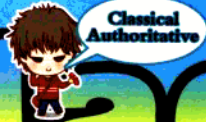


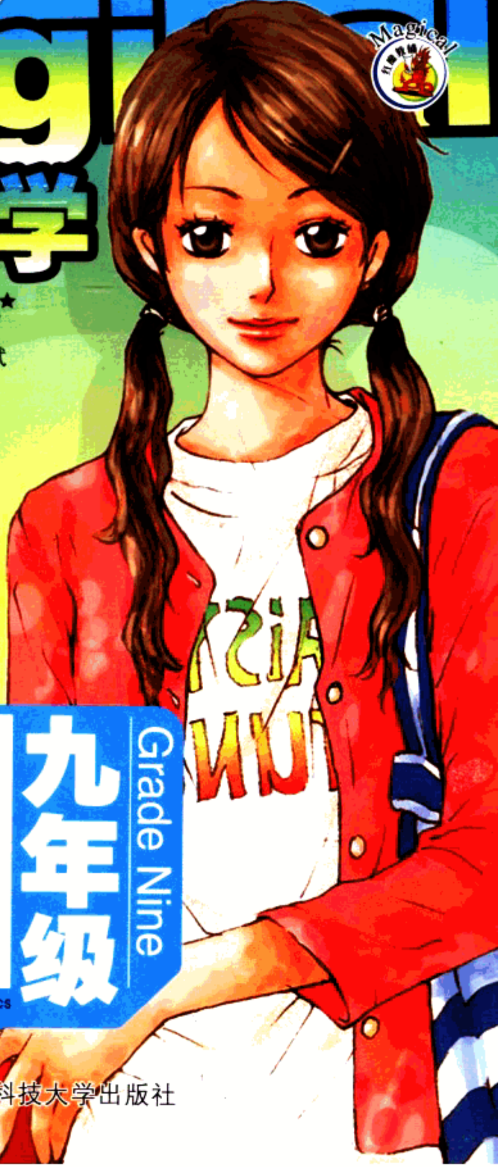
Magical

红魔数学

★ Magical Mathematics ★

编著　夏建东 黄平原

从简单到富有挑战性的方法尝试
探索理解数学的奥秘



数学全解通

九年级

Grade Nine

Comprehensive Solutions to Mathematics

国防科技大学出版社

封面设计：周纯

编者的话

本书是根据国家教育部最新颁布的《全日制初级中学数学课程标准》和《全日制初级中学数学教学大纲》而编写的，其内容以人教版九年级数学教材为主，并参考和适当增加了其他版本的九年级数学教材的内容，是九年级学生学习数学的理想辅导用书，同时也可供初中学生在复习时使用。

编者根据自己多年的研究成果和教育学、心理学的有关原理，为本书设计了如下栏目：

知识要点 简明扼要地列出教学大纲所规定的知识点，指明了学习方向。

典例精析 精选典型试题，深入浅出地对其进行分析，结合实例引导学生掌握知识要点。

跳出陷阱 针对学习中易出错的问题，指出常犯的错误，剖析错误原因，给出正确的解法，及时帮助学生克服思维定势的负面影响，提醒学生不走弯路。

思维拓展 对所学知识进行提高性的总结，对解题方法进行全面归纳，对课本知识进行适当拓展，有利于开拓思维，使学习更上一层楼。

考题透视 精选与所学知识点有关的中考题，给出答案，并对较难的中考题进行了分析。有利于学生了解中考对所学知识点的考查，掌握学习重点，及时调控学习方向，为以后参加中考打下坚实的基础。

习题精练 精选、编撰典型习题，进行少而精的训练，既起到了举一反三的作用，又减轻了学业负担。

本书的栏目设计科学合理："知识要点"指明学习方向；"典例精析"深入浅出地讲解例题学习通俗易懂；"跳出陷阱"教学生少走弯路；"思维拓展"使学生更上一层楼；"考题透视"让学生了解中考考点，有针对性地学习；"习题精练"使学生收到举一反三之效。本书的主要特点是：集知识要点指南、例题讲解、纠错、思维拓展、中考题分析于一体，能全方位地、全面地辅导学生，使学生提高综合能力，迈向新台阶。

