高教版

全国各类成人高考复习指导丛书 第八版

（高中起点升本、专科）

数学

理工农医类

附解题指导

孙成基 主编

高等教育出版社

39.23
SCJ

全国各类成人高考复习指导丛书(第八版)

(高中起点升本、专科)

数　学 附解题指导

(理工农医类)

孙成基　主编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学:附解题指导(理工农医类)/孙成基主编.—8版.—北京:
高等教育出版社,2000.6
(全国各类成人高考复习指导丛书)
ISBN 7-04-009004-X

Ⅰ.数... Ⅱ.孙... Ⅲ.数学-成人教育:高等教育
-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.01-42

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 62081 号

责任编辑 郭思旭 李 陶 **封面设计** 王 雎 **责任绘图** 潘曙光 陈钧元
版式设计 马静如 **责任校对** 王 巍 **责任印制** 陈伟光

数学:附解题指导(理工农医类)(第八版)
孙成基 主编

出版发行 高等教育出版社			
社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号		**邮政编码**	100009
电 话 010-64054588		**传 真**	010-64014048
网 址 http://www.hep.edu.cn			

经 销 新华书店北京发行所
排 版 高等教育出版社照排中心
印 刷 北京民族印刷厂

		版 次	1986 年 4 月第 1 版
开 本	787×1092 1/16		2000 年 6 月第 8 版
印 张	19.5	**印 次**	2000 年 6 月第 1 次印刷
字 数	470 000	**定 价**	18.70 元

第八版前言

本丛书经教育部高校学生司、教育部考试中心组织的大纲编写审定专家和命题研究人员审阅，并提出修改意见。

本丛书第八版是在原第七版的基础上，根据教育部2000年6月颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——高中起点升本、专科》修订而成的。

本丛书自1986年问世以来，一直受到广大读者的欢迎，在全国各类成人高考考生的复习备考中发挥着重要作用。十几年来，随着我国成人高等教育事业的发展和广大读者学习需求的变化，特别是全国各类成人高等学校招生复习考试大纲的几次修订，相应地这套丛书也做了七次全面修订，几经修改完善，使得这套丛书的整体质量不断提高，结构更加科学、合理，成为了具有广泛适用性的成人高考考生复习备考的主干教材，在全国享有良好声誉。

按新大纲进行修订后的第八版，具有以下几个方面的特点：

一、保持和发展了这套丛书作为复习主干教材的传统特点：紧扣大纲、内容翔实、叙述准确、重点突出，注重基础知识复习和能力训练，题型与练习贴近考试实际，实用性、针对性强。

二、在内容的选择和编排方面，既充分体现新大纲的要求，又适合成人学习的特点。丛书各科都严格按照新大纲的规定和要求，进一步对内容编排做了调整，对知识点做了重新梳理，对由于内容增删产生的连贯性问题做了科学的处理，使各科的内容编排既和新大纲一致，又重点突出，分布合理，完善了适合成人学习特点的体系结构。

三、在知识内容方面，按新大纲要求进行了知识点的增删，举例、习题注重吸收新知识、新成果，增强了时代感。

四、从内容选择到题型设计以及叙述方式等各个方面，注重从知识立意向能力立意的转变。加强了学科基本能力、学科综合能力、学科实验能力的训练，以提高考生综合运用知识的能力和应试水平。

五、在满足新大纲要求的前提下，适当压缩字数，使丛书更加简明、实用。

修订后的本丛书(第八版)包括如下9本：

《政治》附解题指导　　《物理》附解题指导

《语文》附解题指导　　《化学》附解题指导

《数学》附解题指导(文史财经类用)　　《历史》附解题指导

《数学》附解题指导(理工农医类用)　　《地理》附解题指导

《英语》附解题指导

考虑到每年的政治科目的考试都有关于时事政治方面的内容，我们在考试当年都将编写出版一本《时事政治辅导》。

《数学》(理工农医类用)本次修订主要内容为：1. 增加平面向量、空间向量、概率统计初步等内容。2. 删去幂函数、指数与对数方程、三角方程、积化和差与和差化积公式、极坐标等内容。

