河北省精品课程教材

Gailülun yu Shulitongji

概率论与数理统计

◎ 主编 赵秀恒 宋文华

河北教育出版社

河北省精品课程教材

Gailülun yu Shulitongji

概率论与数理统计

◎ 主编 赵秀恒　宋文华

河北教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计／赵秀恒，宋文华编著．—石家庄：河北教育出版社，2006.12

ISBN 7-5434-6170-6

Ⅰ．概… Ⅱ．①赵…②宋… Ⅲ．①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ．021

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第152936号

书　　名	概率论与数理统计
主　　编	赵秀恒　宋文华
策　　划	邓子平　杨　才
责任编辑	张　辉　张　静

出　　版	河北教育出版社 （石家庄市联盟路705号　http://www.hbep.com）
印　　制	保定市中画美凯印刷有限公司
排　　版	保定市万方数据处理有限公司
开　　本	787×1092毫米　1/16
印　　张	17
字　　数	375千字
版　　次	2006年12月第1版
印　　次	2006年12月第1次印刷
书　　号	ISBN 7-5434-6170-6
定　　价	25.50元

总　序

精品课程建设是高等学校教学质量与教学改革工程的重要组成部分，是建设国内一流大学的重要标志。加强精品课程建设是全面推进教育创新和实施素质教育，全面深化教育改革、提高人才培养质量、全面提升高等教育综合实力和竞争力的重要举措。为深入贯彻落实教育部《关于加强高等学校本科教学工作提高教学质量的若干意见》(教高(2001)4号)和河北省教育厅《关于加强高等学校课程建设与评估的通知》(冀教高(2002)6号)精神，进一步确立教学工作的中心地位，河北经贸大学以精品课程建设为龙头，以提高教学质量为目的，全面推进课程建设工作，目前，已有27门课程建成河北省精品课程。

河北经贸大学是河北省重点建设的一所骨干大学，以经济学、管理学、法学为主，兼有文学、理学和工学的多科型财经类院校。在大力发展研究生教育、提高办学层次的同时，学校确立了以本科教学为主，以创新型、应用型人才培养为目标的办学思路。2005年河北经贸大学在国家教育部本科教学工作水平评估中获得优秀。孔子曰："工欲善其事，必先利其器。"打造精品课程是实施人才培养战略的手段。为了进一步推进精品课程建设，使精品课真正成为"具有一流教师队伍、一流教学内容、一流教学方法、一流教材、一流教学管理"的示范性课程，河北经贸大学于2005年启动了"河北省精品课程教材"建设工程。经过严格的考核和论证，《商品流通学》等12门省级精品课程被确定为精品课教材建设重点项目。

高质量的教材出自完善的制度保障和高水平的作者队伍。河北经贸大学在推动河北省精品课程教材的编写与出版上，重点强化了三个方面：

首先是组织严格。本套精品课教材的编写和出版，由河北经贸大学教务处统一组织，实行专家论证、主编负责、名师编书等制度，从制度上规范了教材的编写工作。对作者提出了明确统一的要求，聘请教学经验丰富、学术造诣深、具有一定知名度的教授担任主编，挑选学历层次高、教学效果好的中青年骨干教师参编，从作者队伍构建上保证了教材的编写水平。

其次是高质量要求。本套精品课教材的编写采取了企业经营中名牌战略的思路，以精品为原则，对教材的质量给予了格外的关注。河北经贸大学与出版社共同确立了教材的高质量目标，采取了主编负责，作者资格认定、学校拨付专款用于调研、出版社支付稿酬等措施，以制度为导向确保教材的高质量。

再次是教学的适用性。这套教材的编写坚持了教学适用性原则，比较好地处理了教材编写繁与简的关系，根据课堂教学基本规律，恰当地把握了教材的容量；比较好地处理了学科前沿与教材内容的关系，以科学发展观为指导，既注意了教材内容的成熟性、系统

