WUTP

高等学校应用型本科教材

高等数学（上册）

◉ 主 编/彭斯俊　吴有方

Gaodeng Shuxue

WUTP
武汉理工大学出版社
Wuhan University of Technology Press

高等数学

（上册）

主　编　彭斯俊　吴有方
副主编　杨爱芳　何　朗　易风华
　　　　陈盛双　周　俊　陈建业

武汉理工大学出版社

内容简介

本书是根据《高等数学课程教学基本要求》，结合编者多年的教学实践，为适应独立学院本科教学的特点编写而成的.

本书分上、下册出版.下册内容为多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、微分方程、无穷级数五章.

本书结构严谨，逻辑清晰，注重应用，例题丰富，叙述简明，便于自学，可供高等学校独立学院工科类专业的学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册)/彭斯俊，吴有方主编.—武汉:武汉理工大学出版社，2006.8
ISBN 7-5629-2446-5

Ⅰ.高…
Ⅱ.①彭… ②吴…
Ⅲ.高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 071186 号

出　版:武汉理工大学出版社(武汉市洪山区珞狮路 122 号　邮编:430070)
发　行:武汉理工大学出版社发行部
印　刷:武汉理工大印刷厂
开　本:787×960　1/16
印　张:18.25
字　数:345 千字
版　次:2006 年 9 月第 1 版　2006 年 9 月第 1 次印刷
印　数:1—2000 册
定　价:25.00 元
(本书如有印装质量问题，请向承印厂调换)

前言

进入21世纪，我国的高等教育迈入了大众化的发展轨道.在新形势下，独立院校迅速发展，已经形成一个新的教育群体，并逐渐得到全社会的广泛认可.但是，相应的教材建设尤其是本科教材建设明显滞后.在这种形势下，我们在认真总结独立院校本科数学教学经验的基础上，以教育部《高等数学课程教学基本要求》为编写原则，编写出了适用于理工类本科使用的《高等数学》(上、下册).编写中，我们在力求保持本课程学科体系的科学性和教学内容的系统性的同时，紧紧把握培养“应用型本科生”这一办学宗旨，确立编写本书的指导思想为：重视基本概念，强调实际应用，便于阅读.本书的内容具有以下特色：

1.注意从学生了解的实际问题出发引入数学概念，使学生了解数学概念的实际背景，以激发学生的学习兴趣，增强学生学好数学的自信心.对基本概念、基本理论的叙述，力求准确简明，便于理解和掌握.

2.力求贯彻“以应用为目的，以必须够用为度”的基本原则，书中有选择地编入了较丰富的实际问题的例题及习题，以培养学生应用数学知识的意识与能力，而不必拘泥于过于繁琐的理论推导.

3.标有 * 号的内容供专业需要选用，小字排列的内容供有兴趣的学生阅读.

本书分上、下两册出版.本书的编者都是具有丰富教学实践经验与多年独立学院教学经历的教师，参加本书编写的有：武汉理工大学华夏学院彭斯俊(第一章、第十二章)、杨爱芳(第九章、第十章)、何朗(第六章、第七章)、陈建业(第八章)、周俊(第十一章)；湖北工业大学商贸学院吴有方(第四章、第五章)；湖北经济学院易风华(第三章)；华中师范大学汉口分校陈盛双(第二章)；武汉理工大学万源、朱慧颖，湖北工业大学商贸学院杨贵诚也参与了本书的编写工作.全书由主编彭斯俊、吴有方统稿审定.特别感谢武汉理工大学朱勇教授及管典安副教授对本书所提出的许多宝贵性建议.本书的出版得到了武汉理工大学出版社的重点扶持，在此表示衷心感谢.

由于水平所限，成书时间又很仓促，错漏之处实属难免，望读者不吝赐教.

编　者

2006.7

目　录

1 函数与极限

函数是数学的基本概念之一，是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映，也是高等数学的主要研究对象. 极限概念在微积分中是一个非常重要的概念，微积分中其他的一些概念如导数、积分等都是建立在它的基础之上的，极限方法也是微积分的基本分析方法. 本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质.