另外，反三角函数改为反三角函数的符号，作为一节并入解三角形一章，删去反三角函数一节中的绝大部分内容。

本书主编为孙成基(《1986年全国各类成人高等学校招生考试复习大纲》起草人)，参加编写的还有刘宗华、王燕生、烟学敏。本次修订工作由孙成基完成。

高等教育出版社

2000年6月

目　录

代　数(Ⅰ)

三 角 函 数

平面解析几何

代　数(Ⅱ)

立 体 几 何

代数(Ⅰ)

第一章　数、式、方程和方程组

【本章要求】

1. 理解有理数、实数及数轴、相反数、绝对值、倒数、算术平方根的概念,会进行有关计算.

2. 理解有关整式、分式、二次根式的概念,掌握它们的一些性质和运算法则.

3. 掌握一元一次方程、一元二次方程的解法,能运用一元二次方程根的判别式以及根与系数的关系解决有关问题.

4. 会解有唯一解的二元一次方程组、三元一次方程组;会解由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组;会解简单的两个二元二次方程组成的方程组(主要指以下几种类型:用加减消元法可消去某个未知数的,可消去二次项的,以及至少有一个方程可分解成一次方程的).

【内容提要】

1. 实数系统表

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\quad\text{(有限小数或无限循环小数)}\end{cases}\\\text{无理数}\quad\text{(即无限不循环小数)}\end{cases}$$

2. 数轴

规定了原点、方向和长度单位的直线,叫做**数轴**. 如图 1 - 1.

实数与数轴上的点存在一一对应的关系,即任意一个实数都对应着数轴上一个点,而数轴上任意一个点都对应着一个实数.

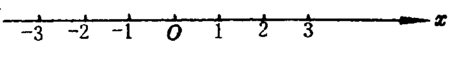

图 1 - 1

3. 相反数与倒数

只有符号不同的两个数,称其中一个是另一个的**相反数**. 规定零的相反数是零.

1 除以某数的商称作这个数的**倒数**,零无倒数.

4. 实数的绝对值

实数 a 的绝对值,用符号 $|a|$ 表示,其定义如下:一个正实数的绝对值是它本身;一个负实数的绝对值是它的相反数;零的绝对值是零,即

$$|a|=\begin{cases}a\ \ ,\text{当 } a\geq 0 \text{ 时},\\-a,\text{当 } a<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

注意 $|a| \geqslant 0$,即$|a|$是非负数.

5. 平方根与算术平方根

(1) 平方根 如果 $x^2 = a(a > 0)$,那么 x 就叫做 a 的**平方根**.

正数 a 的平方根有两个,它们互为相反的数,记作 $\pm\sqrt{a}$.

(2) 算术平方根 正数 a 的正的平方根$\sqrt{a}$,也叫做**算术平方根**(简称**算术根**).

规定零的算术根是零,即$\sqrt{0} = 0$.

注意 (i) 若 $a \geqslant 0$,则$\sqrt{a} \geqslant 0$,即$\sqrt{a}$是非负数.

(ii) 对于任意实数 a,有$\sqrt{a^2} = |a|$.

(iii) 在实数范围内,负数没有平方根.

6. 代数式系统表

$$代数式\begin{cases}有理式\begin{cases}整式\begin{cases}单项式\\多项式\end{cases}\\分式\end{cases}\\无理式\end{cases}$$

(1) 整式及其加、减法

整式 单项式和多项式统称为**整式**.

同类项 在多项式的各项中,如果一些项所含字母相同,并且相同字母的指数也分别相同,这些项就叫做**同类项**.

合并同类项 把多项式中的同类项合并成一项,即把同类项的系数相加,所得结果作为系数,字母和字母的指数不变,叫做**合并同类项**.