性和规范性，又体现了与时俱进原则，尽可能多地吸纳各学科科学研究新成果。

教材建设是课程建设的重要组成部分，期待着河北经贸大学通过“河北省精品课程教材”建设工程，精心打造精品课，开发出更多的优质教育资源。

王凤鸣

2006年2月22日

前　言

《概率论与数理统计》是理科、工科和经济管理类等各专业的基础课程，其内容丰富，实用性强，也是专门研究和探索客观世界中随机现象的数学的分支学科，无论在自然科学还是在社会科学领域都有广泛的应用，涉及金融、保险、经济与企业管理、工农业生产、军事、医学、地质学、空间技术、气象与自然灾害预报，等等方面。

该教材内容包括概率论与数理统计两部分。概率论内容有：随机事件及其概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、多维随机变量、常见的一维和多维随机变量、大数定律及中心极限定理。数理统计内容有：统计量及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析及回归分析。

教材内容处理上尽量使概念、理论与方法便于学生接受。在不影响本学科系统性、科学性的前提下，简化和略去了某些结论冗繁的推导或者仅给出直观解释，并注重知识的来龙去脉，概念的产生背景，有意识地融入数学史和数学文化的教育。在例题与习题的配置方面注意到学习难度的循序渐进，选择了一些经典例子或历年研究生入学考试试题。

教材中“*”标出的内容为选学内容，可根据课时决定是否讲授。

该教材是在河北省精品课程《概率论与数理统计》讲义基础上，为适应地方高校理科专业教学特点而编写的，但也可作为工科和经济管理类各专业的教材使用。第一、二章由赵秀恒编写，第三章由王占京编写，第四章由宋文华、陈蕊编写，第五章由王志军编写，第六、七、八章由米同乐、王红霞编写，第九章由魏利编写。赵秀恒起草了该教材的编写大纲，并将全书进行了统稿。

由于编者水平有限，本书难免有欠妥和错误之处，我们衷心希望得到专家、学者和读者的批评指正，使这部教材在教学实践中不断完善和改进。

编者

2006 年 6 月

引　言

概率论与数理统计简言之，它是从量的侧面研究随机现象统计规律性的一门学科．什么是随机现象及其统计规律性呢？

在自然界和人类社会中，存在着两类不同的现象．一类是在一定条件下必然发生或必然不发生的现象叫**确定性现象**．例如：

(1)上抛一石子必然下落；

(2)在标准大气压下，水加热到100℃必然沸腾；

(3)同性的电必互相排斥；

(4)无论什么样的三角形，它的两边之和总要大于第三边；

(5)若仅考虑物体只受重力影响，自由落体移动的路程 s 与时间 t 的关系必为 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$．

等等，这些现象都是确定性现象．

另一类是在一定条件下可能出现这样或那样的结果，而事先不能断言究竟会出现哪种结果的现象叫**不确定性现象**．例如：

(1)抛一枚匀称的硬币，落下后可能正面朝上，也可能反面朝，上抛前无法确定会出现哪个面；

(2)某厂生产的灯泡的使用寿命；

(3)某商场一天接待的顾客数；

(4)某地区每年的降雨量；

(5)某电话交换台在单位时间内接到的呼唤次数．

等等，这些现象都是不确定性现象．

还有像地震、火山爆发、森林失火、飞机失事、交通事故等几乎每天都在发生着．

有些不确定性现象可以大量重复试验和观测，像抛硬币、观察每天某商场的顾客数等；还有一些不确定性现象是不能大量重复试验或观测的．如，美国“挑战者”号航天飞机升空不久，便发生爆炸；2001年9月11日，美国纽约世贸双塔被袭摧毁．

不确定性现象是否就没有任何规律性呢？人们经过长期的实践和研究，对于可以大量试验或观察的不确定性现象，就每次试验(或观测)结果来看，它们具有不确定性，但大量重复试验(或观测)，不难发现它呈现出某种规律性，即**统计规律性**．例如：

(1)多次抛一枚匀称的硬币，会发现正面朝上大致有半；

(2)多次观察某厂生产的灯泡点燃时数，会发现它多数分布在某个数值附近；

(3)对某批种子重复作种子发芽试验,会发现发芽率总围绕着一个数值附近摆动.

