，零向量的方向是不确定的。

在实际问题中，有些向量与起点有关，有些向量与起点无关。我们在数学上仅研究与起点无关的向量，这类向量称为自由向量。下面如无特殊说明，所研究的向量就是自由向量。

由上面的规定，我们认为两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 如果大小相等方向相同，那么它们就是两个相等的向量，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，也就是说向量在空间可以任意进行平行移动。

二、向量的加减法

由力学上两个力的合力的平行四边形法则，我们来定义两个向量的加法。

1. 向量的加法

设两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 有共同的起点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，以 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 为邻边作平行四边形 $OACB$（见图 8-5），则称对角线向量 $\overrightarrow{OC}$（记 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$）为 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 的和，记作

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} \text{ 或 } \boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

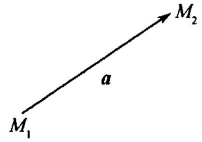

图 8-4

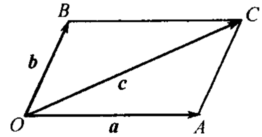

图 8-5

这种求和向量的方法称为平行四边形法则。

由图 8-5 可见$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,这又说明把 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在$\boldsymbol{a}$ 的终点上,则以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点,$\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量$\boldsymbol{c}$ 就是$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,这种求和方法称为三角形法则。

向量的加法满足如下运算规则:

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(交换律)

(2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(结合律)

交换律成立可用三角形法则说明,由图 8-5 可见

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

结合律成立可用图 8-6 说明:

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$$

$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$,所以

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$$

另一方面,$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,所以$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

故
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

2. 向量的减法

我们定义向量的减法为向量加法的逆运算。若 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$,则称 $\boldsymbol{c}$ 为$\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$ 的差,记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$。

由图8-7可见,将 $\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起,则以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点,$\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$。

我们把与向量 $\boldsymbol{b}$ 的模相等方向相反的向量称为$\boldsymbol{b}$ 的负向量,记作 $-\boldsymbol{b}$。由图 8-7 可见

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}$$

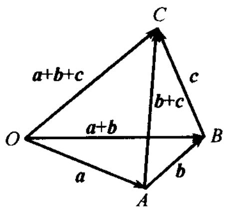

图 8-6

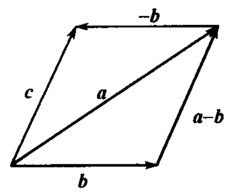

图 8-7

三、向量与数的乘法

设 λ 为一实数,$\boldsymbol{a}$ 为一向量,我们定义 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为一向量:当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向,且有 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$;当$\lambda<0$时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{a}$ 反向,且有 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=-\lambda|\boldsymbol{a}|$;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=0$。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

由定义可得如下运算法则：

(1)$\lambda(\mu \boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ （λ、μ 为实数）

(2)$(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$

(3)$\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$

这些法则可通过向量与数量乘法的定义来说明，这里从略。

由向量与数的乘法，我们可以把单位向量和负向量表示如下：

(1) 设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同模为 1 的单位向量可表示为

$$\boldsymbol{a}^0 = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\text{，即 } \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$$

(2)$\boldsymbol{a}$ 的负向量表示为 $-\boldsymbol{a} = (-1)\boldsymbol{a}$

例 8-2-1　设有平行四边形 $ABCD$，其中$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$，$M$ 是对角线的交点。试用 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$(见图 8-8)。

解
$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$$
$$\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$
$$\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MC} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$$
$$\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MD} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$$

例 8-2-2　设有等腰梯形 $ABCD$(见图 8-9)，其中$\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$，$\angle A = 60°$。试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{AC}$ 和$\overrightarrow{BD}$。

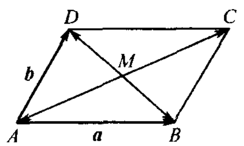

图 8-8

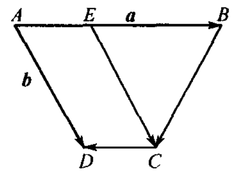

图 8-9

解　作 $EC \parallel AD$，$\triangle BEC$ 为等边三角形，因此有$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EC} = \boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{EB} = |\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}^0 = \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$，于是

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EB} = \boldsymbol{b} - \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$$

$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AE} = -(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EB}) = -\left(\boldsymbol{a} - \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\right) = \frac{|\boldsymbol{b}| - |\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$$

$$\overrightarrow{BD} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \boldsymbol{b} + \frac{|\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$$

第三节　向量的坐标

一、向量在轴上的投影

首先给出两向量的夹角概念。设有向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，在空间一点 O 作 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$，称 $\angle AOB = \varphi$ 为两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，其中 $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$，记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$。向量与轴的夹角也可类似定义。

