根据最新学业考试说明编写

# 教与学

2007 最新版

## 中考复习训练丛书

# 数学

学生用书

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

# 中考复习训练丛书

主　编　海曦
副主编　卢万华
编　委　朱田力　吕小玲　白云生　李　剑
方赛娟　龚大昉　刘丽君　周婷婷
叶茂恒　潘巧亮　卢万华

# 数学

·（学生用书）·

浙江大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

中考复习训练丛书.数学/《中考复习训练丛书》编写组编.—5版.—杭州：浙江大学出版社,2002.1
ISBN 7-308-02962-X

Ⅰ.中...　Ⅱ.中...　Ⅲ.数学课—初中·升学参考资料　Ⅳ.G634.

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 097666 号

**责任编辑**　杨晓鸣　吴　慧
**出版发行**　浙江大学出版社
(杭州浙大路 38 号　邮政编码 310027)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com)
**排　　版**　杭州大漠照排印刷有限公司
**印　　刷**　浙江大学印刷厂
**开　　本**　787mm×1092mm　1/16
**印　　张**　16.75
**字　　数**　470 千字
**版 印 次**　2004 年 10 月第 5 版　2006 年 10 月第 18 次印刷
**书　　号**　ISBN 7-308-02962-X/G・469
**定　　价**　20.00 元

# 目　　录

CONTENTS

## 第一章　数与式



## 第二章　方程(组)与不等式(组)



## 第三章　函数及其图象



## 第四章　统计与概率



## 第五章　基本图形(一)

# 第一章　数与式

## 第一节　实　数

### 知识要点

1. 实数的定义与分类

(1) 定义：有理数和无理数统称为实数.

(2) 分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\text{正整数}\\ \text{零}\end{array}\right\}\text{自然数}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\end{cases}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

根据需要我们可以对实数进行不同的分类，

如可分为：$\text{实数}\begin{cases}\text{正实数}\\ \text{零}\\ \text{负实数}\end{cases}$

2. 与实数有关的概念

(1) 数轴：规定了原点、单位长度和正方向的直线叫做数轴. 数轴上所有的点与全体实数一一对应.

(2) 相反数：实数 $a$ 与 $-a$ 叫做互为相反数，零的相反数仍为零. 若 $a$、$b$ 互为相反数，则 $a+b=0$.

(3) 倒数：若两个实数的乘积为 1，就称这两个实数互为倒数，零没有倒数.

(4) 绝对值：在数轴上，一个数离开原点的距离叫做这个数的绝对值.

绝对值的基本性质：$|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0)\\ -a(a<0)\end{cases}$.

(5) 科学记数法：把一个实数表示成 $\pm a\times 10^n(1\leqslant a<10, n\text{ 是整数})$ 的形式.

(6) 平方根、立方根：如果 $x^2=a$，那么 $x$ 叫做 $a$ 的平方根；正数的正平方根和 0 的平方根统称算术平方根，一个数 $a(a\geqslant 0)$ 的算术平方根记作"$\sqrt{a}$"；如果 $x^3=a$，那么 $x$ 叫做 $a$ 的立方根，记作"$\sqrt[3]{a}$".

3. 实数的大小比较

(1) 分类比较：两个正数，绝对值大的数较大；

负数＜零＜正数；

两个负数，绝对值大的数反而小.

(2) 利用数轴比较：在数轴上表示的两个数，右边的数总比左边的数大.

4. 实数的几种非负形式

(1) $|a|\geqslant 0$($a$ 为实数)；

(2) $a^{2n}\geqslant 0$($a$ 为实数，$n$ 为正整数)；

(3) $\sqrt{a}\geqslant 0$($a$ 为非负实数).

5. 实数的运算法则与运算顺序

(1) 运算法则

乘方运算：$a^n=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{个}}$

零指数：$a^0=1(a\neq 0)$

负指数：$a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}(a\neq 0)$

(2) 运算顺序

如果算式没有括号，先算乘方、开方，再算乘、除，最后算加、减；

如果算式中有括号，先算小括号内的算式，再算中括号内的算式，最后算大括号内的算式；

在同一级运算中，如果没有括号，应从左到右依次进行运算.

