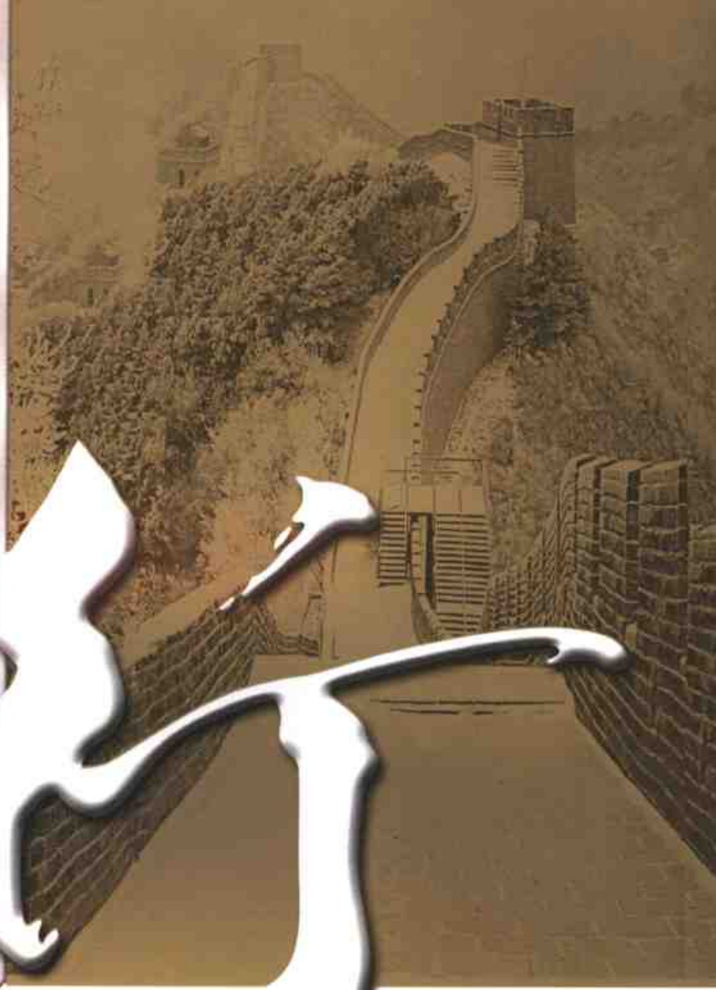


1977-2007 恢复高考30年 黄金纪念精品版

高考神梯 状元金桥

配套人民教育出版社试验修订教材

名师伴你行

MINGSHIBANNIXING

数学 上册（必修）

高二同步创新版

伴你春夏秋冬 伴你金榜题名

光明日报出版社

配套人民教育出版社试验修订教材

高二同步版

名师伴你行

MINGSHI BANNIXING

丛书顾问：顾振彪　蔡上鹤

　　　　　赵大鹏　明知白

丛书主编：张连生

执行主编：辛勤之

本册主编：许皎洁

本册副主编：孙长征　刘一凡

本册编委：许皎洁　孙长征　刘一凡

　　　　　窦一鸣　王吉祥　马戌卫

　　　　　魏玉兰　除永成　高建新

　　　　　谭洪祯

数学

(上册 必修)