所谓空间一点 M 在轴 u 上的投影，即过点 M 作与轴 u 垂直的平面，该平面与轴 u 的交点为 M'，称点 M' 为点 M 在轴 u 上的投影。

现有一向量 $\overrightarrow{AB}$ 和轴 u，向量的起点 A 和终点 B 在轴 u 上的投影分别为 A' 和 B'（见图 8-10），称有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 的值 $A'B'$ 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = A'B'$，轴 u 称为投影轴。

注　轴上有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 的值是这样的一个数，该数的绝对值等于 $\overrightarrow{A'B'}$ 的长度，该数的符号由 $\overrightarrow{A'B'}$ 的方向是否与轴 u 的正向相同或相反决定，相同取正号，相反取负号，由上述规定可得

$$A'B' = x_2 - x_1 \tag{8-1}$$

其中 x_1 和 x_2 分别为 A' 和 B' 在轴 u 上的坐标。

关于向量在轴上投影有下面两个定理。

定理 8-3-1　向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影，等于向量的模乘以轴与向量夹角 φ 的余弦，即

$$\mathrm{Prj}_{u'} \overrightarrow{AB} = A'B' = |\overrightarrow{AB}| \cos\varphi \tag{8-2}$$

证　如图 8-11 所示，过 A 引轴 u' 与轴 u 平行且有相同的正方向，那么 $\overrightarrow{AB}$ 与轴 u' 的夹角也等于 φ，且有

$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = \mathrm{Prj}_{u'} \overrightarrow{AB}$$

但是
$$\mathrm{Prj}_{u'} \overrightarrow{AB} = AB'' = |\overrightarrow{AB}| \cos\varphi$$

所以
$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |AB| \cos\varphi$$

向量在轴上的投影是一个数，当向量和轴的夹角为锐角时投影为正，成钝角时投影为负，成直角时投影为零。

由定理 8-3-1 可知，两向量相等，它们在轴的投影也是相等的。

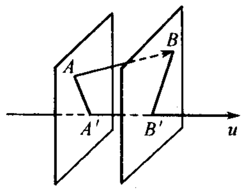

图 8-10

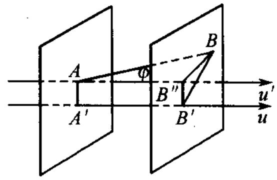

图 8-11

定理 8-3-2 有限个向量的和在轴上的投影等于各个向量在轴上的投影之和,即

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_n \tag{8-3}$$

证明从略。

二、向量的坐标

下面我们建立向量和一组有序数之间的对应关系。

设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,即 $\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{a}$,$M_1$ 在三个轴上的投影分别为 P_1、Q_1、R_1,M_2 在三个轴上的投影分别为 P_2、Q_2、R_2,设 a_x、a_y、a_z 分别为 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影,即 a_x 为有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的值,a_y 为有向线段 $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ 的值,a_z 为有向线段 $\overrightarrow{R_1R_2}$ 的值,由式(8-1)可知

$$a_x=x_2-x_1,a_y=y_2-y_1,a_z=z_2-z_1$$

由图 8-3 可见

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1N}+\overrightarrow{NM_2}=\overrightarrow{M_1P}+\overrightarrow{M_1Q}+\overrightarrow{M_1R}=\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{Q_1Q_2}+\overrightarrow{R_1R_2} \tag{8-4}$$

称 $\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overrightarrow{Q_1Q_2}$、$\overrightarrow{R_1R_2}$ 为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 x、y、z 轴上的分向量。

若以 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别表示 x、y、z 轴正向的单位向量,并称它们为基本单位向量,则有

$$\overrightarrow{P_1P_2}=a_x\boldsymbol{i}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}$$

$$\overrightarrow{Q_1Q_2}=a_y\boldsymbol{j}=(y_2-y_1)\boldsymbol{j}$$

$$\overrightarrow{R_2R_1}=a_z\boldsymbol{k}=(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$

所以

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(x_2-z_1)\boldsymbol{k} \tag{8-5}$$

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{8-6}$$

称式(8-5)或式(8-6)为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的分解式。a_x、a_y、a_z 称为 $\boldsymbol{a}$ 的坐标,把表达式

$$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$$

称为 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表达式,即

$$\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

由式(8-6)可见，向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标即为向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影。由式(8-5)可知，如果向量的起点和终点的坐标已知，则向量的坐标等于终点的坐标减去起点的坐标。另外，若两向量相等，当且仅当它们的坐标对应相等。

特殊地，若向量的起点为 O，终点为 $M(x,y,z)$，则向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表示式为 $\overrightarrow{OM} = \{x,y,z\}$，这说明，如果向量的起点在原点，则终点的坐标就是向量的坐标。$\overrightarrow{OM}$ 又称为 M 点关于 O 点的向径，记作 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$。