为了介绍最新的研究成果和巧妙的解题方法、技巧，本书介绍了一些思维层次较深的知识，供学有余力的学生选学。

本书在编写过程中，参考了有关报刊书籍上的文章，吸取了其中的最新研究成果。在此，对有关作者和出版单位表示深切的感谢。

本书是一本在每一节内将知识要点、例题、纠错、思维拓展、考题有机组合起来的全方位的同步辅导读物，所涉及的知识面广、思维层次深、知识跨度大，因此，编写难度较大。限于作者水平，在某些方面还有待进一步完善，热忱希望老师、同学们批评指正。

目　录

第四章　解直角三角形

第五章　圆

第一章　一元二次方程

1.1　用公式解一元二次方程

知识要点

1. 一元二次方程的概念

只含有一个未知数，且未知数的最高次数是 2 的整式方程，叫做一元二次方程，即一元二次方程必须满足以下三个条件：(1)它是一个整式方程；(2)它只含有一个未知数；(3)方程中未知数的最高次数是 2.

2. 会把一个一元二次方程化为一般形式 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$. 它具有两个特征：(1)等式左边是一个二次三项式，等式右边是零；(2)二次项的系数 $a\neq0$，形如 $ax^2=0,(a\neq0)$ 或 $ax^2+c=0(a\neq0)$ 或 $ax^2+bx=0(a\neq0)$ 的方程也是一元二次方程.

3. 形如 $(x-a)^2=b\,(b\geqslant0)$ 的方程，可用直接开平方法，求得方程的根为 $x=a\pm\sqrt{b}\ (b\geqslant0)$.

4. 一般的一元二次方程，可用配方法求解．其步骤是：

(1)化二次项系数为 1，并把常数项移项到方程的另一侧，即把方程化为 $x^2+px=-q$ 的形式；

(2)方程两边都加上 $\left(\frac{p}{2}\right)^2$，把方程化为 $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2-4q}{4}$；

(3)当 $p^2-4q\geqslant0$ 时，利用开平方法求解.

5. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的求根公式是：

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$　$(b^2-4ac\geqslant0)$.

典例精析

例 1　已知方程 $m^2x^2+(2m+1)x+1=0$ 有实数根，求 m 的取值范围.

分析：字母系数的取值范围问题，首先应引起警觉，想到分类讨论. 这里并没有指明是二次方程，故要考虑是一次方程的可能.

解：(1)当 $m^2=0$，即 $m=0$ 时，方程为一元一次方程 $x+1=0$，有实数根 $x=-1$；

(2)当 $m^2\neq0$,即 $m\neq0$ 时,方程为二次方程,由有实根的条件得

$\Delta=(2m+1)^2-4m^2=4m+1\geqslant0$,

解得 $m\geqslant-\dfrac{1}{4}$,

$\therefore m\geqslant-\dfrac{1}{4}$ 且 $m\neq0$.

综合(1)、(2),得 $m\geqslant-\dfrac{1}{4}$.

例2 已知方程 $(k^2-1)x^2+(k+1)x-5=0$,

(1)当 k 为何值时,是一元二次方程?

(2)当 k 为何值时,是一元一次方程?

分析:(1)是一元二次方程,必有二次项系数不为零,故令 $k^2-1\neq0$;

(2)是一元一次方程,必有二次项系数为零,且一次项系数不为零,

即 $\begin{cases}k^2-1=0,\\k+1\neq0.\end{cases}$

解:(1) $k^2-1\neq0$ 得 $k\neq\pm1$,

$\therefore$ 当 $k\neq\pm1$ 时,原方程是一元二次方程.

(2) $\because\begin{cases}k^2-1=0,\\k+1\neq0.\end{cases}$

解得 $k=1$.

$\therefore$ 当 $k=1$ 时,原方程是一元一次方程.

例3 解下列关于 x 的方程 $x^2-(2m+1)x+m^2+m=0$.

分析:此方程中只有 x 是未知数,其他字母均为字母系数,已知方程是一般形式,可直接运用公式法求解.

解:$\because\Delta=[-(2m+1)]^2-4\times1\times(m^2+m)=1$,

$\therefore x=\dfrac{-[-(2m+1)]\pm\sqrt{1}}{2}$,

$\therefore x_1=m+1,x_2=m$.