整式的加、减运算就是合并同类项.

(2) 整式的乘法、乘方

单项式乘多项式 用单项式去乘多项式的每一项,再把所得的积相加.

多项式乘多项式 先用一个多项式的每一项乘以另一个多项式的每一项,再把所得的积相加.

乘法公式

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

(3) 分式及其运算

分式 形如$\dfrac{A}{B}$的式子叫做**分式**,其中 A,B 为整式且 B 含有字母.

在本书中,如果没有特别说明,均指分式中的分母的值不为零.

分式也有与分数类似的通分、约分、四则运算.

(i) 约分

$$\frac{ma}{mb} = \frac{a}{b} \quad (m \neq 0).$$

(ii) 分式的加、减法

$$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c};\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm cb}{bd}.$$

(iii) 分式的乘、除法

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc};\frac{a}{b}\div\frac{d}{c}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

(iv) 分式的乘方

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}(n\text{ 为正整数}).$$

7. 二次根式 式子$\sqrt{a}$($a\geqslant0$)叫做**二次根式**.

注意 (i) 当 $a<0$ 时,$\sqrt{a}$没有意义.

(ii) 当 $a\geqslant0$ 时,$(\sqrt{a})^2=a$.

(1) 二次根式的性质

(i) 当 $a\geqslant0$ 且 $b\geqslant0$ 时,

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

(ii) 当 $a\geqslant0$ 且 $b>0$ 时,

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

(2) 最简二次根式 满足下列条件的二次根式叫做**最简二次根式**:

(i) 被开方数的每一个因式的指数都小于根指数 2;

(ii) 被开方数不含分母.

(3) 二次根式的运算

(i) 加、减法 先把各个根式化成最简二次根式,再把被开方数相同的根式分别合并.

(ii) 乘法 把被开方数相乘,根指数不变.

(iii) 除法 把被开方数相除,根指数不变.

8. 一元二次方程

(1) 一般形式及求根公式

方程 $ax^2+bx+c=0$(a,b,c 是常数,且 $a\neq0$),叫做**一元二次方程的一般形式**.

求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

(2) 一元二次方程根的判别式

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的判别式,用符号 Δ 表示,$\Delta=b^2-4ac$.

(i) 当 $\Delta>0$ 时,方程有两个不相等的实根.

(ii) 当 $\Delta=0$ 时,方程有两个相等的实根.

(iii) 当 $\Delta<0$ 时,方程没有实根.

(3) 一元二次方程根与系数的关系

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根是 x_1,x_2,则

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

9. 二元、三元一次方程组

(1) 二元一次方程组的一般形式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

(2) 三元一次方程组的一般形式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

(3) 二元、三元一次方程组的基本解法

(i) 代入消元法．

(ii) 加减消元法．

通过“消元”将解二元、三元一次方程组，转化为解一元一次方程．

【例题与解题指导】

例 1 选择题①：

(1) a，b 是实数，下列等式中成立的是

(A) $|a+b|=|a|+|b|$　　(B) $|a-b|=|a|-|b|$

(C) $|a-b|=|b-a|$　　(D) $|ab|=a|b|$

(2) 下列各式中，计算正确的是

(A) $\sqrt{3^2+4^2}=3+4=7$　　(B) $\sqrt{41^2-40^2}=41-40=1$

(C) $\sqrt{(x+1)(x+2)}=\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}$（$x$ 为实数）

(D) $\sqrt{(-3)\times(-27)}=9$.