2006-2007

光明日报出版社

图书在版编目（CIP）数据

名师伴你行.高二数学/张连生主编.—北京：光明日报出版社，2006.1

ISBN 7-80206-216-0

Ⅰ.名… Ⅱ.张… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第000380号

《名师伴你行》系列丛书

书　　名：名师伴你行·高二同步书　（数学）

著　　者：张连生

责任编辑：杨宝发　　责任印制：柴自邦

封面设计：佳禾设计室　　责任校对：谭子衿

出版发行：光明日报出版社

地　　址：北京市崇文区珠市口东大街5号，邮编：100062

电　　话：010—67078945（发行），67078235（邮购）

传　　真：010—67078227，67078233，67078255

网　　址：http://book.gmw.cn

Email:gmcbs@gmw.cn

法律顾问：北京盈科律师事务所郝惠珍律师

经　　销：全国各地新华书店

印　　刷：河间市红兴印刷厂

本书如有破损、缺页、装订错误，请与印刷厂联系调换

规　　格：850×1168mm　　开　　本：1/16开

印　　张：170　　字　　数：5500千字

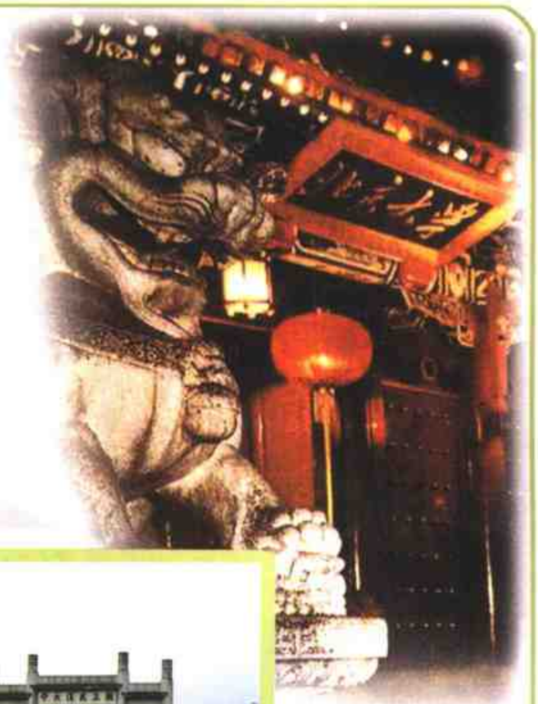
版　　次：2006年1月第1版　　印　　次：2006年1月第1次印刷

印　　数：1—10000册

书　　号：ISBN 7—80206—216—0

总 定 价：280.00元

名师伴你春夏秋冬
名师伴你金榜题名
一流学府任你问鼎
高考赐你锦绣前程



0:0 对于每个人都是机会……

《名师伴你行》系列丛书顾问

问渠哪得清如许 为有源头活水来
中国名师掌帅印 考坛搭起大舞台

顾振彪

1942年12月出生。上海嘉定人。1965年毕业于华东师大中文系。曾任人民教育出版社中语室主任，现任人民教育出版社编审、课程教材研究所研究员，教育部语文课程标准研制组核心成员，参与编写初、高中语文教材，人教社全日制普通高中语文教材（必修）主编。

蔡上鹤

著名教材专家。1942年12月出生，1964年8月毕业于华东师范大学数学系。人民教育出版社编审，课程教材研究所研究员，曾多次参加全国高考数学学科命题，参与编写全国通用的中学数学教科书，人教版九年义务教育中学数学教材主编、《数学通报》编委、《中小学教材教学》副主编。

名师伴你行 希望在心中

2006—2007

赵大鹏

满族，1964年毕业于北京师范学院（首都师范大学）中文系。中学语文特级教师，现任北京市东城区教研科研中心高中语文教研员。《九年义务教育初中语文教学大纲》编写组成员，参与编写人民教育出版社初、高中教材。

明知白

1963年毕业于北京大学数学系。北京东城区教研中心教研员，数学教研室主任，北京数学会常务理事、副理事长，中国数学会《数学的实践与认识》与《数学通报》编委，中国数学奥林匹克高级教练。参加多项国家级教材的编写，参与制定教育部考试中心的《数学科考试说明》，多次参加高考、中考命题及各级数学竞赛命题。

MINGSHI BANNIXING

丛书序言

建设创新型国家是时代赋予我们的光荣使命，是我们这一代人必须承担的历史责任。几千年来，中华民族创造了灿烂辉煌的优秀文化，以众多的创新成就为人类文明进步作出了巨大贡献。回顾历史，展望未来，我们完全有信心、有能力为人类文明进步作出新的更大的贡献。全党全国各族人民要统一思想、坚定信心、奋发努力、扎实苦干，坚持走中国特色自主创新道路，以只争朝夕的精神为建设创新型国家而努力奋斗！

——摘自2006年1月9日胡锦涛同志在全国科学技术大会上的讲话

“艳卉奇葩梅苦来，乍惊春绿腊前开。”1977年，邓小平同志招集教育部有关负责人谈话，提出恢复中断十年的高考制度的思路，恢复高考的工作当年启动，神州大地迎来了科学的春天，莘莘学子迎来了灿烂的明天。从1977年到2006年，中国高考经历了30年的风风雨雨，经历了数次意义重大的变迁。

“托风出水不奢求，随处扎根芳绿洲。”《名师伴你行》系列丛书经过四年的不断完善和创新，早已成为有口皆碑的知名教辅品牌。为了回报全国广大中学师生的青睐与厚爱，本丛书编委会汇同《光明日报》出版社，在保留原有精品栏目，广泛征寻一线教师意见，不断听取具有丰富高考指导经验的专家学者建议的基础上，综合最新高考信息，深入研究高考命题规律，经过精心策划，重磅推出2006-2007高二同步教学指导用书，作为对恢复高考30周年的最好纪念，真诚奉献给怀揣十年梦想的一代天骄。

“耸翠峰峦千万重，势压群秀最芙蓉。”《名师伴你行》系列丛书高考恢复30年黄金纪念精品版，之所以能引爆新一轮教学指导丛书的喝彩，是因为其卓越的品质、高雅的品位、知名的品牌，是因为其鲜活的素材、流动的信息、科学的体系、合理的栏目、厚重的内容、点睛的讲解和梯度的训练，是因为其三校五审的运作流程、与时俱进的撰写风格、准确无误的编排质量、卓而不凡的封面设计和尽善尽美的售后服务。

“磨剑刃锋泼墨赋，放情挥笔寄江流。”古人云：凡事预则立，不预则废。从书策划中心首先招集本套丛书的50多名作者，封闭研讨十余天，总结目前在教辅市场拥有一席之地的其他教辅的优点，总结本套丛书四年来的成与败和得与失，总结近年高考的命题规律和试题风格，预测来年全国各地高考可能发生的变化，讨论全国广大读者用户的反馈意见，听取有关专家的编写策划报告，群策群力，团结协作，共同研究本套丛书的策划方案和改进计划，书内栏目逐一过关，编写思路和编写计划逐科验收，反复酝酿，博采众长，瓜熟蒂落，水到渠成。