跳出陷阱

例1 写出方程 $8x^2=4\sqrt{3}x+1$ 的二次项系数、一次项系数和常数项.

错解:二次项系数是8,一次项系数是 $4\sqrt{3}$,常数项是1.

剖析:确定一元二次方程的各项系数和常数项时,必须先把方程化成一般形式,这是因为方程的二次项系数、一次项系数和常数项都是在方程为一般形式的前提下定义的,而本题导致错解的原因是没有把方程化成一般的形式.

正解：把原方程化成一般的形式为 $8x^2-4\sqrt{3}x-1=0$，所以该方程的二次项系数是 8，一次项系数是 $-4\sqrt{3}$，常数项是 -1.

例2　试证明：代数式 $2x^2-4x+3$ 的值恒大于 0.

错解：$2x^2-4x+3=x^2-2x+\frac{3}{2}=(x-1)^2+\frac{1}{2}$，

$\because (x-1)^2\geqslant 0$，　$\therefore (x-1)^2+\frac{1}{2}>0$，

$\therefore$ 代数式 $2x^2-4x+3$ 的值恒大于 0.

剖析：上述证明过程好像无懈可击，实际上是将代数式的变形与解一元二次方程相混淆．解方程是一种同解变形，可以将二次项系数化为 1，而代数式的变形是恒等变形，不能将二次项系数化为 1，本题错误的根源就是将二次项系数化为 1，而使代数式的值缩小了一倍，故导致错解.

正解：$2x^2-4x+3=2(x^2-2x)+3=2(x^2-2x+1)+3-2=2(x-1)^2+1$，

$\because (x-1)^2\geqslant 0$，　$\therefore 2(x-1)^2+1>0$，

$\therefore 2x^2-4x+3$ 的值恒大于 0.

思维拓展

例1　解方程 $x^2-(1+2\sqrt{3})x+3+\sqrt{3}=0$.

解题策略：本题可用求根公式求根．若能观察系数的特征，便可尝试使用因式分解法，此法的关键是要能恰当地分解常数项；也可重新整理方程，便于用因式分解法.

解法一：$\because \Delta=(1+2\sqrt{3})^2-4\times1\times(3+\sqrt{3})=13+4\sqrt{3}-12-4\sqrt{3}=1$，

$\therefore x_{1,2}=\dfrac{1+2\sqrt{3}\pm1}{2}$，

$\therefore x_1=1+\sqrt{3}$，$x_2=\sqrt{3}$.

解法二：原方程整理得

$x^2-2\sqrt{3}x+3-x+\sqrt{3}=0$，

$(x-\sqrt{3})^2-(x-\sqrt{3})=0$，

$(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{3}-1)=0$，

$\therefore x_1=\sqrt{3}$，$x_2=\sqrt{3}+1$.

解法三：由 $3+\sqrt{3}=\sqrt{3}(1+\sqrt{3})$，将原方程左边因式分解可得

$(x-\sqrt{3})[x-(1+\sqrt{3})]=0$，

$\therefore x_1=\sqrt{3}$，$x_2=1+\sqrt{3}$.

此法比较快捷，但需要有较强的洞察力，如果不易看出，还是用公式法解或像解法二那样用因式分解法.

例2 先阅读下列第(1)题的解答过程：

(1)已知 α,β 是方程 $x^2+2x-7=0$ 的两个实数根，求 $\alpha^2+3\beta^2+4\beta$ 的值.

解法一：$\because$ α,β 是方程 $x^2+2x-7=0$ 的两个实数根，

$\therefore$ $\alpha^2+2\alpha-7=0,\beta^2+2\beta-7=0$，且 $\alpha+\beta=-2$，

即 $\alpha^2=7-2\alpha,\beta^2=7-2\beta$，

$$\begin{aligned}\therefore\ \alpha^2+3\beta^2+4\beta&=7-2\alpha+3(7-2\beta)+4\beta\\&=28-2(\alpha+\beta)\\&=28-2\times(-2)=32.\end{aligned}$$

解法二：由求根公式得 $\alpha=-1+2\sqrt{2},\beta=-1-2\sqrt{2}$，

$$\begin{aligned}\text{从而 }\alpha^2+3\beta^2+4\beta&=(-1+2\sqrt{2})^2+3(-1-2\sqrt{2})^2+4(-1-2\sqrt{2})^2\\&=9-4\sqrt{2}+3(9+4\sqrt{2})-4-8\sqrt{2}\\&=32,\end{aligned}$$

当 $\alpha=-1-2\sqrt{2},\beta=-1+2\sqrt{2}$ 时，同理可得 $\alpha^2+3\beta^2+4\beta=32$.