1.1 函　　数

1.1.1 集合与区间

1. 集合

一般地，具有某种特定性质的事物的总体称为集合(或简称集). 组成这个集合的事物称为该集合的元素.

下面是几个集合的例子：

例 1 公元 2000 年元月 1 日在中国出生的人.

例 2 直线 $x+y=1$ 上所有的点.

例 3 方程 $x^2+1=0$ 的实根.

由有限个元素组成的集合称为有限集，如例 1；由无穷多个元素组成的集合称为无限集，如例 2；不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$，如例 3.

通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素. 若 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；若 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\,\overline{\in}\,A$ 或 $a\notin A$.

集合的表示法有两种. 一种是列举法，就是把集合的全体元素一一列举出来表示. 例如，由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A，可表示成

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

另一种是描述法，若集合 M 是具有某种特征 P 的元素 x 的全体所组成的，就可表示成

$$M = \{x \mid x \text{具有性质} P\}.$$

例如，上述例 2 的集合可表示成

$$\{(x,y) \mid x+y=1, x, y \text{是实数}\}.$$

元素为数的集合称为**数集**. 通常用 **N** 表示自然数集，用 **Z** 表示整数集，**Q** 表示有理数集，**R** 表示实数集.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $x \in A$，则必 $x \in B$，就说 A 是 B 的子集，记作 $A \subset B$（读作 A 包含于 B）或 $B \supset A$（读作 B 包含 A）. 例如 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$，$\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$，$\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

如果 $A \subset B$，且 $B \subset A$，就称集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$. 例如，设

$$A = \{1,2\}, B = \{2,1\}, C = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\},$$

则 $A=B=C$.

2. 区间

区间是用得较多的一类数集.

设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$. 数集 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$ 称为**开区间**，数集 $[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为**闭区间**，数集 $[a,b)=\{x \mid a \leqslant x < b\}$ 和 $(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$ 称为**半开区间**，a，b 称为区间的端点，$b-a$ 称为区间的长度. 这些区间都称为**有限区间**. 它们均可用数轴上长度有限的线段来表示. 例如，图 1-1(a) 与 (b) 分别表示闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b).

此外还有所谓**无限区间**. 引进记号 $+\infty$（读作正无穷）及 $-\infty$（读作负无穷），可类似地表示无限区间，例如

$$[a, +\infty) = \{x \mid a \leqslant x\},$$
$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}.$$

这两个无限区间在数轴上如图 1-1(c)，(d) 所示.

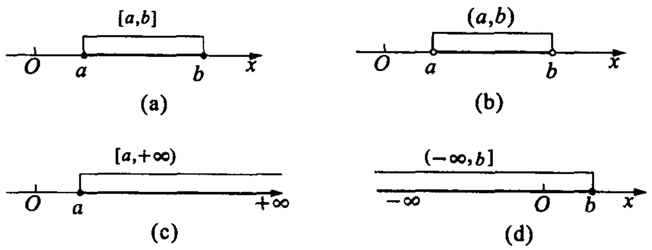

图 1-1

邻域也是一个经常用到的概念. 设 a,δ 是两个实数,且 $\delta>0$,数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的 δ **邻域**,记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\},$$

或

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 称为这邻域的中心,δ 称为这邻域的半径. 它在数轴上表示以 a 为中心,长度为 2δ 的对称开区间(图 1-2).

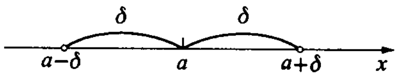

图 1-2

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为点 a 的**去心 δ 邻域**,记作 $\dot{U}(a,\delta)$,即

$$\dot{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

1.1.2 函数

1. 函数的概念

在同一个自然现象或技术过程中,往往同时有几个变量在变化着. 这几个变量并不是孤立地在变,而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 例如,圆的面积 A 与它的半径 r 之间的关系由公式 $A=\pi r^2$ 给定,当半径 r 在区间 $[0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时,由公式就可以确定圆面积 A 的相应数值. 两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x\in D$,变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作 $y=f(x)$. 其中,x 叫做**自变量**,y 叫做**因变量**,数集 D 叫做这个函数的**定义域**.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记作 $f(x_0)$. 当 x 遍取 D 的各个数值时,对应的函数值全体组成的集合称为函数的值域,记作 W,即

$$W=\{y \mid y=f(x),x\in D\}.$$

从函数的定义可以看到,函数概念有两个要素:定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么这两个函数就是相同的,否则就不同.