“揽月临风神韵来，烟云拂尽上瑶台。”本丛书本着“为了一切学生、为了学生一切”的宗旨，本着“源于课本、高于课本、强化双基、突出能力”的理念，本着“零距离贴近课堂、百分之百服务考生”的思想，精益求精，认真推敲，使编排体系更加科学合理，书中栏目更加符合课堂设计，编写内容更加符合高考一轮复习的要求，讲、学、练、考的创新设计更加符合全国各地广大师生的需要。真可谓“十年磨一剑，细功出精品”。

"数点花蕊俏然立，几多蜂蝶采撷勤。"从书草稿出笼后，编委会又一次召开各路专家会议，对丛书的编写内容和质量进行综合评估，进一步提出修改意见，同时又将丛书草稿分发到全国各地30多所知名中学进行现场调研，虚心听取多方评价，针对提出的问题，认真研究整改方案。在审校过程中，本丛书以错误率最低、使用率最高为出发点，反复校对，反复审核，有疑必查，有错必纠，精心锻造，功到天成。

"临风斩浪腾云去，欲上天宫揽玉钩。"春华秋实，天道酬勤。不经过漫漫长夜，何以见到黎明的精彩；不经过辛勤耕耘，哪有秋收累累的硕果；不经历狂风暴雨的洗涤，何以见到美丽的彩虹；不经过寒窗十年的苦读，哪有金色六月的金榜题名。同学们，拼搏吧！前方的路在等待着你们……

《名师伴你行》高考恢复30年黄金纪念精品版
图书策划创意设计中心
2006年2月

阅读向导

【订一订学习目标】宏观着眼，制订知识目标和能力目标。读之，可以使你方向明确，少走弯路。

【做一做课前预习】预习试题化，知识填空化，题型人性化，程序简洁化，事半功倍不是神话。

【练一练课前习题】从浅入手，精设预习试题，检测自主预习的实际效果。

【学一学知识精华】知识体系，条分缕析，一目了然；典例导航，选例经典，解析透辟；变式探究，举一反三，步步到位。与本栏目交友，可以丰富知识，夯实基础。

【用一用规律方法】统览全局，整体把脉，批隙导窾，顺藤摸瓜，整合规律，高屋建瓴。

【看一看编者信箱】联系读者实际，瞄准疑点焦点，精巧设疑问难，附有精要提示。以本栏目为友，可以使你释疑破雾，乘胜进击。

【测一测综合实力】包括两个板块："双基起步"，紧扣教材，蓄足实力，夯实基础；"应试能力"，课外拓展，提升素质，冲刺提速，厚积薄发。

【读一读大千世界】精编贴近教材的趣味资料，进一步开拓视野，弥补课内阅读之不足。

目录 Table of contents

第六章 不等式

第七章 直线和圆的方程

第八章 圆锥曲线方程

参考答案

MSBNX

第六章　不 等 式

看一看 本章概要

本章教材是在初中介绍了不等式的概念,学习了一元一次不等式、一元一次不等式组的解法,高一学习了一元二次不等式、简单的分式不等式和含绝对值不等式的解法的基础上,研究不等式的性质、不等式的证明和一些不等式的解法.

不等式与数、式、方程、函数、三角等内容有密切的联系.讨论方程或方程组的解的情况,研究函数的定义域、值域、单调性、最大值、最小值,讨论线性规划问题等,都要经常用到不等式的知识.不等式在解决各类实际问题时也有广泛的应用.可见,不等式在中学数学里占有重要地位,是进一步学习数学的基础知识.

本章教材内容分为五部分.第一部分讲不等式的基本概念,第二部分讲不等式的性质,一共讲了五个定理和三个推论,并给出了严格的证明.不等式的其他性质,都可由它们推导出来.第三部分讲不等式的证明,介绍了证明不等式常用的基本方法——比较法、综合法和分析法等.在本章里,还介绍了 n 个正数的算术平均数和几何平均数这一重要概念,并就 $n=2,3$ 时,对算术平均数不小于几何平均数进行了证明.第四部分讲不等式的解法.首先对一元一次不等式、一元一次不等式组和一元二次不等式的解法进行了复习、总结,然后分别介绍了分式不等式、无理不等式和简单的超越不等式的解法.第五部分讲含有绝对值的不等式.在这一部分里,首先复习了绝对值的有关基本知识,然后介绍了含有绝对值的不等式的两个基本定理.在例题中,还介绍了含有绝对值的不等式与含有参数的不等式的解法和证明.

本章内容中,不等式的证明和不等式的解法是重点.不等式的性质及其证明,其中,不等式的证明是难点.掌握不等式的性质是学好本章的关键.

听一听 学法建议

1. 加强对不等式性质的理解

不等式的性质是证明不等式和解不等式的理论依据,应用相当广泛,是高考试题的热点,学习这部分内容必须记清不等式成立的条件,如:同向不等式相乘、均值不等式,有的学生在使用时忘记了公式所要求的条件.

2. 抓好化归思想方法在不等式中的运用

在比较两个实数的大小和不等式性质的证明中,其基本思想是化归思想,即化未知为已知,化复杂为简单,化一般为特殊,设法将新问题转化为已解决的问题,由条件推导出结论.解不等式也是利用化归思想,通过等价变形,转化为比较简单的不等式,从而得到解集.如分式不等式转化为整式不等式、无理不等式转化为有理不等式等,但要注意变形的同解性,即每一步变换必须既充分又必要.