解法三：由已知得 $\alpha+\beta=-2,\alpha\beta=-7$，

$\therefore$ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=18$，

令 $\alpha^2+3\beta^2+4\beta=A,\beta^2+3\alpha^2+4\alpha=B$，

$\therefore$ $A+B=4(\alpha^2+\beta^2)+4(\alpha+\beta)=4\times18+4\times(-2)=64$， ①

$A-B=2(\beta^2-\alpha^2)+4(\beta-\alpha)=2(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)+4(\beta-\alpha)=0$， ②

①+②，得 $2A=64$，可得 $A=32$.

(2)请仿照上面的解法中的一种或自己另外寻求一种方法解答下面的问题：

已知 x_1,x_2 是方程 $x^2-x-9=0$ 的两个实数根，求代数式 $x_1^3+7x_2^2+3x_2-66$ 的值.

考题透视

1.（浙江省杭州市中考真题）已知 2 是关于 x 的方程 $\frac{3}{2}x^2-2a=0$ 的一个解，则 $2a-1$ 的值是(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

解：$\because$ 2 是方程 $\frac{3}{2}x^2-2a=0$ 的一个解，$\therefore$ 将 2 代入，可得 $\frac{3}{2}\times4-2a=0$，则 $a=3$，那么 $2a-1$ 的值是 5，故选 C.

2.（北京海淀区中考真题）用配方法将二次三项式 a^2-4a+5 变形，结果是(　　)

A. $(a-2)^2+1$　　B. $(a+2)^2+1$　　C. $(a+2)^2-1$　　D. $(a-2)^2-1$

解：配方法一般用于解一元二次方程，但有时也可以运用它将二次三项式变形，该题就是此种问题，具体过程为 $a^2-4a+5=a^2-4a+4+1=(a-2)^2+1$，故选 A.

习题精练

一、选择题

1. 用配方法解关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 时，此方程可变形为(　　)

A. $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2-4q}{4}$　　B. $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{4q-p^2}{4}$

C. $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2-4q}{4}$　　D. $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=\frac{4q-p^2}{4}$

2. 已知方程 $x^2+(3m-2)x+m^2-1=0$ 有一个根是 0，则 m 的值为(　　)

A. 1　　B. -1　　C. 1 或 -1　　D. 0

3. 下列命题中，错误的是(　　)

A. 关于 x 的方程 $x^2=k$，必有两个互为相反数的实根

B. 关于 x 的方程 $(x-c)^2=k^2$ 必有两个实根

C. 关于 x 的方程 $ax^2+bx=0$ 必有一根是零

D. 关于 x 的方程 $x^2=1-a^2$ 可能没有实根

二、填空题

4. 把方程 $x^2-2x-3m=0$ 化成 $(x+h)^2=k$ 的形式时，应是__________，当 m__________时，方程才有实数根.

5. 如果一元二次方程各项系数的和为零，那么方程必有一根是__________，如果一元二次方程的一次项系数等于二次项系数与常数项之和，则方程必有一根是__________.

6. 已知实数 a、b、c 满足等式 $\sqrt{a-1}+|b+2|+(c+a-b)^2=0$，那么，方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根是__________.

7. 如果 $x=2$ 是关于 x 的方程 $2x^2+3ax-2a=0$ 的根，那么关于 y 的方程 $y^2-3=a$ 的解是__________.

三、解答题

8. 要使 $4a^{n^2-4n+6}$ 与 $\frac{3}{5}a^n$ 是同类项，则 n 的值为多少?

9. 如果方程 $ax^2-bx-6=0$ 与方程 $ax^2+2bx-15=0$ 有一个公共根是 3，试求 a、b 的值，并分别求出两方程的另一个根.

