高等师范专科学校教育学院协编教材

中学数学教材教法与初等数学研究

初等代数研究

李家莼　龙盛鼎　主　编

西南师范大学出版社

高等师范专科学校教育学院协编教材

中学数学教材教法与初等数学研究

初等代数研究

主编　李家莼　龙盛[illegible]

编者　龙盛鼎　陈兰贵　赵进裕
　　　沈慧仙　张应选　李绍成

西南师范大学出版社

(川)新登字 019 号

中学数学教材教法与初等代数研究

教 学 法

李家莼等 主编

西南师范大学出版社出版、发行

(重庆 北碚)

新华书店经销

西南师范大学教材印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/32 印张:15.125 字数:375 千

1990 年 5 月第一版 1995 年 4 月第 2 次印刷

印数:7,001—11,000

*

ISBN 7—5621—0267—8/G·154

说　明

根据师范专科学校和教育学院的培养目标，紧密结合当前师专、教院和初中数学教学的实际，"西南地区师专、教院教材编写协作会"组织编写了这套教材．本教材共分为中学数学教学法、初等代数研究和初等几何研究三册，供师专、教院数学专业使用，也可作为在职中学数学教师进修用书或教学参考．

本教材力求体现"加强基础，培养能力"的基本精神，努力做到叙述简洁、准确生动、富于启发．尽量列举初中数学教学的实例并进行理论分析．注意适当渗透新思想、新观念和新方法．每节有内容提要，力求使主题集中、思路清晰，便于教师教、学生学．

考虑到西南地区二年制与三年制师专并存的实际和教院成人教育的特点，本教材在内容要求上有较大的灵活性，安排了选学章节（用＊标出），二年制师专可根据实际情况少学或不学．教育学院也可根据自己的特点，对内容作适当的取舍．另外，还用小字编排有阅读材料，供师生参考．

鉴于本课程实践性强的特点，推荐有同步的录像资料，与本教材配套，供教师选用．本教材另配有习题解答与研究，供教师参考．

本教材主编李家莼，副主编龙盛鼎、陆中权．

编委：教学法分册：李家莼、张一民、李志凡、黄蕴魁、陈再漪、李近仁；初等代数研究分册：龙盛鼎、李绍成、

沈慧仙、赵进裕、陈兰贵、张应选；初等几何研究分册：陆中权、蒋廷康、徐品方、郭海清、李纯白、罗长青。

本分册是初等代数研究部分。第一章由龙盛鼎、陈兰贵，第二章由赵进裕，第三章由沈慧仙，第四章由张应选，第五章由李绍成分别执笔写成初稿。初审后，编委分头对各章进行了修改。在此基础上，最后由龙盛鼎、李绍成定稿。

参加本分册初审的有杨瑞华、周德裕、赵祖舜、杨思矗、李和芬、包志超、孙千祥、卢秉一、曾源华、杨瑞、徐德新。

在编写过程中，得到了四川省教委、云南省教厅、贵州省教委、西南师大出版社以及自贡师专、内江师专、成都大学、成都科学技术大学等校的关心、支持和帮助，在此表示感谢。

编写中，参考了大量有关的教材、书刊和文章，在此，对有关的编者和作者一并表示感谢。

限于编者水平和时间仓促，肯定存在缺点和错误，敬请读者给予批评指正。

编　者

1989年1月

目　录

绪　言

"代数"一词来自九世纪阿拉伯人阿里·花拉子模的著作《Kitab al jabr wal-mugabala》的头几个字，后来演变成了 Algebra，这就是拉丁文的"代数学"，它表示代数是作为一门关于形式运算的学科.

十六世纪后期，法国数学家韦达(1540—1603)引进了字母表示法，从这时起，人们把代数看成是关于字母的计算，关于由字母构成的公式的变换，以及关于解代数方程等的科学。它与算术的不同在于算术仅仅是对具体数字的运算，这是关于代数学的第一个观点．在十八世纪六十年代瑞士数学家欧拉（1707—1783）写的著作《代数学引论》中明显地表现了这种观点，他把代数定义成各种量的计算的理论.

十八世纪末及十九世纪初，代数学的中心问题之一，即代数方程的解法问题，渐渐地被人们认为是中心问题，许多数学家提出了关于研究一元 n 次代数方程的解法的复杂理论．这个时期内，人们把代数理解为研究方程理论的科学．这是关于代数学的第二个观点．在十九世纪中叶谢尔（1819—1885）的两卷本《代数学》里，第一次将代数定义成为代数方程的理论.