3. 抓好数形结合思想在不等式中的运用

教材上给出了定理:$a,b\in \mathbf{R}^+$,$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(当且仅当 $a=b$ 时取"="号)的几何证法,通过几何意义:圆的半径不小于半弦,更直观地了解和记忆了定理.利用数形结合解不等式,可提高解题速度,提高准确率.

4. 抓好不等式证明中理论论证能力的提高

必须掌握不等式的证明方法:比较法、综合法、分析法、反证法,还有换元法、放缩性、判别式法等.利用均值不等式求最值要注意应满足的三个条件:"一正,二定,三相等".

5. 抓好不等式的应用.

6.1 不等式的性质

订一订 学习目标

1. 理解不等式的性质.

2. 熟悉性质定理的证明.

3. 通过定理的学习和性质的运用,培养逻辑推理论证的能力.

做一做 课前预习

(1)$a-b>0\Leftrightarrow a$______b;

(2)a______$b=0\Leftrightarrow a=b$;

(3)$a-b<0\Leftrightarrow a$______b;

(4)$a>b\Leftrightarrow b$______a;

(5)$a>b$且$b>c\Rightarrow a$______c;

(6)$a>b$且$c>d\Rightarrow a+c$______$b+d$;

(7)$a>b$且______$\Rightarrow ac>bc$;

(8)$a>b$且______$\Rightarrow ac<bc$;

(9)$a>b>0$且______$\Rightarrow ac>bd$;

(10)$a>b>0(n\in\mathbf{N}$,且$n>1)\Rightarrow a^n$______b^n;

(11)$a>b>0(n\in\mathbf{N}$,且$n>1)\Rightarrow\sqrt[n]{a}$______$\sqrt[n]{b}$;

(12)$a>b\Leftrightarrow a+c$______$b+c$.

练一练 课前习题

1. 下列命题正确的是 ( )

A. 若$a>b,c>d$,则$a-c>b-d$

B. 若$a>b,c>d$,则$a-d>b-c$

C. 若$a>b,c>d$,则$ac>bd$

D. 若$a>b,c>d$,则$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$

2. 若$a>b,c>d$,则一定有 ( )

A. $c>d+a-b$　　B. $b>c+d-a$

C. $c>a+b-d$　　D. $a>b-c+d$

3. 若$a<b<0$,则下列不等式中不成立的是 ( )

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$

C. $|a|>|b|$　　D. $a^2>b^2$

4. 若a,b为实数,则$a>b>0$是$a^2>b^2$的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分也非必要条件

5. 若$a,b\in\mathbf{R}$,下列式子中恒成立的个数为 ( )

①$a^2+3>2a$;②$a^5+b^5>a^3b^2+a^2b^3$;③$a^2+b^2\geqslant2(a-b-1)$;④$a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{b}(a>b>0)$.

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

学一学 知识精华

知识体系

1. 不等式的基本性质　对于任意实数a,b,有$a-b>0\Leftrightarrow a>b$;$a-b=0\Leftrightarrow a=b$;$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.这三条基本性质是差值比较法的理论依据.

2. 不等式的性质包括“单向性”和“双向性”两个方面.

单向性:

(1)$a>b,b>c\Rightarrow a>c$.

(2)$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$.

(3)$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$.

(4)$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$.

(5)$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$.

(6)$a>b>0,n>0\Rightarrow a^n>b^n$.

双向性:

(1)$a-b>0\Leftrightarrow a>b$;$a-b=0\Leftrightarrow a=b$;$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

(2)$a>b\Leftrightarrow b<a$.

(3)$a>b,c$为任意实数$\Leftrightarrow a+c>b+c$.

单向性主要用于证明不等式;双向性是解不等式的

基础(当然也用于证明不等式). 由于单向性(3)、(4)的逆命题都成立,所以它们也可用于解不等式,在应用单向性(6)解不等式和形如$x^n > a$的高次不等式时,若n为偶数时,要注意讨论.

典例导航

考点1　命题的真假的判定

对于实数a,b,c,判断下列命题的真假.

(1) 若$a > b$,则$ac < bc$.

(2) 若$ac^2 > bc^2$,则$a > b$.

(3) 若$a < b < 0$,则$a^2 > ab > b^2$.

(4) 若$a < b < 0$,则$|a| > |b|$.

(5) 若$c > a > b > 0$,则$\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$.

(6) 若$a > b$,$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$,则$a > 0$,$b < 0$.

【分析】若要判断上述命题的真假,依据就是实数集的基本性质和实数运算的符号法则及不等式的基本性质,经过合理的逻辑推理即可判断.

【解析】(1)$\because c$的正、负或是否为零未知,因而判断ac与bc的大小缺乏依据,故该命题是假命题.

(2) 由$ac^2 > bc^2$知$c \neq 0$,$c^2 > 0$,

$\therefore \frac{1}{c^2} > 0$.

故该命题为真命题.

(3) 由$\begin{cases} a < b \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 > ab$.

由$\begin{cases} a < b \\ b < 0 \end{cases} \Rightarrow ab > b^2$.

$\therefore a^2 > ab > b^2$.

故该命题为真命题.

(4) 两个负实数,数小的离原点远,故绝对值反而大.

故该命题为真命题.

(5)$a > b > 0 \Rightarrow -a < -b$,

$c > a > b > 0 \Rightarrow 0 < c - a < c - b$

$\Rightarrow \frac{1}{c-a} > \frac{1}{c-b} > 0 \Rightarrow \frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$.