利用向量的坐标表示式，可得向量的加法、减法和数乘运算如下：

设 $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$，$\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$，$\lambda$ 为数，则有

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) \pm (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) =$$

$$(a_x \pm b_x)\boldsymbol{i} + (a_y \pm b_y)\boldsymbol{j} + (a_z \pm b_z)\boldsymbol{k}$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) = \lambda a_x\boldsymbol{i} + \lambda a_y\boldsymbol{j} + \lambda a_z\boldsymbol{k}$$

即

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\} \tag{8-7}$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\} \tag{8-8}$$

例 8-3-1 已知 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，M 分 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 为定比 λ，即

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda \quad (\lambda \neq -1)$$

求 $M(x,y,z)$ 的坐标。

解 因为 $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$，而

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$$

$$\overrightarrow{MM_2} = \{x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z\}$$

于是

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), y - y_1 = \lambda(y_2 - y), z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$$

最后求得

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \tag{8-9}$$

特殊地，当 $\lambda = 1$ 时，得中点坐标公式

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

例 8-3-2 已知 $M_1(2,-2,5)$，$M_2(-1,6,7)$，求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在三个轴上的投影、分向量和坐标表示式。

解 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-3,8,2\} = -3\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$，故 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在三个轴上的投影依次为 -3、

8、2,分向量依次为 $-3\boldsymbol{i}$、$8\boldsymbol{j}$、$2\boldsymbol{k}$。

三、向量的模、方向余弦的坐标表示

现在,我们用向量的坐标表示式来表示出向量的模及方向。

对于非零向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$,我们用它与三个坐标轴正向的夹角 α、β、γ 来表示向量的方向($0\leqslant\alpha\leqslant\pi,0\leqslant\beta\leqslant\pi,0\leqslant\gamma\leqslant\pi$),称 α、β、γ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角。通常也用方向角的余弦来表示向量的方向,称 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为方向余弦。向量的模 $|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{M_1M_2}|$ 也就是两点 M_1 和 M_2 之间的距离。

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,$M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 其中 $a_x=x_2-x_1$,$a_y=y_2-y_1$,$a_z=z_2-z_1$,则

$$\overline{M_1M_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

即

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{8-10}$$

由定理 8-3-1 可知 $a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha$,$a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta$,$a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$

所以

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\\ \cos\beta&=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\\ \cos\gamma&=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\end{aligned} \tag{8-11}$$

由式(8-11)可得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{8-12}$$

$$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\{a_x,a_y,a_z\}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$$

这说明 $\boldsymbol{a}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量。

例 8-3-3 已知 $P(2,-3,5)$,$Q(-1,0,2)$ 求$\overrightarrow{PQ}$、$|\overrightarrow{PQ}|$、$\overrightarrow{PQ}^0$ 的方向余弦和方向角,$\overrightarrow{PQ}$ 方向的单位向量。

解 $\overrightarrow{PQ}=\{-3,3,-3\}$,$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(-3)^2+3^2+(-3)^2}=3\sqrt{3}$

$$\cos\alpha=-\frac{3}{3\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3},\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{3},\cos\gamma=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

所以

$$\alpha=\gamma=\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\approx125°16',\beta=\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\approx54°44'$$

$$\overrightarrow{PQ}^0 = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$$

例 8-3-4 设有三个力 $\boldsymbol{F}_1 = \{-2,3,-2\}$，$\boldsymbol{F}_2 = \{5,-2,5\}$，$\boldsymbol{F}_3 = \{4,3,1\}$ 作用于一点，试求合力 $\boldsymbol{R}$ 的大小和方向。

解 因为

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = \{7,4,4\}$$

所以

$$|\boldsymbol{R}| = \sqrt{7^2 + 4^2 + 4^2} = 9, \cos\alpha = \frac{7}{9}, \cos\beta = \frac{4}{9}, \cos\gamma = \frac{4}{9}$$

第四节 向量的乘积

关于向量与向量的乘积，根据实际问题的需要，我们定义了两种乘积，即向量的数量积和向量的向量积。

一、两向量的数量积

设有一物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线由点 A 移动到点 B，求力 $\boldsymbol{F}$ 对物体所作的功 W(见图 8-12)。

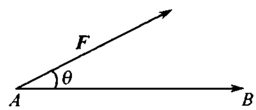

图 8-12

由物理学知

$$W = |\boldsymbol{F}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角。由此可见，这是由两个向量确定一个数量的运算。为此，给出如下定义。

1. 数量积的定义

两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模和夹角余弦的乘积称为两向量的数量积，记作 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) \tag{8-13}$$

由于 $|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}$ 所以式(8-13) 又可写成

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a} \tag{8-14}$$

由两向量数量积的定义可知，前面讨论的功可用数量积表示为

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

2. 数量积的性质和运算法则

由数量积的定义可推出如下性质和运算法则：

(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com