像这种具有统计规律性的不确定性现象叫**随机现象**(或叫**概率型不确定性现象**).

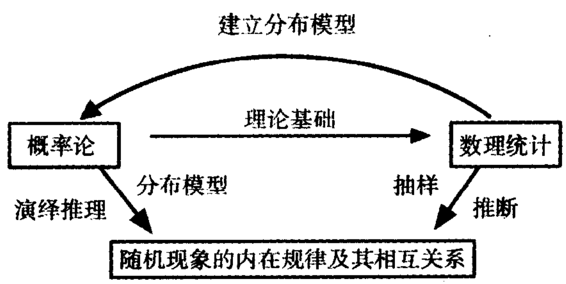
概率论与数理统计包含两部分内容:概率论、数理统计.虽然它们都是研究随机现象统计规律性,但它们侧重点不同.

概率论部分着重对客观随机现象提出数学模型(或者说假设)然后研究它们的内在规律及相互关系.例如,掷一颗匀称的骰子,问出现奇数点的可能性是多大?因为出现每个面的可能性都是1/6(这是合理的,事先要承认或作为一种信念),在这个基础上进行演绎推理,正方体共6个面,奇数点占了3个面,因此,出现奇数点的可能性是1/2.

而数理统计部分着重试验或观测搜集整理数据,然后通过科学推理原则分析这些数据,认识随机现象统计规律性.例如,掷一颗不匀称的骰子,问出现奇数点的可能性是多大?这必须靠试验才能确定.新出生的婴儿,男婴的可能性是多大?这必须靠人口统计资料确定.

数理统计是以概率论为基础的,而概率论中对随机现象所作的假设(呈现的分布)又常常由数理统计来确定.

概率论与数理统计研究的对象、方法及其关系如下图所示:



目　　录

第一章　随机事件及其概率

§1.1　随机事件及其关系和运算

一　随机事件和基本事件空间

为了研究随机现象就要对客观事物进行试验(或观测),为了方便以后统称为**试验**.

如果试验满足以下两个特点:

(1)试验在相同条件下可以重复进行;

(2)试验可能出现的结果是明确的,但试验前不能肯定会出现哪种结果.

则称它是**随机试验**(以下简称**试验**).

像在序中我们提到的"抛硬币观察哪面朝上的试验"、"观察灯泡的使用寿命试验"、"观察某商场一天接待的顾客数试验",等等,这些都是随机试验.

随机试验每个可能出现的基本结果称为**基本事件**(或**样本点**).

例如,在抛一枚硬币的试验中,可能出现的基本结果只有两个:"正面朝上"和"反面朝上".

再如,在观察灯泡的使用寿命试验中,所有可能的结果为"灯泡寿命为 t 小时",$t \geqslant 0$.

基本事件通常用 ω_i(或 e_i)表示.而所有基本事件组成的集合称为**基本事件空间**(或**样本空间**),通常用 Ω 表示.

如,在抛一枚硬币的试验中,若记 $\omega_1=$"正面朝上",$\omega_2=$"反面朝上",则基本事件空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$.

在观察灯泡的使用寿命试验中,记 $\omega_t=$"灯泡寿命为 t 小时",则基本事件空间 $\Omega=\{\omega_t \mid t \geqslant 0, t \text{ 为实数}\}$.

试验的每一个结果(满足某条件的基本事件组成的)称为**随机事件**(简称**事件**).常用 $A,B,C\cdots$ 表示.随机事件实际上就是由一些基本事件组成的集合,也即基本事件空间的子集.

例 1.1　掷一颗骰子(正方体每面分别标有 $1,2,\cdots,6$ 个点数),观察出现的点数,这个试验中基本事件共有 6 个:$\omega_i=$"出现 i 点",$i=1,2,\cdots,6$,基本事件空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$.