故该命题为真命题.

(6) 由已知条件知:

$$\left.\begin{array}{l} a > b \Rightarrow a - b > 0 \\ \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0 \Rightarrow \frac{b-a}{ab} > 0 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow ab < 0$.

又$a > b$,$\therefore a > 0$,$b < 0$.

故该命题为真命题.

【评析】上述判断真假命题的例子可以使我们熟悉不等式的基本性质,更好地掌握性质定理及其推论的条件和结论. 如问题(1)~(3)主要考查了对定理4的理解,这是应用定理4最易出错的地方,即在不等式的两边同乘(除)以一个数时,必须能确定该数是正、负、零,否则,结论不确定. 问题(5)、(6)涉及两个已知数的倒数间的关系,由定理4可推导出结论.

另外,若要判断命题是真命题,应说明理由或进行证明,推理过程应紧扣有关定理、性质等;若判断命题是假命题,只需举一反例.

变式探索

已知实数a,b满足$a > b$,则在"①$\frac{b}{a} < 1$;②$a^3 > b^3$;③$a(1-b) > b(1-a)$;④$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;⑤$\lg(a-b) > 0$;⑥$\left(\frac{1}{4}\right)^a < \left(\frac{1}{4}\right)^b$"这六个式子中,恒成立的是　(　　)

A. ①②③　　B. ③④⑤

C. ④⑤⑥　　D. ②③⑥

考点2　差值比较法

已知$a,b \in \mathbf{R}$,比较$a^4 + b^4$与$a^3b + ab^3$的大小.

【分析】式表示的就是数,两个式的比较大小等同于两个数的比较大小. 根据"$a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$;$a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$;$a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$"而产生式的大小比较的作差法.

【解析】$\because (a^4 + b^4) - (a^3b + ab^3)$

$= a^3(a-b) + b^3(b-a)$

$= (a-b)(a^3 - b^3)$

$= (a-b)^2(a^2 + ab + b^2)$

$= (a-b)^2\left[\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2\right] \geqslant 0$

(当且仅当$a = b$时,取"="号)

$\therefore a^4 + b^4 \geqslant a^3b + ab^3$.

【评析】两个实数比较大小,通常用作差法. 作差法的步骤:①作差;②变形(分解因式,配方法);③判断差的符号;④结论. 其中"判断差的符号"是目的,"变形"是关键. 常采用配方、因式分解、通分、有理化等恒等变形手段.

变式探索

若a,b,c满足$b + c = 3a^2 - 4a + 6$,$b - c = a^2 - 4a$

$+4$,则 a,b,c 的大小关系为________.

考点3　商值比较法

比较 16^{18} 与 18^{16} 的大小.

【分析】如果两个数的符号明确,我们可以通过将两个数进行作商,然后将商与1进行比较,再根据不等式的性质,达到比较两个式的目的,这就是所谓的作商比较法(也称作商法).

【解析】$\frac{16^{18}}{18^{16}}=\frac{2^{72}}{2^{16}\cdot 3^{32}}=\frac{2^{56}}{3^{32}}$

$$=\left(\frac{2^7}{3^4}\right)^8>1.$$

$\therefore 16^{18}>18^{16}$.

【评析】作商比较的一般步骤可简记为:作商 → 变形 → 与1比较大小 → 得出结论.一般比较幂的大小用作商比较法.

变式探索

比较 4^{66} 与 6^{44} 的大小.

考点4　学科渗透

已知 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$,求 $\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\alpha-\beta}{2}$ 的取值范围.

【分析】这类问题是学习三角函数内容时经常遇到的,由于当时所学内容所限,往往容易出错.这里我们在已知的基础上,运用不等式的基本性质得出所要得到的结果.

【解析】$\because -\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$,

$\therefore -\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4}<\frac{\beta}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}$.

上面两式相加得:$-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$.

$\because -\frac{\pi}{4}<\frac{\beta}{2}\leqslant\frac{\pi}{4},\therefore -\frac{\pi}{4}\leqslant-\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{4}$,

$\therefore -\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$.

又知 $\alpha<\beta,\therefore \frac{\alpha-\beta}{2}<0$.

故 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{2}<0$.

【评析】求代数式的取值范围,一是要注意题设中的条件,充分利用条件,否则易出错.本例中如果忽略了 $\alpha<\beta$,则 $\frac{\alpha-\beta}{2}$ 的范围就求不出正确的结果.二是变换过程中要注意准确利用不等式的基本性质以及其他与题目有关的性质等.

变式探索

设 $a^2<x<a,M=\log_a x^2,N=\log_a(\log_a x),P=(\log_a x)^2$,则 M,N,P 的大小顺序为________.

考点5　实际应用

甲、乙两车从 A 地沿同一路线到达 B 地,甲车一半时间的速度为 a,另一半时间的速度为 b;乙车用速度为 a 行走一半路程,用速度为 b 行走另一半路程,若 $a\neq b$,试判断哪辆车先到达 B 地.

【分析】先算出每辆车到达 B 地所需时间,然后比较二者大小即可.