对于函数的定义域,在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定. 但如果只是抽象地研究用算式表达的函数,这时我们约定:函数的定义域就是自变量所

能取的使算式有意义的一切实数值.例如,函数 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1,1)$.

表示函数的主要方法有三种:表格法、图形法、解析法(公式法).其中,用图形表示函数是基于函数图形的概念,即坐标平面上的点集

$$\{P(x,y) \mid y=f(x),x\in D\}.$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图形(图 1-3).

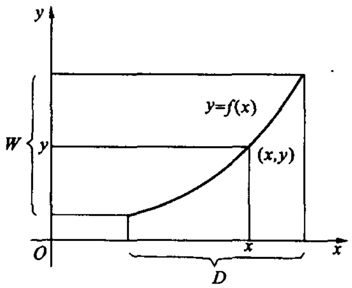

图 1-3

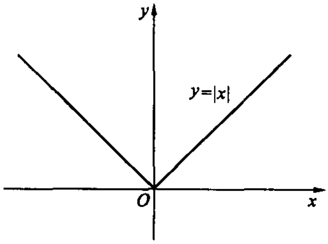

图 1-4

下面举几个函数的例子.

例 4 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=[0,+\infty)$,它的图形如图 1-4 所示.

例 5 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0,\\ 0, & \text{当 } x=0,\\ -1, & \text{当 } x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{-1,0,1\}$,它的图形如图 1-5 所示.

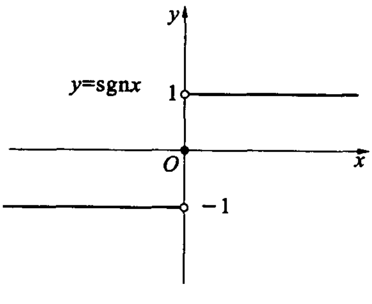

图 1-5

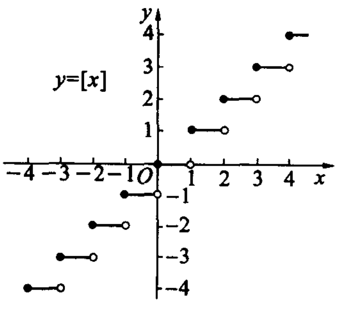

图 1-6

例 6 取整函数 $$y=[x].$$
这里，$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 例如，
$$[-3.5]=-4,[-1]=-1,[\sqrt{2}]=1,[\pi]=3.$$
容易看出，函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\mathbf{Z}$，它的图形如图 1-6 所示，这个图形也称为阶梯曲线.

例 7 狄利克雷(Dirichlet)函数
$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$
的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{0,1\}$，但它没有直观的图形表示.

从上面的例子中可以看到，有时一个函数要用几个式子表示. 这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为分段函数. 分段函数在实际问题中是经常出现的.

例 8 火车站行李收费规定如下：当行李不超过 50kg 时，按每 kg 0.15 元收费，当超出 50kg 时，超重部分按每 kg 0.25 元收费. 若质量 x kg 的行李收费为 y 元，则
$$y=\begin{cases}0.15x, & 0<x\leqslant 50,\\ 7.5+0.25(x-50), & x>50.\end{cases}$$
这是一个定义在$(0,+\infty)$上的分段函数，它给出了行李收费与行李质量之间的函数关系. 这种通过建立变量之间的函数关系来描述实际问题的方法，具有普遍的数学意义.