(3) 关于 x 的方程 $x^2-(2n+3m)x+5m=0$ 的两根之和为 2，两根之积为 -10，则

(A) $m=-2,\ n=4$　(B) $m=2,\ n=-4$　(C) $m=2,\ n=4$　(D) $m=-2,\ n=-4$

(4) 已知关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 的根为 p 和 q，则 p 和 q 的值为

(A) $p=-1,\ q=-2$　　(B) $p=1,\ q=-2$ 或 $p=0,\ q=0$

(C) $p=1,\ q=0$　　(D) $p=0,\ q=-2$ 或 $p=1,\ q=0$

(5) 已知 a，b 是方程 $x^2+(m-2)x+1=0$ 的两根，则 $(1+ma+a^2)(1+mb+b^2)$ 的值为

(A) 2　(B) -2　(C) 4　(D) -4

解 (1)**方法一** 当 a，b 异号时(A)，(B)不成立．当 $a<0$ 时，(D)不成立．因为只有一个结论是正确的，故(C)成立．

方法二 因为 $a-b$ 与 $b-a$ 互为相反的数，所以 $|a-b|=|b-a|$，因此(C)成立．

(2) 由于 $\sqrt{(-3)\times(-27)}=\sqrt{81}=9$，故选(D)．

(3) 由已知及一元二次方程根与系数的关系，得

$$\begin{cases} 2n+3m=2, \\ 5m=-10. \end{cases}$$

① 本书中的选择题，都是单项选择题，即每个题中只有一个选项是符合题目要求的．

解之，　　得 $\begin{cases} m=-2, \\ n=4. \end{cases}$ 　　故选(A).

(4) **方法一** 由已知及一元二次方程根与系数的关系，得

$$\begin{cases} p+q=-p, & ① \\ pq=q. & ② \end{cases}$$

由②，得 $pq-q=0$，$q(p-1)=0$，则 $q=0$ 或 $p=1$.

由①，当 $q=0$ 时，$p=0$；当 $p=1$ 时，$q=-2$.

综上，$p=0$，$q=0$ 或 $p=1$，$q=-2$. 故选(B).

方法二 将选项(B)中的 $p=0,q=0$ 代入原方程，得 $x^2=0$.

此方程两根均为0. 可见，符合题目要求. 而其它选项中均不符合题目要求，故选(B).

(5) 由已知及方程根的定义，得

$$a^2+(m-2)a+1=0, a^2+ma+1=2a, \quad ①$$

$$b^2+(m-2)b+1=0, b^2+mb+1=2b. \quad ②$$

①×②，得 $(a^2+ma+1)(b^2+mb+1)=4ab$.

又由已知及一元二次方程根与系数的关系，得

$$ab=1.$$

所以 $(a^2+ma+1)(b^2+mb+1)=4$，故选(C).

说明 本例(4)方法一，叫做"直接法"，即根据题中的已知条件做出解答，再与选项相核对；方法二叫做"验证法"，即对所给选项进行验证，找出符合要求的选项，此为解答选择题的一种"间接法".

例2 填空题：

(1) $-x(x\neq0)$ 的相反数是____.

(2) 两个互为相反数的和是____.

(3) 不为零的两个互为相反数的商是____.

(4) $\sqrt{12}-\sqrt{27}=$____.

(5) $\sqrt{0.04\times0.25}=$____.

(6) $\sqrt{26^2-10^2}=$____.

(7) 计算：当 $x>0$ 时，$\frac{|x|}{x}=$____. 当 $x<0$ 时，$\frac{|x|}{x}=$____.

(8) 当____时，$|a-b|+a-b=0$

(9) 比较大小：$2-|x-1|$____2

(10) 当 $a\geqslant b$ 时，$\sqrt{(a-b)^2}=$____. 当 $a<b$ 时，$\sqrt{(a-b)^2}=$____.

(11) a 是实数且 $a\neq0$，a^2 的平方根是____. a^2 的算术根是____.

(12) 已知 $2a-4\leqslant0$，化简 $2\sqrt{a^2-4a+4}-|6-3a|=$____.

(13) 若方程 $5x^2+kx-6=0$ 的一个根是2，则它的另一个根是________，k 的值是________.

解 (1) $-x$ 的相反数为 $-(-x)=x$.