**注意**　运用运算律可适当改变上面的运算顺序进行简便运算.

### 例题剖析

**例1**　有一个水库某天 9：00 的水位为 $-0.2$m(以警戒线为基准，记高于警戒线的水位为正)，在以后的 6 个时刻测得的水位升降情况如下(记上升为正，单位：m)0.4，$-0.7$，0，

$-0.1$，$-0.5$，$0.2$.经过这6次水位升降后，水库的水位超过警戒线了吗？

**【分析】** 水库的水位是否超过警戒线就看经过6次升降后的水位，用算式表示就是：$-0.2+0.4-0.7+0-0.1-0.5+0.2=-0.9(\text{m})$.

∴经过这6次水位升降后，水库的水位没有超过警戒线.

**【评注】** 本题通过实际问题的探究，进行有理数加法运算的练习.

**例2** 若“!”是一种数学运算符号，定义为：$1!=1$，$2!=2\times1=2$，$3!=3\times2\times1=6$，$4!=4\times3\times2\times1=24$，…，则$\dfrac{100!}{98!}$的值为　(　　)

A. 5049　B. 99!　C. 9900　D. 2!

**【分析】** 根据定义写出算式，再进行计算.

**解** $\dfrac{100!}{98!}=\dfrac{100\times99\times98\times97\times\cdots\times3\times2\times1}{98\times97\times\cdots\times3\times2\times1}$

$=100\times99=9900$

故选C

**例3** (1) 下列各式正确的是　(　　)

A. $0.1^{-2}=100$

B. $\sqrt{81}$的平方根是$\pm9$

C. $(-1)^0=-1$

D. $|1-\sqrt{5}|=1-\sqrt{5}$

(2) 用科学记数法表示$-0.00127=$______.

(3) 用四舍五入法，对600606取近似值，并保留四个有效数字.

**解** (1) A　(2) $-1.27\times10^{-3}$

(3) $600606\approx6.006\times10^5$

**【评注】** 实数的概念必须准确理解，才不会产生概念间的混淆，如第(2)题要防止两处“$-$”号的漏写；如第(3)题保留的有效数字个数比整数部分的位数少时($4<6$)，先把600606用科学记数法表示为$6.00606\times10^5$，然后再四舍五入保留四个有效数字为$6.006\times10^5$.

**例4** 如图1-1，表示数$a$和$b$的点的位置已经给定，请提出三个以上与该图有关的数学问题，并给出解答.

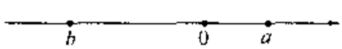


图1-1

**【分析】** 通过观察我们发现$a>0$、$b<0$，$|a|<|b|$，我们可以提出以下问题：

(1) 判断$a\times b$的正负；

(2) 判断$a+b$的正负；

(3) 判断$a-b$的正负；

(4) 判断$b-a$的正负.

**解** 根据实数加、减法及乘法法则可知：(1) $a\times b<0$；(2) $a+b=-(|b|-|a|)<0$；(3) $a-b=a+(-b)>0$；(4) $b-a=b+(-a)<0$.

**【评注】** (1) 要注意发现数学信息，这是我们解决数学问题的基础；(2) 提出的问题是通过我们所发现的信息和我们学过的知识能解决的.

**例2** 用计算器探索：

① $\sqrt{121(1+2+1)}=?$

② $\sqrt{12321(1+2+3+2+1)}=?$

③ $\sqrt{1234321(1+2+3+4+3+2+1)}=?$

……

由此猜想

$\sqrt{1234567654321(1+2+\cdots+7+6+\cdots+2+1)}$
$=$______.

**【分析】** 新教材要求学生会用计算器计算一类数字运算题.对于本题，考生要观察题中所给数据的特殊性，即$121(1+2+1)=11^2\times2^2=(11\times2)^2=22^2=484$，

$12321(1+2+3+2+1)=111^2\times3^2=(111\times3)^2=333^2=110889$，

$1234321(1+2+3+4+3+2+1)=1111^2\times4^2=(1111\times4)^2=4444^2=19749136$，

……

由此猜想

$1234567654321(1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1)=1111111^2\times7^2=7777777^2$

**解** $\sqrt{1234567654321(1+2+\cdots+7+6+\cdots+2+1)}=7777777$

## 基础训练

1. 北京与伦敦两地的时差是$-8$(带正号的数表示同一时间比北京早的时间数)，如果现在北京时间是7:00，那么伦敦的时间是______.
2. 比较大小：1 ______ $-5$.
3. $\sqrt{81}$的平方根是______.
4. 数轴上离开原点3个单位的数有______个，它们表示的数分别是______.