十九世纪后半期，代数这门科学开始在力学、物理学以及数学本身找到了越来越多的研究对象（向量、矩阵、张量、旋量、超复数等），对于这些对象很自然地要考虑到它们的运算，然而这些运算满足一些不同于数的其它规律，与

此相应，代数学起了质的变化，人们把代数理解为是研究各种代数结构的科学，也就是所谓公理化代数或抽象代数．这是代数学的第三个观点．二十世纪30年代范·德·瓦尔登的著作《近世代数》阐明了这个观点．这时，代数学的第三个观点又回到了它的第一个观点，即代数是字母计算的观点，但却起了质的变化，已经上升到更高级的形态．

作为教学科目的中学代数与作为科学的近代代数，就其性质和内容来说，有着显著的差别．列入中学代数这门课程的内容是很庞杂的，它涉及到数学的许多分支．其主要内容可归纳为：数的概念和运算；解析式的恒等变形；方程和不等式；函数；数列和极限；排列、组合和二项式定理；概率统计初步等．因此，中学代数不是数学学科的一个确定分支，它和中学的其它数学分科（平面几何、立体几何、解析几何）在一起，组成了数学教育初步所需的必要内容．

作为《中学数学教材教法与初等数学研究》课程之一的《初等代数研究》，根据师专、教育学院数学专业的培养目标，结合中学代数课程的内容，把初等数学（首先是初中代数）的基本问题，分别归纳为数、式、初等函数、方程和方程组、不等式等五个专题进行复习与研究．在各专题里，有的立足于中学代数教材，在理论上、观点上和方法上加以提高；有的围绕中学代数教材适当延伸和扩大；有的补充为初中数学教师所需要的课题．通过这些内容的学习，使知识系统化、深入化，在广度、深度和难度上有所发展，在观点上予以适当提高，使其对初中代数教材的理论体系更加清晰，对教材的内容有更深刻的理解，具有分析和处理初中代数教材，采用相应教法的能力，为今后从事初中代数教学工作打下必要的基础．

第一章　数

在数学中，数是最基本的必不可少的工具，也是实际中最广泛应用的工具．在中小学数学课程中，数的概念的扩展是主要内容之一．

严格地建立数的理论，超出本教材的范围．在这一章里准备采用和中学数学教材比较接近的方法，来探讨怎样建立数的系统，讨论自然数集、有理数集、实数集、复数集的主要性质，并简单地讨论一些整数的整除性问题．

1.1　数的概念的扩展

一、数的概念发展简史

从人类历史上看，人类形成数的概念，认识那些抽象的数，经历了漫长的岁月．

数产生于数数和测量．人类最初为了生产和生活的实际需要，要对某种物体的集合作量的估计，只能运用最原始的方法，如用“结绳”、“堆石子”等办法来计数．在长期的经验积累中，逐渐形成了“多少”的概念．这时，数还未被人们从具体的事物中分离出来，但已经被人们理解为事物集合不可缺少的性质．例如在某些民族给予数的名称里，数“5”是用“手”来表达的，数“20”是用“整个人”来表达的．5理解为“就象手的指头那样多”，20理解为“就象一个人所有的手指和脚趾那样多”，等等．

人们经过世世代代重复地进行这类比较和计算，最后才把数与具体事物的集合分离开来，引进数字符号，使数成为量的抽象．正是数字符号的引进，使人们对自然数的认识起了很重要的作用．数字符号不仅是抽象的数的具体化身，而且给出了运用大数的可能性．人们意识到了自然数列可以无限延续下去这一事实，也意识到了不但可以运用任何给定的数，而且可以讨论一般的数，建立和证明关于数的普遍定理，这时，关于自然数的概念才形成．

随着人类历史的发展，人们对客观世界存在的量的认识逐渐发展，因而对数的认识也逐渐发展．由于实际的需要，对用来表示量的新数逐步引进，数的系统逐渐得到扩展．

数的最先一次扩展是正分数的引入．人们在形成数的概念的同时，也逐步形成了形的概念，它们是相互作用着的．随着社会生产的发展，需要丈量土地，计算产量，分配劳动果实以及天文测量上的需要，仅用自然数就不能把它们完全表示出来．自然数的局限性，促使人们引用等分整数的数（正分数），形成正有理数集．我国在公元前一世纪的《周髀算经》中已记载有用分数计算月行速度．公元一世纪的《九章算术》的开头一章“方田章”就讲了分数并给出分数的四则运算法则，这是世界上关于分数的最早文献．

在小学算术里，零的引入作为数的第一次扩展．其实，历史上零的引入比分数要晚．数字符号系统中最重要的是起源于印度的十进制系统(阿拉伯数字和数字书写的方法)，我国在甲骨文上已经出现十进制，也是世界上用十进制最早的民族之一．这种数字书写法要求用某一种方法表明某一位是缺位．于是，大约在六世纪时“0”这个符号被引进了．