2. 函数的几种特性

(1)函数的有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在一个正数 M，使得对任一 $x\in X$，恒有
$$|f(x)|\leqslant M$$
则称函数 $f(x)$在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$在 X 上无界.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界，因为对任一实数 x，都有 $|\sin x|\leqslant 1$. 又如函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在开区间$(0,1)$内无界，但在区间$[1,+\infty)$内是有界的.

(2)函数的单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有
$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调增加的；相反，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调减少的. 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,\infty)$上是单调增加的，在区间$(-\infty,0]$上是单调减少的，但 $f(x)=x^2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内不是单调的(图 1-7).

又例如，函数 $f(x)=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的(图 1-8).

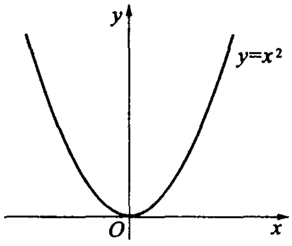

图 1-7

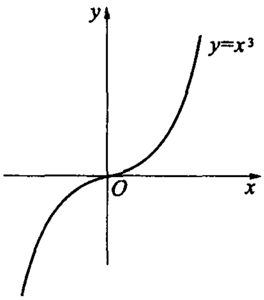

图 1-8

(3)函数的奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$). 如果对于任一 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$为**偶函数**；如果对于任一 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$为**奇函数**.

例如，函数 $y=\sin x$ 是奇函数. 函数 $y=\cos x$ 是偶函数. 函数 $y=\sin x+\cos x$ 既非奇函数，也非偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的(图 1-9)；奇函数的图形关于原点是对称的(图 1-10).

(4)函数的周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D. 如果存在常数 $T>0$，使得对于任一 $x\in D$，有$(x\pm T)\in D$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$为**周期函数**，T 称为 $f(x)$的**周期**. 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

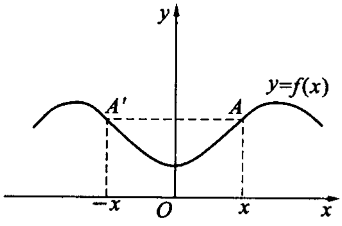

图 1-9

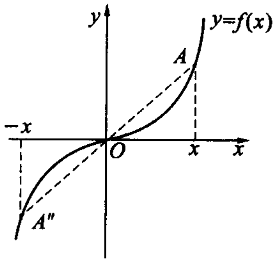

图 1-10

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

习题 1-1

1. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合：

(1) $|x|\leqslant 2$；　　(2) $|x-2|\leqslant 3$；

(3) $|x+1|\geqslant 2$；　　(4) $|x-a|\leqslant \delta$（a 为常数，$\delta>0$）.

2. 设 $A=(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$，$B=(-8,2]$，写出 $A\cup B$，$A\cap B$ 的表达式.

3. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{2x+3}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{4-x^2}$；

(3) $y=\dfrac{2}{x}-\sqrt{9-x^2}$；　　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(5) $y=\cos\sqrt{x}$；　　(6) $y=\tan(x+2)$；

(7) $y=\arcsin(x+3)$；　　(8) $y=\sqrt{2-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；

(9) $s=\ln(t+1)$；　　(10) $u=e^{\frac{1}{v}}$.

4. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x$，$g(x)=e^{\ln x}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^5-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x^2-1}$；

(4) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$，$g(x)=x-1$.

5. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$ 求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right),\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right),\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right),\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

6. 判断下列函数的单调性：

(1) $y=\dfrac{x}{x-1}$；　　(2) $y=x+\ln x$.

7. 下列函数中哪些是偶函数？哪些是奇函数？哪些既非奇函数又非偶函数？

(1) $y=x^2(1-x^2)$；　　(2) $y=3x^2-x^3$；

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；　　(4) $y=x(x-1)(x+1)$；

(5) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$；　　(6) $y=a^x+a^{-x}$.

8. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期.

(1) $y=\cos(3x-1)$；　　(2) $y=\tan 4x$；

(3) $y=1+\sin 2x$；　　(4) $y=x\cos x$；

(5) $y=\sin^2 x$.

9. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,\ l)$ 内的偶函数，若 $f(x)$ 在 $(0,\ l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,\ 0)$ 内单调减少.

10. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间 $(-l,\ l)$ 上的，证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

11. 试证明函数 $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ 在其定义域内是有界函数.

1.2 初等函数

1.2.1 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 若对于任一数值 $y\in W$，D 上至少可以确定一个数值 x 与 y 对应，这个数值 x 适合关系

$$f(x)=y.$$

这里如果把 y 看作自变量，x 看作因变量，按照函数概念，就得到一个新的函数，这个新的函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=\varphi(y)$. 这个函数的定义域为 W，值域为 D. 相对于反函数 $x=\varphi(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

由于习惯上自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，于是 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 通常写作 $y=\varphi(x)$. 这是因为函数的实质是变量的对应关系，只要对应关系不改变，自变量和因变量用什么字母表示是无关紧要的. 例如，$y=x^3$ 的反函数 $x=\sqrt[3]{y}$，通常写成 $y=\sqrt[3]{x}$.

那么，什么样的函数存在反函数呢？我们有如下的结论：

定理 **（反函数存在的充分条件）** 若函数 $y=f(x)$ 定义在某个区间 I 上并在该区间上单调（增加或减少），则它的反函数一定存在.

事实上，若设 $y=f(x)(x\in I)$ 的值域为 W，则由 $f(x)$ 在 I 上的单调性可知，对任一 $y\in W$，I 内必定只有唯一 x 的值，满足 $f(x)=y$，从而推得 $y=f(x)(x\in I)$ 的反函数存在.

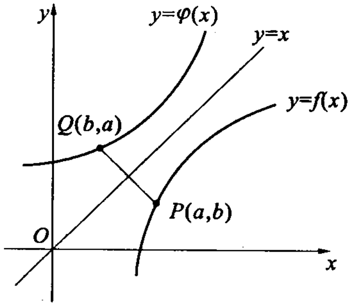

图 1-11

在同一个坐标平面上，直接函数 $y=f(x)$ 和反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 是对称的（图 1-11）. 因为如果 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点，则 $Q(b,a)$ 是 $y=\varphi(x)$ 图形上的点，反之亦然. 而 $P(a,b)$ 和 $Q(b,a)$ 关于直线 $y=x$ 是对称的，即直线 $y=x$ 垂直且平分线段 PQ.

1.2.2 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这五类函数统称为**基本初等函数**. 由于这些函数我们已经在初等数学中讲过，这里只是作简要介绍.

1. 幂函数

幂函数 $y=x^\mu$（μ 是常数），其定义域要看 μ 是什么数而定. 例如：当 $\mu=3$ 时，$y=x^3$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$；当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时，$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ 的定义域是 $[0,+\infty)$；当 $\mu=-\frac{1}{2}$ 时，$y=x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域是 $(0,+\infty)$. $y=x^\mu$ 中，$\mu=1,2,3,\frac{1}{2},-1$ 时是最常见的幂函数. 它们的图形如图 1-12 所示.

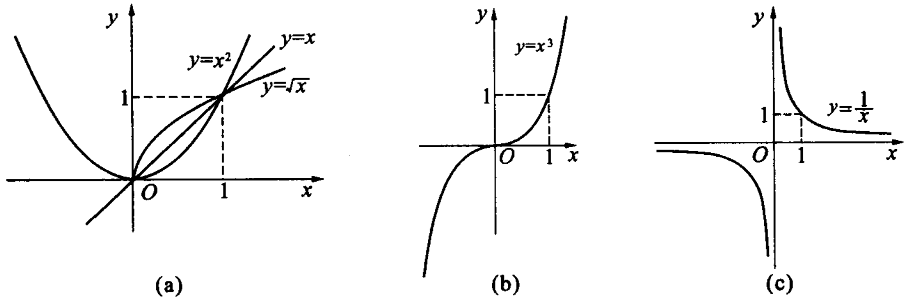

图 1-12

2. 指数函数

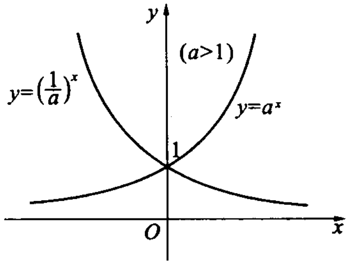

图 1-13

指数函数 $y=a^x$(a 是常数,且 $a>0,a\neq 1$),其定义域是区间$(-\infty,+\infty)$. 当 $a>1$ 时,指数函数 a^x 是单调增加的;当 $0<a<1$ 时,指数函数 a^x 是单调减少的.