【解析】设 A,B 两地间路程为 s,甲、乙两车所用时间分别为 t_1,t_2,则

$$a\cdot\frac{t_1}{2}+b\cdot\frac{t_1}{2}=s,\frac{\frac{s}{2}}{a}+\frac{\frac{s}{2}}{b}=t_2$$

$$\therefore t_1=\frac{2s}{a+b},t_2=\frac{s}{2a}+\frac{s}{2b}.$$

$$t_1-t_2=\frac{2s}{a+b}-\left(\frac{s}{2a}+\frac{s}{2b}\right)$$

$$=\frac{s[4ab-(a+b)^2]}{2ab(a+b)}$$

$$=-\frac{s(a-b)^2}{2ab(a+b)}<0.$$

$\therefore t_1<t_2$.故甲先到达 B 地.

【评析】在现实生活中我们经常遇到各种量的大小比较,求一些过程中的最大量与最小量等问题,而这部分内容为我们解决这类问题提供了数学依据.在处理实际问题时,首先要从所给问题中分析出有哪些量,再找出各个量之间的数学关系建立出数学模型,最后应用所学知识予以解决.

变式探索

现有 A,B,C,D 四个长方体容器,A,B 的底面积均为 a^2,高分别为 a 和 b,C,D 的底面积均为 b^2,高分别为 a 和 b(其中 $a\neq b$).现规定一种游戏规则:每人一次从四个容器中取两个,盛水多者为胜,问先取者有没

有必胜的方案?若有的话有几种?

访一访 高考平台

1. (2005 年上海卷 · 文) 条件甲:"$a>1$" 是条件乙:"$a>\sqrt{a}$" 的 ( )

A. 既不充分也不必要条件

B. 充要条件

C. 充分不必要条件

D. 必要不充分条件

2. (2004 年天津 · 文) 对任意实数 a,b,c,在下列命题中,真命题是 ( )

A. "$ac>bc$" 是"$a>b$" 的必要条件

B. "$ac=bc$" 是"$a=b$" 的必要条件

C. "$ac>bc$" 是"$a>b$" 的充分条件

D. "$ac=bc$" 是"$a=b$" 的充分条件

3. (2005 年湖北卷) 对于任意实数 a,b,c,给出下列命题:

①"$a=b$" 是"$ac=bc$" 的充要条件;

②"$a+5$ 是无理数" 是"a 是无理数" 的充要条件;

③"$a>b$" 是"$a^2>b^2$" 的充分条件;

④"$a<5$" 是"$a<3$" 的必要条件.

其中真命题的个数是 ( )

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

用一用 规律方法

1. 不等式的性质是解证不等式的基础,对任何两个实数 a,b,有 $a-b>0\Leftrightarrow a>b$;$a-b=0\Leftrightarrow a=b$;$a-b<0\Leftrightarrow a<b$. 这是比较两个数大小的依据,也是学习不等式的基础.

2. 不等式的性质应用于证明不等式,往往是从条件推出结论的变换关系,而解不等式则要求同解变换.

3. 本节内容依据实数集的基本性质和实数的运算符号法则,推出了不等式的基本性质,这些内容是后面要学到的证明不等式、解不等式、应用不等式的基础工具. 也就是说本节内容为本章内容做奠基工作,即本节内容是不等式内容的公理化体系的基座,为此必须学好本节内容.

4. 与本节内容有关的基础题目有:利用不等式的基本性质判断命题的真假、比较实数的大小、利用不等式的基本性质证明一些简单命题、确定某些变量的范围等.

看一看 编者信箱

1. **学生:**不等式应注意哪些问题?

老师:不等式的性质刻画了在一定条件下两个量的不等关系,值得注意的是其中有一类具有充要性的特征,条件和结论可互相推出,解不等式的每一变形只能依据这一类性质,才能保证变形的同解性;另一类性质只具有充分性的特征,它可以作为证明不等式的依据,但不能作为解不等式的依据.

另外注意不要强化或弱化不等式性质成立的条件. 例如,在应用"$a>b,ab>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$"这一性质时,有些同学可能是弱化了条件,得 $a>b\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,也可能是强化了条件,而得 $a>b>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

2. **学生:**判断命题真假时的常用方式有哪些?

老师:有关判断性命题,主要依据不等式的概念和性质,一般地,要判断一个命题为真命题,必须严格证明,要判断一个命题为假命题,或者举反例,或者由题中条件推出与结论相反的结果.

3. **学生:**比较两个实数的大小常用哪些方法?

老师:有关比较实数大小,常用作差或作商法. 一方面要灵活运用题中条件,还要结合不等式性质、配方或因式分解. 如果要比较的数多,可恰当选取"分界量",如先找出正的或负的,在正数中找比 1 大的或比 1 小的等.

测一测 综合实力

双基起步

一、选择题

1. 已知 $a+b>0,b<0$,那么 $a,b,-a,-b$ 的大小关系

是 ( )

A. $a > b > -b > -a$

B. $a > -b > -a > b$

C. $a > -b > b > -a$

D. $a > b > -a > -b$

2. 设 $a < b < 0$,有下面四个不等关系:

① $|a| > |b|$; ② $a^2 > b^2$;

③ $\sqrt{-a} < \sqrt{-b}$; ④ $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$.