而 $A=$"出现偶数点",$B=$"出现奇数点",$C=$"出现的数点小于 4",$D=$"出现的点

数大于 2"都是事件.这些事件都是 Ω 的子集：$A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$，$B=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$，$C=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$，$D=\{\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$.

试验中必然发生的事件叫**必然事件**,它实际上是由全体基本事件组成的集合,因此,必然事件也记为 Ω.必不发生的事件叫**不可能事件**,记为$\varnothing$.

必然事件与不可能事件都是确定性的事件,但为了今后讨论问题方便,不妨将它们视为随机事件的特例.

例 1.2 先后抛两枚硬币的实验.基本事件共有四个：ω_1=(正,正),ω_2=(正,反),ω_3=(反,正),ω_4=(反,反).则

A="至少出现一个正面"$=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$

B="最多出现一个正面"$=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$

C="恰出现一个正面"$=\{\omega_2,\omega_3\}$

D="出现两面相同"$=\{\omega_1,\omega_4\}$

二 事件间的关系和运算

由于事件是基本事件空间的子集,因此,我们可仿照集合的关系和运算定义事件的关系和运算.

对于一个试验,设 A、B 为两事件.

1. 事件间的包含关系

若 A 发生,则 B 必发生,即 A 中基本事件必包含在B,则称 A **包含**于B,或说 B **包含**A.记为 $A\subseteq B$ 或$B\supseteq A$.

例如,在 1.2 中,如果事件 C="恰出现一个正面"发生了,则事件 B="至少出现一个正面"必定发生.因此,$C\subseteq A$.

显然,对任意事件 A,都有 $A\subseteq\Omega$.

规定:$\varnothing\subseteq A$(A 为任意事件).

2. 事件的相等

若 $A\subseteq B$ 且$B\subseteq A$,则称 A 与B **相等**.

3. 事件的并(或和)

"两个事件 A、B 至少有一个发生"构成的事件,即由 A 与B 中所有基本事件组成的集合,叫 A 与B 的**并**(**或和**).记为 $A\cup B$ 或$A+B$.

例如,在例 1.1 中,事件 A=""出现偶数点"与 C="出现的数点小于 4"的并事件为 $A\cup C=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_6\}$,即"不出现 5 点"

4. 事件的交(或积)

"两个事件 A、B 同时发生"构成的事件,即由 A 与B 中所有公共的基本事件组成的集合,叫 A 与B 的**交**(**或积**).记为 $A\cap B$ 或AB.

例如,在例 1.1 中,事件 A=""出现偶数点"与 C="出现的数点小于 4"的交事件为 $A\cap C=\{\omega_2\}$,即"出现 2 点"

5. 事件的差

“事件 A 发生但 B 不发生”构成的事件，即由属于 A 中但不属于 B 中的所有基本事件组成的集合，叫 A 与 B **差**. 记为 $A-B$.

例如，在例 1.1 中，事件 $A=$“出现偶数点”与 $C=$“出现的数点小于 4”的差事件 为 $A-C=\{\omega_4,\omega_6\}$，即“出现 4 点或 6 点”.

6. 对立事件

“事件 A 不发生”构成的事件，即由不属于 A 事件的所有基本事件组成的集合，叫 A 的**对立事件**. 记为 $\overline{A}$.

显然，$\overline{A}=\Omega-A$.

例如，在例 1.1 中，$\overline{A}=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$，即“出现奇数点”. $\overline{C}=\{\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$，即“出现的数点不小于 4”.

7. 事件间互不相容关系

若事件 A 与 B 不能同时发生，则称 A 与 B **互不相容**(或**互斥**).

显然，A 与 B 互斥$\Leftrightarrow A\cap B=\Phi$.

例如，在例 1.1 掷一颗骰子中，$C=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$，又若 $E=\{\omega_5,\omega_6\}$，则 C 与 E 互斥.

若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件是互不相容的，则称 n 这个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是**两两互不相容的**.

8. 事件间对立关系

若事件 A 与 B 不能同时发生，但又必发生其中之一，则称 A 与 B **对立**.

显然(1)A 与 B 对立$\Leftrightarrow A\cap B=\Phi$ 且 $A\cup B=\Omega$.