由于 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x=a^{-x}$,所以 $y=a^x$ 的图形与 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图形是关于 y 轴对称的(图 1-13).

以常数 e=2.7182818…为底的函数 $y=e^x$,是科技中常用的指数函数.

3. 对数函数

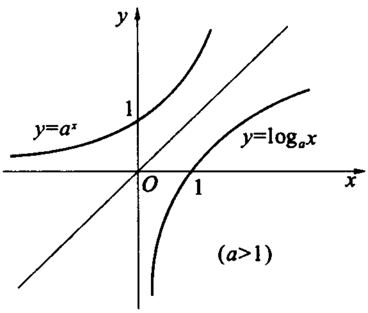

图 1-14

指数函数 $y=a^x$ 的反函数称为对数函数,记作 $y=\log_a x$(a 是常数,且 $a>0,a\neq 1$),它的定义域是区间 $(0,+\infty)$. 当 $a>1$ 时,对数函数 $\log_a x$ 是单调增加的;当 $0<a<1$ 时,对数函数 $\log_a x$ 是单调减少的.

对数函数 $y=\log_a x$ 的图形,可以从它所对应的指数函数 $y=a^x$ 的图形按反函数作图法的一般规则作出(图 1-14).

特别地,以常数 e 为底的对数函数 $y=\log_e x$ 叫做自然对数函数,简记作 $y=\ln x$.

4. 三角函数

常用的三角函数有

正弦函数　$y=\sin x$（图 1-15）.

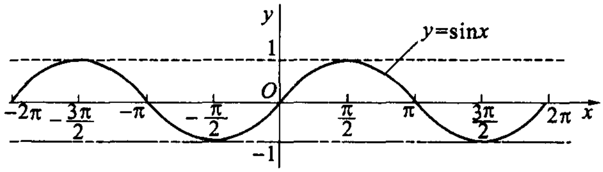

图 1-15

余弦函数　$y=\cos x$（图 1-16）.

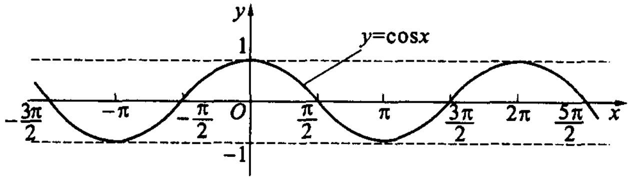

图 1-16

正切函数　$y=\tan x$（图 1-17）.

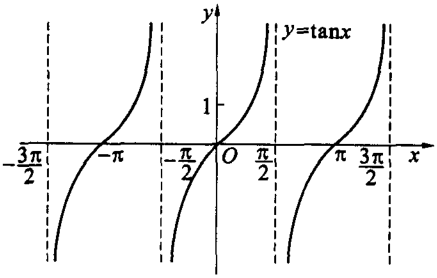

图 1-17

余切函数　$y=\cot x$（图 1-18）.

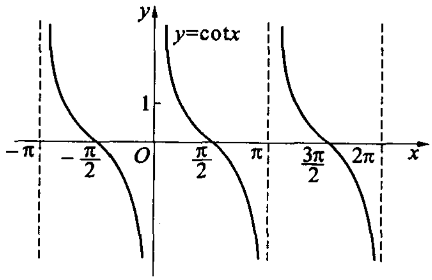

图 1-18

其中自变量以弧度作单位来表示.

正弦函数和余弦函数都是以 2π 为周期的周期函数，它们的定义域都是区间