(2) 当 $a\neq0$ 时，a 的相反数为 $-a$，则 $a+(-a)=0$；而零的相反数是零，它们的和仍为0.

(3) a 的相反数为 $-a$,又 $a\neq 0$,则$\frac{a}{-a}=-1$.

(4) 原式 $=2\sqrt{3}-3\sqrt{3}=-\sqrt{3}$.

(5) 原式 $=\sqrt{0.04}\cdot\sqrt{0.25}=0.2\times 0.5=0.1$.

(6) 原式 $=\sqrt{(26+10)(26-10)}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{16}=24$.

(7) 当 $x>0$ 时,$|x|=x$,所以$\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1$;

当 $x<0$ 时,$|x|=-x$,所以$\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1$.

(8) 要使$|a-b|+a-b=0$,即$|a-b|=-(a-b)$,所以当 $a-b\leqslant 0$ 即 $a\leqslant b$ 时,上式成立.

(9) 无论 x 为任何实数,总有$|x-1|\geqslant 0$,所以 $2-|x-1|\leqslant 2$.

(10) 当 $a\geqslant b$ 时,$\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|=a-b$;

当 $a<b$ 时,$\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|=-(a-b)=b-a$.

(11) a^2 的平方根为 $\pm a$;a^2 的算术根为$|a|$.

(12) 原式 $=2\sqrt{(a-2)^2}-3|2-a|=2|a-2|-3|a-2|=-|a-2|$.

由已知,$2a-4\leqslant 0$,所以 $a-2\leqslant 0$,则原式 $=-[-(a-2)]=a-2$.

说明 对于含有二次根式的化简或计算题,如果被开方式是二次三项式,则可考虑将它配成完全平方式,以便进行计算,开方时要注意算术根的概念.

(13) **方法一** 设方程 $5x^2+kx-6=0$ 的另一个根为 x_1,那么

$$2\cdot x_1=-\frac{6}{5},x_1=-\frac{3}{5}.$$

又

$$\left(-\frac{3}{5}\right)+2=-\frac{k}{5}.$$

解得

$$k=-7.$$

方法二 因为 2 是方程 $5x^2+kx-6=0$ 的一个根,由方程的根的定义,得

$$5\times 2^2+k\times 2-6=0.$$

解得

$$k=-7.$$

另一根的求法与方法一同.

例 3 计算$(a+b-c)(a-b+c)$.

解 原式 $=[a+(b-c)]\cdot[a-(b-c)]=a^2-(b-c)^2=a^2-b^2+2bc-c^2$.

说明 两个多项式相乘,如果经过适当变形能用乘法公式,可使计算简便.

例 4 计算$\frac{2}{3}\sqrt{81a}+6\sqrt{\frac{a}{9}}-3a\sqrt{\frac{1}{a}}$.

解 原式 $=6\sqrt{a}+2\sqrt{a}-3\sqrt{a}=5\sqrt{a}$.

说明 先将各个根式化为最简二次根式,再计算.

例 5 解方程组

$$\begin{cases}2x+5y=-21, & ①\\ x+3y=8. & ②\end{cases}$$

解法一 由②,得

$$x = 8 - 3y. \quad ③$$

把③代入①,得 $2(8-3y)+5y=-21, 16-6y+5y=-21.$

所以 $$y = 37.$$

把 $y=37$ 代入③,得 $x = 8 - 3\times 37 = -103.$

所以方程组的解为 $\begin{cases} x = -103, \\ y = 37. \end{cases}$

解法二 $2\times$②,得

$$2x + 6y = 16. \quad ④$$

④ - ①,得 $$y = 37.$$

将它代入②得 $x=-103$,与解法一结果一样.

说明 解法一、二分别叫做代入消元法和加减消元法.通过"消元"可将解二元一次方程组转化为解一元一次方程.