上述不等关系中一定不成立的是 ( )

A. ① 和 ② B. ① 和 ③

C. ② 和 ④ D. ③ 和 ④

3. 下列四组条件中,甲是乙的充分不必要条件的是 ( )

A. 甲:$a > b$ 乙:$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

B. 甲:$ab < 0$ 乙:$|a+b| < |a-b|$

C. 甲:$a = b$ 乙:$a + b = 2\sqrt{ab}$

D. 甲:$\begin{cases}0 < a < 1\\0 < b < 1\end{cases}$ 乙:$\begin{cases}0 < a+b < 2\\-1 < a-b < 1\end{cases}$

4. 如果 a,b,c 满足 $c < b < a$,且 $ac < 0$,那么下列选项中不一定成立的是 ( )

A. $ab > ac$ B. $c(b-a) > 0$

C. $cb^2 < ab^2$ D. $ac(a-c) < 0$

二、填空题

5. 设 $a < -1, 0 < b < 1$,则 $-a, b, ab, -\frac{a}{b}$ 从小到大的顺序是________.

6. 若 $a,b \in \mathbf{R}$,且 $a > b$,则在下面三个不等式:① $\frac{b}{a} > \frac{b-1}{a-1}$;② $(a+b)^2 > (b+1)^2$;③ $(a-1)^2 > (b-1)^2$ 中不成立的有________个.

三、解答题

7. 已知 $0 < a < 1$,比较 $a, \frac{1}{a}, a^2$ 的大小.

8. 已知 $0 < a < \frac{1}{2}, A = 1 - a^2, B = 1 + a^2, C = \frac{1}{1-a}$, $D = \frac{1}{1+a}$,试比较 A,B,C,D 的大小.

应试能力

一、选择题

1. $a \in \mathbf{R}$,且 $a^2 + a < 0$,则下面式子正确的是 ( )

A. $a^2 > a > -a^2 > -a$

B. $-a > a^2 > -a^2 > a$

C. $-a > a^2 > a > -a^2$

D. $a^2 > -a > a > -a^2$

2. 若 $a > b + 1$,则下列各式中正确的是 ( )

A. $a^2 + b^2 > 2b^2$ B. $\frac{a}{b} > 1$

C. $\lg(a-b) > 0$ D. $\lg a > \lg b$

3 设 $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{7} - \sqrt{3}, c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$,则 ( )

A. $c < b < a$ B. $a < c < b$

C. $c < a < b$ D. $b < c < a$

4. 下列推断:

① 若 $a_1 > b, a_2 > b$,则 $a_1 > a_2$;

② 若 $ac > bc$,则 $c > 0$;

③ 若 $\lg\frac{1}{4} > \lg\frac{1}{5}, 2 > 1$,则 $2\lg\frac{1}{4} > \lg\frac{1}{5}$;

④ 若 $a > 0 > b$,则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

其中不能成立的个数为 ( )

A. 1 个 B. 2 个

C. 3 个 D. 4 个

二、填空题

5. 设 $0 < a < b$,且 $a + b = 1$,则四个数 $\frac{1}{2}, a, 2ab, a^2 + b^2$ 中最小的数是________.

6. 设 $-2 < a < 7, 1 < b < 2$,则 $\frac{a}{b}$ 的范围是________.

三、解答题

7. 比较 $a^2+b^2+c^2$ 与 $ab+bc+ca$ 的大小.

8. 已知 $f(x)=ax^2-c$,且 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$, $-1\leqslant f(2)\leqslant 5$,求 $f(3)$ 的取值范围.

综合能力

1. 已知 $a>b$,$c>d$,$a<0$,$d<0$,则 ac 与 bd 的大小关系是 ( )

A. $ac>bd$　　B. $ac=bd$

C. $ac<bd$　　D. 不确定

2. 若 $x\neq 2$,$y\neq -1$,$M=x^2+y^2-4x+2y$,$N=-5$,则 M 与 N 的大小关系为________.

3. 已知三个不等式:①$ab>0$;②$-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$;③$bc>ad$,以其中两个作为条件,余下一个作为结论,则可以有________个正确命题.

4. 已知 $1\leqslant a+b\leqslant 5$,$-1\leqslant a-b\leqslant 3$,求 $3a-2b$ 的取值范围.

5. 已知实数 a,b,c 满足条件:

$$\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0.$$

其中 m 是正数,对于 $f(x)=ax^2+bx+c$.

(1) 如果 $a\neq 0$,证明:$a\cdot f\left(\frac{m}{m+1}\right)<0$;

(2) 如果 $a\neq 0$,证明:方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有解.

读一读 大千世界

有关希尔伯特的小故事

德国数学家大卫·希尔伯特(1862—1943)是20世纪最伟大的数学家之一.他对数学的贡献是巨大的和多方面的,研究领域涉及代数不变式,代数数域,几何基础,变分法,积分方程,无穷维空间,物理学和数学基础等.他在1899年出版的《几何基础》成为近代公理化方

法的代表作，且由此推动形成了“数学公理化学派”，可以说希尔伯特是近代形式公理学派的创始人. 1900 年希尔伯特 38 岁时在巴黎举行的第二届国际数学家大会上作了题为《数学问题》的著名讲演. 在讲演中，他根据 19 世纪数学研究的成果与发展趋势，以卓越的远见和非凡的洞察力，提出了新世纪所面临的 23 个问题. 这 23 个问题涉及现代数学的大部分重要领域（著名的哥德巴赫猜想就是第 8 个问题中的一部分），对这些问题的研究有力地推动了 20 世纪各个数学分支的发展.