10. 试证明关于 x 的方程 $(a^2-8a+20)x^2+2ax+1=0$，不论 a 取何值，该方程都是一元二次方程.

1.2 用因式分解法解一元二次方程

知识要点

1. 因式分解法.因式分解法解一元二次方程的理论依据是：如果两个因式的积等于零，那么这两个因式至少有一个等于零.例如$(x+1)(2x-3)=0 \Rightarrow (x+1)=0$或$(2x-3)=0$.这样，一元二次方程可化为两个一元一次方程.这就是降次的思想方法，即把高次方程化为低次方程，使复杂的问题转化为较简单的问题的思维方法.

2. 用因式分解法解一元二次方程的步骤：

(1)化一元二次方程的右边为0的形式；

(2)把方程的左边分解成两个一次因式的积；

(3)令两个因式分别等于零，得到两个一元一次方程；

(4)解这两个一元一次方程，可得到方程的两个根.

典例精析

例1 用因式分解法解下列一元二次方程：

(1)$8x^2=9x$；　　(2)$9x^2+6x=-1$；

(3)$4(x-3)^2-25(x-2)^2=0$；　　(4)$(x-3)(x+7)+9=0$.

分析：用因式分解法解一元二次方程，应先把方程化成一般形式，再用因式分解的方法将方程左边分解成两个一次因式的积的形式.

解：(1)原方程变形为$x(8x-9)=0$，

$x=0$或$8x-9=0$，$\therefore x_1=0, x_2=\frac{9}{8}$.

(2)$9x^2+6x+1=0$，$(3x+1)^2=0$，$\therefore x_1=x_2=-\frac{1}{3}$.

(3)$[2(x-3)]^2-[5(x-2)]^2=0$，

$[(2x-6)+(5x-10)][(2x-6)-(5x-10)]=0$，

即$(7x-16)(-3x+4)=0$，$7x-16=0$或$3x-4=0$，

$\therefore x_1=\frac{16}{7}, x_2=\frac{4}{3}$.

(4)整理原方程，得$x^2+4x-12=0$，

$(x+6)(x-2)=0$，$\therefore x_1=-6, x_2=2$.

例2　k 为何值时，关于 x 的二次三项式 $2x^2-(4k+1)x+2k^2-1$ 在实数范围内可分解因式？

分析：当 $\Delta\geqslant 0$ 时，二次三项式在实数范围内一定可以分解因式；当 $\Delta<0$ 时，二次三项式在实数范围内不能分解.

解：$\because\ \Delta=[-(4k+1)]^2-8(2k^2-1)=8k+9$，

由 $8k+9\geqslant 0$，得 $k\geqslant -\dfrac{9}{8}$，

$\therefore$ 当 $k\geqslant -\dfrac{9}{8}$ 时，$\Delta\geqslant 0$，原二次三项式在实数范围内可分解因式.

跳出陷阱

例1　解方程 $(2x+1)(x-4)=5$.

错解：原方程化为 $(2x+1)(x-4)=1\times 5$，

$\therefore\ 2x+1=1$ 或 $x-4=5$，

$\therefore\ x_1=0,x_2=9$.

剖析：用因式分解法解一元二次方程的依据是 $A\cdot B=0$，则 $A=0$ 或 $B=0$. 也就是说，方程右边化为 0 才能用因式分解法求解，而此方程右边为 5，所以导致上述的错解.

正解：原方程化为 $2x^2-8x+x-4=5$，即 $2x^2-7x-9=0$，

$\therefore\ x_1=-1,x_2=\dfrac{9}{2}$.

例2　解方程 $3x(x-2)=4-2x$.

错解：整理方程，得 $3x(x-2)=-2(x-2)$，两边同除以 $(x-2)$ 得 $x=-\dfrac{2}{3}$.

剖析：产生这种错误的原因是由于对方程的性质认识不清，只有当 $x-2\neq 0$ 时，方程两边才能同除以 $x-2$，否则，就会产生失根. 其实 $x-2=0$，得 $x=2$ 是原方程的另一根.

正解：移项，得 $3x(x-2)+2(x-2)=0$，

即 $(x-2)(3x+2)=0$，

$\therefore\ x_1=2,x_2=-\dfrac{2}{3}$.