例 6 解方程组

$$\begin{cases} x - y + z = 5, & ① \\ 4x - 2y + z = 4, & ② \\ 9x - 3y + z = 5. & ③ \end{cases}$$

解 ② - ①,得 $$3x - y = -1. \quad ④$$

③ - ①,得 $$8x - 2y = 0,$$

即 $$4x - y = 0. \quad ⑤$$

⑤ - ④,得 $x=1$.把它代入⑤,得 $y=4$.把 $x=1, y=4$ 代入①,得 $z=8$.

所以方程组的解为 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 4, \\ z = 8. \end{cases}$

说明 解三元一次方程组,可先在方程组中的三个方程中"消去"同一个未知数,从而转化为解二元一次方程组.

例 7 解方程组

$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0, & ① \\ y^2 = 8x. & ② \end{cases}$$

解 由①,得

$$y = 2(x-2). \quad ③$$

把③代入②,得 $4(x-2)^2 = 8x, x^2-4x+4=2x, x^2-6x+4=0,$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = 3 \pm \sqrt{5}.$$

把 $x_1 = 3+\sqrt{5}, x_2 = 3-\sqrt{5}$ 分别代入③,得 $y_1 = 2+2\sqrt{5}, y_2 = 2-2\sqrt{5}.$

所以方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = 3+\sqrt{5}, \\ y_1 = 2+2\sqrt{5} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2 = 3-\sqrt{5}, \\ y_2 = 2-2\sqrt{5}. \end{cases}$

说明 在二元二次方程组中,如果有一个方程是二元一次方程,可通过代入"消元"转化为解

一元二次方程．

例 8 解方程组

$$\begin{cases}(a-2)^2+(b-2)^2=2, & ①\\(a-4)^2+(b-4)^2=2. & ②\end{cases}$$

解 原方程可化为

$$\begin{cases}a^2+b^2-4a-4b+6=0, & ③\\a^2+b^2-8a-8b+30=0. & ④\end{cases}$$

③－④，得

$$4a+4b-24=0,$$

$$a=6-b. \qquad ⑤$$

把⑤代入③，得

$(6-b)^2+b^2-4(6-b)-4b+6=0,\quad 2b^2-12b+18=0, b^2-6b+9=0,\quad (b-3)^2=0.$

所以 $b=3$．把它代入⑤，得 $a=3$．

所以原方程组的解为$\begin{cases}a=3,\\b=3.\end{cases}$

说明 由两个二元二次方程组成的方程组，如果能"消去"二次项，得到一个二元一次方程（如方程⑤），便可能化为解二元二次方程与二元一次方程组成的方程组（如方程⑤与③或⑤与④）．

例 9 解方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2=20, & ①\\x^2-5xy+6y^2=0. & ②\end{cases}$$

解 由②得 $(x-2y)(x-3y)=0$．所以 $x-2y=0$ 或 $x-3y=0$．因此原方程组可化为

$$\begin{cases}x^2+y^2=20,\\x-2y=0\end{cases} \quad 或 \begin{cases}x^2+y^2=20,\\x-3y=0.\end{cases}$$

分别解这两个方程组，得原方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=4,\\y_1=2;\end{cases} \quad \begin{cases}x_2=-4,\\y_2=-2;\end{cases} \quad \begin{cases}x_3=3\sqrt{2},\\y_3=\sqrt{2};\end{cases} \quad \begin{cases}x_4=-3\sqrt{2},\\y_4=-\sqrt{2}.\end{cases}$$