(2)$\overline{A}=B$.

例如，在例 1.1 中 $A=$“出现偶数点”与 $B=$“出现奇数点”是对立的. 即 $\overline{A}=B$.

既然事件是基本事件空间的子集，那么我们就可像用图表示集合的关系与运算一样，用图表示事件的关系与运算：

把试验看做向矩形内投点，“点落入矩形内”是必然事件 Ω，“点落入圆 A 内”记为 A，“点落入圆 B 内”记为 B，则事件间的关系和运算如图 1－1 所示.

关于事件的并、交运算还可推广到多个事件情况：

$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 表示“n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生组成的事件”. 简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$；

$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 表示“n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生组成的事件”，简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

还可进一步推广到可列多个情况：

$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示“事件序列 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生组成的事件”；

$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示“事件序列 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生组成的事件”.

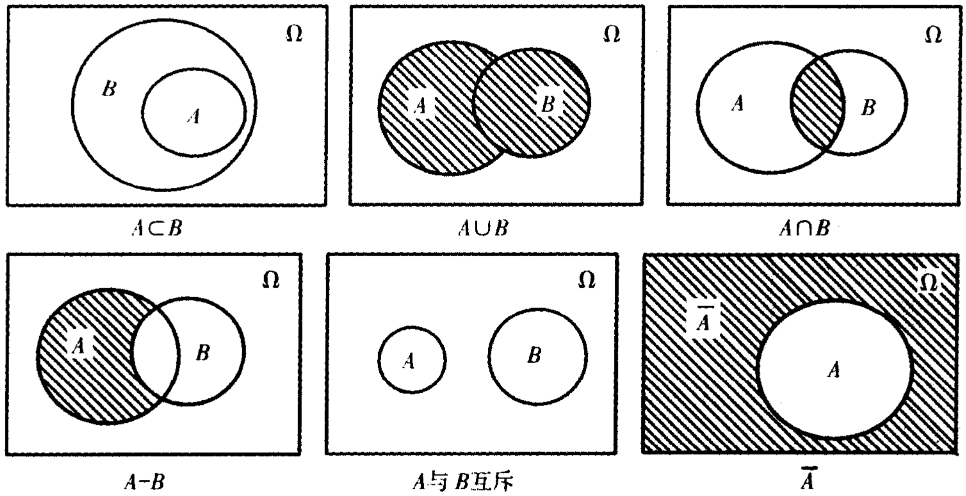


图 1-1

三　事件的运算律

关于事件的运算有着与集合运算相同的运算律：

(1)交换律：$A \cup B = B \cup A$；$A \cap B = B \cap A$.

(2)结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$；$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(3)分配律：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$；

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(4)对偶律：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$；$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$（又称 De Morgan 律）.

(5)吸收律：若 $A \subseteq B$，则 $A \cup B = B, A \cap B = A$.

(6)Φ 满足：$A \cup \Phi = A$；$A \cap \Phi = \Phi$.

(7)Ω 满足：$A \cup \Omega = \Omega$；$A \cap \Omega = A$.

(8)对立事件满足：$A \cup \overline{A} = \Omega, A \cap \overline{A} = \Phi, \overline{\overline{A}} = A$.

（以上运算律的证明从略）

例 1.3　一批产品中有正品和次品，依次任取 3 件. 令 A_i =“第 i 件为正品” $i = 1,2,3$，那么

(1)“三件都为正品”可表示为 $A_1A_2A_3$；

(2)“三件都不是正品”表示为 $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ 或 $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$；

(3)“三件不都是正品”表示为 $\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$ 或 $\overline{A_1A_2A_3}$；

(4)“三件中仅第一件是正品”表示为 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$；

(5)“三件中仅一件是正品”表示为 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$；

(6)“三件中至少有一件正品”表示为 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

§1.2　随机事件的概率及其性质

在随机试验中,对于一个随机事件它在一次试验中可能发生,也可能不发生,我们自然想知道它发生的可能性究竟有多大,或者说希望找到一个合适的数值来表示这个事件发生的可能性大小.表示事件 A 发生的可能性的数值就是事件 A 的概率,我们用 $P(A)$ 表示.怎么规定这个数值呢?在概率发展史上,针对不同的试验曾有过不同的办法.