关于无理数概念的产生也是很早的事，并且它也是和度量问题联系着的．公元前六世纪古希腊时代，毕达哥拉斯在研究用一个正方形的边作单位长度去度量这个正方形的对角线时，发现二者是不可通约的，不能用分数表示，从而导致了无理数概念的产生，但当时他们仅以几何的形象来说明无理数的存在，还不曾有抽象的无理数概念．在十七世纪和十八世纪，随着数学分析的发展，实数成为主要的研究内容，然而这时还是以直观观念为基础，用直线上的点表示数．一直到十九世纪七十年代，由三位数学家戴德金、康托、维尔斯特拉斯分别地建立了严格的实数理论．

负数的概念的引进也是与量的度量问题分不开的，是由于要用数来确切地表示具有相反意义的量的需要．在外国数学中，负数概念是很迟才出现的，外国第一个应用负数概念的是印度人阿尼亚伯哈特（公元467年），但当时还不曾用符号来表达负数．“十、一”号的引入最早是十五世纪末德国数学家维特曼，在十六世纪时还有许多数学家不认识负数．一直到十七世纪，负数的概念才在数学中占有确定的地位．至于正负数用有向线段来表示，是法国数学家笛卡尔的功劳．在我国，负数概念很早就出现了．在《九章算术》中就指出了正负数的不同表示法和正负数的加减法则．公元174年刘洪（158—183）将正负术应用在历法上．

数的概念的更进一步的扩展——虚数的引进，与前几次数的概念的扩展，在性质上有所不同，它不是首先由于量的度量的需要，而是为了解决数学本身所提出的问题．在古代解二次方程时，就遇到了有虚根的情况，当时认为这类方程是不可解的．1545年意大利数学家卡丹在解三次方程中引

用了负数开平方的运算，于是产生了负数开平方的思想，但许多数学家都不承认这种新数．1572 年意大利数学家邦别利第一次在代数里给复数运算以正式论据后，对这些数才有了进一步的认识．1747年达朗贝尔对虚数给出了类似于实数的运算法则，提出了 $a+b\sqrt{-1}$ 的形式，但他还未给出“复数”的概念．“复数”一词是十九世纪高斯引进的．1777 年欧拉系统地建立了复数理论，并首创用符号“i”作为虚数单位，把复数记为 $a+bi$．1797 年北欧的万塞尔与 1806 年法国的阿拉贡分别在前人工作的基础上，提出了把复数 $a+bi$ (a、$b\in R$) 用平面内的点 (a,b) 来表示，找到了复数的几何模型．1831 年高斯与 1833 年哈密尔顿各自把复数规定为实数序偶．由于找到了复数的具体解释，同时在解决实际问题方面得到了广泛应用，这样，虚数才被人们普遍认识．

从上面的简短叙述中，我们可以看到，数的概念的产生与扩展是交错着进行的．例如在人们还没有完全认识负数之前，早已有了无理数的概念；在实数理论还没有建立之前，已经产生了虚数的概念．但从大体上来看，数的概念的历史发展过程是按照以下的逻辑顺序：

$$\text{自然数集}\xrightarrow{\text{(添正分数)}}\text{正有理数集}\xrightarrow{\text{(添正无理数)}}\text{正实}$$

$$\text{数集}\xrightarrow{\text{(添负数和零)}}\text{实数集}\xrightarrow{\text{(添虚数)}}\text{复数集}.$$

二、数的扩展原则

前面从实际的需要谈了数的概念的扩展．单从数学本身运算的需要看，引入新数也是十分必要的．

数的概念的每次扩展，都能解决数的运算的矛盾，这主要是解决"逆运算"的实施问题.

在自然数集中，加、乘运算可实施，但乘法的逆运算——除法不能永远实施.如在自然数集内方程$3x=5$无解. 引入正分数后，除法（除数不为零）在算术数集里就可实现.

在正有理数集里，加法的逆运算——减法不能永远实施，引进负数后，减法可在有理数集里永远实施. 如方程 $2x+5=0$ 便可解.

要使正有理数乘方的逆运算——开方能实施，就必须引进无理数，把数集扩展到实数，从而方程 $x^2=2$ 便可解.

要使负实数开方能实施，就须引进虚数，把数集扩展到复数. 从而使方程 $x^2=-1$ 有解.

在中小学数学课程中共进行了五次数的概念的扩展. 小学算术中进行了两次：引入"0"、引入"分数"构成算术数集. 中学数学中进行了三次扩展：引入负数，构成有理数集；引入无理数，构成实数集；引入虚数，构成复数集.

在数的概念的每一次扩展后所得的数集，包括前面的数集；并且经过扩展所得的数集具有前面数集的主要性质；也解决了前面数集不能（或不一定能）施行的某种运算的问题. 一般地，数集扩展应遵循下面的几条原则：

（1）增添新的元素，使原数集是新数集的真子集.

（2）从保持原来的一些性质（运算律、顺序律)出发，在新数集里定义元素间的一些基本关系和运算，并且原数集里的元素在新数集的运算定义下，运算结果应与在原数集中的运算结果是相同的.

（3）新的数集解决了原数集所不能解决的矛盾.