思维拓展

例1　已知方程 $2x^2-x-2=0$ 的两根为 x_1、x_2，不解方程，求 $\dfrac{x_1}{x_2}$ 的值.

解题策略：此题为两根不对称式 $\dfrac{x_1}{x_2}$ 的求值问题. 因题而异，解法有一定的技巧性，一是设法转化为对称式求值；二是引入未知数的观点，转化为两根的关系后，求参数.

解法一：由 $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}$

$=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$

$=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-2\times(-1)}{-1}$

$=-\dfrac{9}{4}.$

设$\dfrac{x_1}{x_2}=k$，则 $k+\dfrac{1}{k}=-\dfrac{9}{4}$，

$4k^2+9k+4=0$，

$\therefore\ k_{1,2}=\dfrac{-9\pm\sqrt{17}}{8}$，

即 $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{-9+\sqrt{17}}{8}$ 或 $\dfrac{-9-\sqrt{17}}{8}$.

解法二：设$\dfrac{x_1}{x_2}=k$，则 $x_1=kx_2$. ①

又 $x_1+x_2=\dfrac{1}{2}$， ②

$x_1x_2=-1$， ③

将①代入②、③，得$(1+k)x_2=\dfrac{1}{2}$， ④

$kx_2^2=-1.$ ⑤

将④代入⑤，得 $k\cdot\left[\dfrac{1}{2(1+k)}\right]^2=-1$，

$4k^2+9k+4=0.$

（以下同解法一）.

例2 已知 x_1、x_2 是关于 x 的方程 $x^2+m^2x+n=0$ 的两个实根，y_1、y_2 是关于 y 的方程 $y^2+5my+7=0$ 的两个实根，且 $x_1-y_1=2$，$x_2-y_2=2$，求 m、n 的值.

解法一：由韦达定理得 $x_1+x_2=-m^2$，$x_1x_2=n$.

$y_1+y_2=-5m$，$y_1y_2=7$.

由已知，$x_1-y_1=2$，$x_2-y_2=2$，

将两式相加得 $(x_1+x_2)-(y_1+y_2)=4$，

$-m^2-(-5m)=4$，

$m^2-5m+4=0$，

$\therefore m=1$ 或 $m=4$.

两式相减得 $x_1-x_2=y_1-y_2$，

$\therefore (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2$，

$E=MC^2$

$$(-m^2)^2-4n=(-5m)^2-4\times7,$$

当 $m=1$ 时，$n=1$；

当 $m=4$ 时，$n=-29$.

检验：由题意要求 $\Delta_1=m^4-4n\geqslant0$,

$\Delta_2=25m^2-28\geqslant0$.

$m=1,n=1$ 时，不满足上述条件，舍去；

$m=4,n=-29$ 满足上述条件.

$\therefore m=4,n=-29$.

解法二：由 $x_1=y_1+2,x_2=y_2+2$ 知方程①的两根分别比方程②的两根大 2.

令 $x=y+2$，代入方程①，得

$$(y+2)^2+m^2(y+2)+n=0,$$

$$y^2+(4+m^2)y+4+n+2m^2=0.$$

这个方程与方程 $y^2+5my+7=0$ 的根相同，故有

$$\frac{1}{1}=\frac{5m}{4+m^2}=\frac{7}{4+n+2m^2}.$$

$$即\begin{cases}4+m^2=5m, & ③\\ 7=4+n+2m^2. & ④\end{cases}$$

解③得 $m=1$ 或 4,

代入④得 $n=1$ 或 -29.

（以下同解法一）.

考题透视

1.（辽宁省沈阳市中考真题）方程 $x^2-2x=0$ 的根是（　）

A. $x_1=0,x_2=2$　　B. $x_1=0,x_2=-2$　　C. $x=0$　　D. $x=2$

解：用分解因式法解一元二次方程.

由于原方程变形为 $x(x-2)=0$，所以有 $x=0$ 或 $x-2=0$，原方程两根为 $x_1=0,x_2=2$. 故选 A.也可以用求根公式法或代入检验法求解，检验 $x=0,x=2,x=-2$ 是否为原方程的根.