1880 年秋天，18 岁的希尔伯特进入家乡的哥尼斯堡大学，他不顾当法官的父亲希望他学习法律的愿望，毫不犹豫地进了哲学系学习数学（当时的大学，数学还设在哲学系内）. 希尔伯特发现当时的大学生活要多自由有多自由. 意想不到的自由，使许多年轻人把大学第一年的宝贵时光都花费在学生互助会的传统活动饮酒和斗剑上，然而对希尔伯特来说，大学生活的更加迷人之处却在于他终于能自由地把全部精力给予数学了.

大学的第一学期，希尔伯特选学了积分学、矩阵论和曲面的曲率论三门课. 根据规定，第二学期可以转到另一所大学听课，希尔伯特选择了海德尔堡大学，这是当时德国所有大学中最讨人喜欢和最富浪漫色彩的学校. 希尔伯特在海德尔堡大学选听拉撒路 · 富克斯的课. 富克斯是微分方程方面的名家，他的名字和线性微分方程几乎成了同义语. 他讲课确实与众不同，给人的印象很深. 课前他不大做准备，对要讲的内容，在课堂上现想现推. 于是常常发生这样的情形，某个问题在黑板上推不下去了，这时他就再想另外一种方法，有时一连要换好几种方法，但他最后总能推导出结果来. 他就是这样，习惯于在课堂上把自己置于危险的境地. 这样的课学生们如何看呢?他的一位学生后来回忆时写道：这样的课，使学生们“得到一个机会，瞧一瞧最高超的数学思维的实际过程.” 我们可以想象，善于思考和学习的希尔伯特肯定会从中领悟到一个数学家是如何思考问题的，这种包括几经碰壁终于找到解法的探索过程在教科书上无论如何是看不到的. 把思考问题的实际过程展现给学生看，这样做实际上是非常富于启发性的. 我国著名的数学方法论专家徐利治教授认为这一点对希尔伯特的成长肯定起过很好的作用. 我想这一点对我们今天也很有启发. 学习数学不仅要学会这道题的解法，而且更要学会这个解法是如何找到的. 即学会思考.

6.2 算术平均数与几何平均数

订一订 学习目标

1. 能利用不等式的性质推导出平均值不等式的两个重要定理：

(1) $a,b\in\mathbf{R}\Rightarrow a^2+b^2\geqslant 2ab$（当且仅当 $a=b$ 时取"="号）.

(2) $a,b\in\mathbf{R}_+\Rightarrow\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时取"="号）.

2. 能了解平均值不等式的几何模型的构造及相应的几何解释.

3. 能熟练运用平均值不等式定理及其推论证明不等式、求解有关函数的最值.

做一做 课前预习

1. 如果 $a,b\in\mathbf{R}$，那么________ $\geqslant 2ab$（当且仅当________时取"="号），也即 $ab\leqslant$ ________也成立.

2. 如果 $a,b\in\mathbf{R}_+$，那么________ $\geqslant 2\sqrt{ab}$（当且仅当________时取"="号），也即 $ab\leqslant$ ________也成立.

练一练 课前习题

1. 对于任意的正数 a 和 b，设 $A=\frac{a+b}{2}$，$G=\sqrt{ab}$，那么一定有 （　　）

A. $a\cdot b\leqslant A\cdot G$　　B. $a\cdot b\geqslant A\cdot G$

C. $a\cdot b=A\cdot G$　　D. $a\cdot b\neq A\cdot G$

2. 若 $a,b\in\mathbf{R}_+$，则下列不等式不成立的是 （　　）

A. $a+b+\frac{1}{\sqrt{ab}}\geqslant 2\sqrt{2}$　　B. $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$

C. $\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}\geqslant a+b$　　D. $a+\frac{1}{a+4}\geqslant 2$

3. 已知 $x>1$，$y>1$，且 $\lg x+\lg y=4$，则 $\lg x\lg y$ 的最大值是 （　　）

A. 4　　B. 2

C. 1　　D. $\frac{1}{4}$

4. 下列不等式正确的是________（把正确的序号都填上）.

①$a^2+b^2>2ab$　　②$a^2+b^2\geqslant -2ab$

③$a^2+b^2\geqslant 2|ab|$　　④$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$

⑤$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2$　　⑥$\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}\geqslant 2$

学一学 知识精华

知识体系

1. (1) 如果 $a,b\in\mathbf{R}$，那么 $a^2+b^2\geqslant 2ab$（当且仅当 $a=b$ 时取"="号），反之 $ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$ 也成立.

(2) 如果 $a,b\in\mathbf{R}_+$，那么 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时取"="号），反之 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ 也成立.

2. 对于公式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 及公式 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 的理解，应注意以下几点：

(1) 各个公式成立的条件是不同的：前者只要求 a、b 是实数，而后者强调 a,b 必须是正数.

(2) 对两个公式中的等号及"当且仅当……时取'='号"的含义要有透彻的理解.

3. 利用正数的算术平均数与几何平均数定理及推论求某些二次函数的最大、最小值时，要注意只有在各项相等的条件下，才存在"积为常数，和有最小"；"和为常数，积有最大"的结论，其依据在于 $a=b$ 是 $\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$ 的充要条件.

4. 利用公式 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（$a,b\in\mathbf{R}_+$）时，应注意以下几点：