一　事件的概率

1. *古典方法*

考虑下面的试验

例 1.4　盒中有 5 个大小相同的球(每个球可辨别①),3 个白球,2 个黑球,现从中随机任取一球.

这 5 个球可以按自然序编号,那么这个试验共有 5 个基本事件:ω_i =“取到 i 号球”,且每个基本事件发生的可能性是相同的(即每个球被抽到的可能性相同).

一般的,我们把具有以下两个特点的试验称为**古典概型试验**:

(1)基本事件的个数有限;

(2)每个基本事件发生的可能性相同.

对古典概型试验,事件 A 发生的可能性的大小 $P(A)$ 该怎样定义呢?

在例 1.4 中,令 A =“任取一球是白球”,长期的实践使我们认识到用比值:

$$\frac{A\text{ 包含的基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}}=\frac{3}{5}$$

来反映事件 A 发生的可能性非常合理.我们就把这个数值作为事件 A 的概率,即 $P(A)=\frac{3}{5}$.

一般的,古典概型试验中事件的概率定义如下:

定义 1.1　对古典概型试验,若基本事件的总数为 n,事件 A 包含的基本事件的个数为 k,则定义**事件 A 的概率**

$$P(A)=\frac{k}{n}. \tag{1.1}$$

例 1.5　盒中有 5 个球,3 个白球,2 个黑球,从中一次任取两球.求下列事件的概率:

(1)任取的两球都是白球;

(2)任取的两球恰有一白球.

解　令 A 表示“任取的两球都是白球”,B 表示“任取的两球恰有一白球”

---

① 球可辨别即可认为每个球上都有不同的编号,以后再遇到抽球、抓阄等这类问题,无特殊声明均指这种情况.

这个试验显然是古典概型的试验,基本事件的总数为 C_5^2,A 包含的基本事件个数为 C_3^2,B 包含的基本事件个数为 $C_3^1C_2^1$.因此

$$(1)P(A)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10},\qquad (2)P(B)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{10}.$$

如果把这个试验改为"从中依次任取两球"或"有放回的任取两球[①]",事件 A,B 的概率又是多少呢?请读者给出解答.

例 1.6 n 个阄中有 m 个彩阄,$k(k\leqslant n)$ 个人先后各取一阄,求第 $i(1\leqslant i\leqslant k)$ 个人取到彩阄的概率.

解 令 A 表示事件"第 i 个人取到彩阄",基本事件总数为 P_n^k,A 包含的基本事件个数为 $C_m^1P_{n-1}^{k-1}$,因此

$$P(A)=\frac{C_m^1P_{n-1}^{k-1}}{P_n^k}=\frac{m}{n}.$$

可见,抓到彩阄的可能性与抓阄的次序无关,先抓和后抓都是公平的.以后我们可以利用这一"常识"解答问题.

例 1.7 从 1,2,…,9,10 共 10 个数字中任取一个,假定每个数字都以 $\frac{1}{10}$ 的概率被取出,取后还原,先后取 7 个数字,求下列各事件 $A_i(i=1,2,3,4)$ 的概率:

A_1:7 个数字全不相同; A_2:不含 1 和 10; A_3:10 恰好出现 2 次; A_4:10 至少出现 2 次.

解 基本事件空间共有 10^7 个不同的基本事件,每个基本事件发生的可能性相同,均为 $\frac{1}{10^7}$.可见,这个试验为古典概型的试验.因此

$$P(A_1)=\frac{P_{10}^7}{10^7}=\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4}{10^7}\approx0.06048.$$

$$P(A_2)=\frac{8^7}{10^7}\approx0.2097.$$

$$P(A_3)=\frac{C_7^29^5}{10^7}\approx0.1240.$$

$$P(A_4)=\frac{\sum\limits_{k=2}^{7}C_7^k9^{7-k}}{10^7}\approx0.1497.$$

例 1.8 有 r 封信随机地投入 n 个邮筒,求下列事件的概率:

(1)某指定 $k(k\leqslant r)$ 个邮筒中各只有一封信;

(2)有 $k(k\leqslant r)$ 个邮筒中各只有一封信;

(3)某指定的一个邮筒中恰有 $k(k\leqslant r)$ 封信.