习题精练

一、选择题

1. 方程 $x(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$ 的根是（　）

A. $x_1=0,x_2=-1,x_3=\frac{3}{2}$　　B. $x_1=0,x_2=1,x_3=-\frac{3}{2}$

C. $x_1=0,x_2=-1,x_3=-\frac{3}{2}$　　D. $x_1=0,x_2=1,x_3=\frac{3}{2}$

2. 已知 x^2+3x+5 的值为 9，则代数式 $3x^2+9x-2$ 的值为(　　)

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 10

3. 已知 $(a^2+b^2)^2-(a^2+b^2)-6=0$，则 a^2+b^2 的值为(　　)

A. 3　　B. -2　　C. 3 或-2　　D. -3 或 2

4. 方程 $\frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)(x+2)}=0$ 的解是(　　)

A. 3，-2　　B. 3　　C. 1，-2　　D. -2

二、填空题

5. 如果方程 $x^2+px+q=0$ 与方程 $2(x+1)(x-2)=0$ 是同解方程，那么 $p=$________，$q=$________.

6. 已知 $y_1=3(x-5)^2$，$y_2=2(5-x)$，能使 $y_1=y_2$ 的 x 的值是________.

7. 已知实数 x 满足 $(x^2+2x-3)^0=x^2-3x+3$，则 $x=$________.

8. 已知方程 $x^2-1\ 998\times2\ 000x-1\ 999^2=0$ 的较小的根为 r，方程 $x^2-1\ 999x+1\ 998=0$ 的较大的根为 s，则 $r-s$ 的值为________.

9. 已知方程 $x^2+(1-\sqrt{2})x-\sqrt{2}=0$ 的两根为 α,β，则 $\alpha^2-\beta^2=$________.

三、解答题

10. 要设计一个周长为 36 厘米，面积为 80 平方厘米的长方形广告牌，它的宽是多少?

11. 若实数 x 满足条件 $(x^2+4x-5)^2+|x^2-x-30|=0$，求 $\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{(x-1)^2}$ 的值.

12. 下列各题的解法是否正确，不正确的请加以改正.

(1) $(x-1)x=2(x-1)$ 两边除以 $(x-1)$，得 $x=2$；

(2) $(x-2)(x+3)=1$，即 $x-2=1$，$x+3=1$，得 $x_1=3$，$x_2=-2$.

1.3　一元二次方程的根的判别式

知识要点

1. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根的判别式：$\Delta=b^2-4ac$.

2. $\Delta>0$　$\Leftrightarrow$　方程有两个不相等的实数根；

   $\Delta=0$　$\Leftrightarrow$　方程有两个相等的实数根；

   $\Delta<0$　$\Leftrightarrow$　方程没有实数根.

3. 一元二次方程根的判别式的应用：(1)不解方程，判定根的情况；(2)根据方程根的情况确定方程中字母系数的取值范围；(3)应用判别式说明方程根的情况.

典例精析

例1　m 取何实数时，方程 $mx^2+(m-2)x+1=0$ 的两根倒数的和比两根相反数的和大 2.

分析：字母系数的确定，可根据给出的条件(显条件)得方程求出，但更应挖掘隐含的条件，对求出的答案进行取舍.

解：设方程的两根为 x_1、x_2，

$$得\begin{cases} m\neq 0, & ① \\ \Delta=(m-2)^2-4m\geqslant 0, & ② \\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}-[-(x_1+x_2)]=2. & ③ \end{cases}$$

由③得 $(x_1+x_2)\left(\dfrac{1}{x_1x_2}+1\right)=2.$

$\because x_1+x_2=-\dfrac{m-2}{m}$，$x_1x_2=\dfrac{1}{m}$，

$\therefore \dfrac{2-m}{m}(m+1)=2$，

$m^2+m-2=0$，

$m=1$ 或 $m=-2$.

当 $m=1$ 时，$\Delta<0$，②不成立；当 $m=-2$ 时，$\Delta>0$，②成立，于是 $m=-2$.

例2　若 $12<m<60$(m 为整数)，且方程 $x^2-2(m+1)x+m^2=0$ 的两根都是整数，求方程的根.

分析：方程有整数根，则 Δ 必为完全平方数，由此入手，可确定 m 的值，进而得到方程的根.