说明 由两个二元二次方程组成的方程组，如果其中一个方程可分解因式（如方程②），便可转化为解二元二次方程与二元一次方程组成的方程组．

例 10 k 取什么值时，方程 $2x^2-(4k+1)x+2k^2-1=0$

(1) 有两个不相等的实根；(2)有两个相等的实根；(3)有实根．

解 $\Delta=[-(4k+1)]^2-4\times2(2k^2-1)=8k+9$．

(1) 当 $8k+9>0$ 即 $k>-\dfrac{9}{8}$ 时，方程有两个不相等的实根；

(2) 当 $8k+9=0$ 即 $k=-\dfrac{9}{8}$ 时，方程有两个相等的实根；

(3) 当 $8k+9\geqslant0$ 即 $k\geqslant-\dfrac{9}{8}$ 时，方程有实根．

说明 一元二次方程有实根，即有两个不相等的实根或有两个相等的实根．

例 11 设 a,b 为方程 $x^2+mx+m^2+a=0$ 的两根，求 a^2+ab+b^2+a 的值．

解法一 由已知及一元二次方程根与系数的关系，得

$$\begin{cases} a+b=-m, & ① \\ a\cdot b=m^2+a. & ② \end{cases}$$

由①，得

$$(a+b)^2=m^2. \quad ③$$

把③代入②，得 $ab=(a+b)^2+a,\quad ab=a^2+2ab+b^2+a.$

所以 $a^2+ab+b^2+a=0.$

解法二

$$a+b=-m,\quad m=-(a+b). \quad ④$$

因为 a 是方程的根，于是有

$$a^2+ma+m^2+a=0. \quad ⑤$$

把④代入⑤，得

$a^2-a(a+b)+(a+b)^2+a=0,\quad a^2-a^2-ab+a^2+2ab+b^2+a=0.$

所以

$$a^2+ab+b^2+a=0.$$

说明 以上两种解法的要点都是"消去"m，找出 a,b 的关系式，进而整理即得.

例 12 已知 $a^2-3a-1=0, b^2-3b-1=0$，且 $a\neq b$，求：

(1) a^2+b^2；(2) $(a-b)^2$；(3) a^3+b^3.

解 由已知及方程的根的定义可知，a、b 是方程 $x^2-3x-1=0$ 的两根.因此

$$a+b=3 \text{ 且 } ab=-1.$$

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\cdot(-1)=11.$

(2) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=3^2-4\cdot(-1)=13.$

(3) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=3\cdot[11-(-1)]=36.$

说明 本例解法是由已知 a、b 为一元二次方程 $x^2-3x-1=0$ 的两个根，从而可以确定 $a+b$ 和 ab 的值.再利用所求式子与 $a+b, ab$ 有关的恒等式求解.

例 13 已知方程 $x^2-px+q=0$ 的两个实根的倒数是方程 $x^2-rx+s=0$ 的两个实根，且 $r\neq 0$，求 $\dfrac{sp}{r}$ 的值.

分析 将 sp 与 r 都用同一个未知数或未知式子表示，进而将它们"消去"，即可求出比值.

解 设 x_1, x_2 为方程 $x^2-px+q=0$ 的两个实根，则 $x_1+x_2=p$.

又知 $\dfrac{1}{x_1},\dfrac{1}{x_2}$ 是方程 $x^2-rx+s=0$ 的两个实根.

于是 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=r, \dfrac{1}{x_1}\cdot\dfrac{1}{x_2}=s$，即 $r=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}, s=\dfrac{1}{x_1x_2}.$

所以 $$sp=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2},$$

从而 $$\frac{sp}{r}=1.$$

说明 本例介绍了求比值的一般方法，请留意.

练　习　一

A　组

1. 选择题：

(1) 下列等式成立的是

(A) $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$　　(B) $3+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

(C) $a\sqrt{x}-b\sqrt{x}=(a-b)\sqrt{x}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{18}}{2}=\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5$

(2) 两个根的和为6，其差的绝对值为8，则此方程为

(A) $x^2-6x+7=0$　(B) $x^2+6x+8=0$　(C) $x^2+6x-8=0$　(D) $x^2-6x-7=0$

(3) 若方程 $x^2+px-6=0$ 和 $x^2+5x-(p+1)=0$ 仅有一个相同的根，则它们相同的根及 p 的值分别为

(A) $-1,5$　(B) $1,5$　(C) $-1,-5$　(D) $1,-5$

2. 填空题：

(1) 若 $x<0$，$|x|$ 的相反数是____.