解 因为每一封信都有 n 个邮筒可供选择,所以 r 封信投放到 n 个邮筒共有 n^r 种.

(1)某指定 $k(k\leqslant r)$ 个邮筒中各只有一封信,其可能的总数为 $C_r^kk!(n-k)^{r-k}$,于

① "有放回的任取两球"即任取一球,观察颜色后放回,再从中任取一球.

是,所求的概率为

$$P_1=\frac{C_r^k k!(n-k)^{r-k}}{n^r}$$

(2)有 $k(k\leqslant r)$ 个邮筒中各只有一封信,其可能的总数为 $C_n^k C_r^k k!(n-k)^{r-k}$,于是,所求的概率为

$$P_2=\frac{C_n^k C_r^k k!(n-k)^{r-k}}{n^r}$$

(3)某指定的一个邮筒中恰有 $k(k\leqslant r)$ 封信,其可能的总数为 $C_r^k(n-1)^{r-k}$,于是,所求的概率为

$$P_3=\frac{C_r^k(n-1)^{r-k}}{n^r}.$$

例 1.9　从 5 双不同的手套中任取 4 只,求下列事件的概率:

(1)任取得 4 只恰好有 2 只配成一双;

(2)任取得 4 只没有 2 只成双.

解　5 双手套取 4 只,共有 C_{10}^4 个基本事件.

(1)"任取得 4 只恰好有 2 只配成一双"含有 $C_5^1C_4^2 2^2$ 个基本事件,因此,恰好有 2 只配成一双的概率为

$$P_1=\frac{C_5^1C_4^2 2^2}{C_{10}^4}=\frac{4}{7}.$$

(2)"任取得 4 只没有 2 只成双"含有 $C_5^4 2^4$ 个基本事件,因此,没有 2 只成双的概率为

$$P_2=\frac{C_5^4 2^4}{C_{10}^4}=\frac{8}{21}.$$

从以上例题可以看到,求解古典概型问题的关键是寻求基本事件的总数和事件 A 包含的基本事件的个数(也称 A 发生的有利事件数).

概率的概念及确定概率的古典方法形成于 16 世纪,当时起源于博弈问题,在 15～16 世纪意大利数学家帕乔利(L.Pacioli,1445～1515)、塔塔利亚(Tartaglia,1499～1557)、卡当(Cardano,1501～1576)的著作里曾讨论过"如果两人赌博提前结束,该如何分配赌金"等问题.1654 年前后法国数学家费马(Fermat,1601～1665)、帕斯卡(Pascal,1623～1662)在通信中也讨论过类似的合理分配赌金问题.荷兰数学家惠更斯(Huygens,1629～1695)于 1657 年发表了《论赌博中的计算》是最早的概率著作,其中涉及到了一些早期的概率概念和有关概率定理,标志着概率论的诞生.其实卡当早在约 1564 年完成了著作《机遇博弈》,只是他去世后 1663 年才得以发表.在这些著作里都使用过概率古典定义.但真正给出概率古典定义是拉普拉斯(P.S.Laplace,1749～1827)1812 年出版的《概率论的分析原理》,这部著作名确了概率的古典定义:事件 A 的概率 $P(A)$ 等于一次试验中有利于事件 A 的可能结果数与该试验中所有可能的结果数之比.

人们经过长期的实践作为先验的逻辑必然性提出的概率的古典定义存在两点不足:①有一定的局限性(基本事件的个数有限,每个基本事件发生的可能性相同);②定义是循环的(这个定义中要求基本事件等可能性就是等概率性).