(2) 若 $x<y$，$|x-y|$ 的相反数是____.

(3) 方程 $|x|-3=0$ 的解为 $x=$____.

(4) 已知 $a+b\leqslant 0$，化简 $|a+b|+a=$____.

(5) 当____时，$a+|a-b|=b$.

(6) $\dfrac{1}{25}$的平方根是____. $\dfrac{1}{25}$的算术根是____.

(7) 已知 $x^2=144$，则 $x=$____，$\sqrt{144}=$____.

(8) 当____时，$\sqrt{(1-x)^2}=1-x$，当____时，$\sqrt{(1-x)^2}=x-1$.

(9) 已知 $x<2$. 化简 $\sqrt{(x-2)^2}+|2-x|=$____.

(10) 已知方程 $x^2+3x+m=0$ 的两根之差是5，则 m 的值等于______.

(11) 已知方程 $2x^2-5x+m=0$ 的两根互为倒数，则 $m=$______.

(12) 设一元二次方程的两根之比为3:4，其根的判别式的值为4，则此方程是____________.

3. 解下列方程：

(1) $|1-2x|-5=0$；　(2) $|1-2x|+5=0$.

4. 已知 $|1-2x|+|2-3y|=0$，求实数 x,y.

5. 已知 $\sqrt{1-x}+|1+y|=0$，求实数 x,y.

6. 不解方程，判断下列方程是否有解：

(1) $\sqrt{x-4}+2=0$；

(2) $|x+1|+\sqrt{(x+2)^2}=0$.

7. 求方程 $(x+y-2)^2+\sqrt{x^2-2x+1}=0$ 的实数解.

8. 如果 $|x-4|+|x+1|=5$，求实数 x 的范围.

9. 如果 a,b,c 是实数,且 $a^2+b^2+c^2+26=2a+6b+8c$.求 a,b,c.

10. 分式$\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)}$,当 x 为何值时为零?当 x 为何值时没有意义?

11. 计算$\left(\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{x-1}{x^2-4x+4}\right)\div\frac{x-4}{x}$.

12. 把下列各式化为最简二次根式:

(1)$\sqrt{1\frac{4}{5}}$;　　　(2)$\sqrt{\left(3\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$.

13. 计算$(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})\div\sqrt{3}$.

14. 把下列各式的分母有理化:

(1) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$;

(2) $\frac{1}{x-\sqrt{1+x^2}}$;

(3) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

15. 用配方法解下列方程:

(1) $x^2-x-1=0$;　　　(2) $(2x-3)(x+1)=1$.

16. 解下列方程组:

(1)$\begin{cases}2D+3E-F=-6,\\D+2E+F=-1,\\3D-E+2F=9;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}y=\frac{1}{x},\\y=x;\end{cases}$　(3) $\begin{cases}y=\sqrt{x},\\y=x;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}y=2x,\\y=-x^2+3;\end{cases}$　(5) $\begin{cases}x^2-2y=0,\\x^2+y^2=8.\end{cases}$

17. 已知方程 $mx^2+mx+5=m$ 有两个相等的实根,试解这个方程.

18. 若方程 $ax^2+3x-2b=0(a\neq0)$的两根分别是方程 $3x^2-ax+2b=0$ 两根的倒数,求 a,b 的值.

练习一解题指导

A　组

1. 解　(1) 在(A)中,$\sqrt{2}$与$\sqrt{3}$都是最简二次根式,但被开方数不同,因此不能合并.可排除(A);又两个实数相加一般地不等于两个实数相乘,故可排除(B);(D)中,正确的计算是

$$\frac{\sqrt{8}+\sqrt{18}}{2}=\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

又可排除(D);选(C).

(2) 已知方程两根的和为 6,故可排除(B),(C);在(A)中,设 x_1,x_2 是方程 $x^2-6x+7=0$ 的两个根,则

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2.$$