5. 有一个密码系统，其原理由下面的框图所示：

$\boxed{输入\ x}\rightarrow\boxed{x+6}\rightarrow\boxed{输出}$，当输出为 10 时，则输入的 $x=$______.

6. “天上星星有几颗，7 后跟上 22 个 0.”这是国际天文学联合大会上宣布的消息，用科学记数法表示宇宙空间星星颗数为 （　　）

A. $700\times10^{20}$　　B. $7\times10^{23}$

C. $0.7\times10^{23}$　　D. $7\times10^{22}$

7. 绝对值不小于 4 又小于 6 的整数共有______个.

8. 下列运算中，错误的是 （　　）

A. $\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}$

B. $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $2\sqrt{5}+3\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

D. $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}=\sqrt{3}-\sqrt{5}$

9. 已知 $m$、$n$ 为实数，且 $\sqrt{m-3}+(n+1)^2=0$，则 $m^2-n^{2006}+3$ 的值为 （　　）

A. 11　　B. 13

C. 1　　D. $-1$

10. 在 $-\pi$、$-2$，$\sqrt{9}$，$\cos45°$，3.14，$(\sqrt{3})^0$ 中，有理数有 （　　）

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

11. 计算：

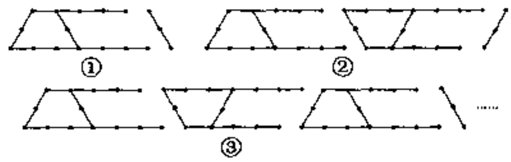
(1) $(-432)+(+6.58)+(-2.31)+(-1.49)+(+2.22)$

(2) $-12\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}-3\right)$

(3) $1\div[(-2)^2\times0.5^2-(-2.24)\div(-2)^3]-\frac{7}{18}$

(4) $(-2)^3-2^0+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-\sqrt[3]{-8}-\sqrt{9}$

12. 用火柴棒按下图中的方式搭图形：



(1) 按图示规律填空：

| 图形符号 | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ |
|---|---|---|---|---|---|
| 火柴棒根数 | _ | _ | _ | _ | _ |

(2) 按照这种方式搭下去，搭第 $n$ 个图形需______根火柴棒.

## 提高训练

13. 有 $A_1$、$A_2$、$A_3$ 三个舞蹈演员在舞台上跳舞，面对观众作队形排列变化，其变化规律是：

一个舞蹈演员 $A_1$ 跳舞，面对观众作队形排列变化的种数是 $A_1$ 为 1 种.

二个舞蹈演员 $A_1$、$A_2$ 跳舞，面对观众作队形排列变化的种数是 $A_1A_2$，$A_2A_1$ 为 2 种，即 $1\times2$ 种.

三个舞蹈演员 $A_1$、$A_2$、$A_3$ 跳舞，面对观众作队形排列变化的种数是 $A_1A_2A_3$，$A_1A_3A_2$，$A_2A_1A_3$，$A_2A_3A_1$，$A_3A_1A_2$，$A_3A_2A_1$ 为 6 种，即 $1\times2\times3$ 种.

请你推测：

(1) 四个舞蹈演员 $A_1$、$A_2$、$A_3$、$A_4$ 跳舞，面对观众作队形排列变化的种数是______种.

(2) 六个舞蹈演员跳舞，按照上述方法作队形排列变化的种数为(用科学记数法表示)______种.

(3) 用 1,2,3,4,5,6,7 共 7 个数字排列成 7 位数的电话号码(在同一个电话号码内每个数字只能用一次)可排成______个电话号码.

# 第二节　整　式

## 知识要点

1. 单项式

(1) 由数与字母或字母与字母相乘组成的代数式叫做单项式，单独一个数或一个字母也叫单项式.

(2) 单项式的系数：单项式中的数字因数叫做单项式的系数.

(3) 单项式的次数：一个单项式中，所有字母的指数的和叫做这个单项式的次数.

2. 多项式

(1) 由几个单项式相加组成的代数式叫做多项式，其中每个单项式叫做多项式的项.

(2) 多项式的次数：多项式里，次数最高的项的次数就叫做这个多项式的次数，其中不含字母的项叫做常数项.

3. 整式：单项式、多项式统称为整式.

4. 同类项：多项式中所含字母相同并且相同字母的指数也分别相同的项，叫做同类项.

5. 多项式的排列

降幂排列：按某一个字母指数从大到小的顺序来排列多项式，叫做按这个字母的降幂排列.

升幂排列：按某一个字母指数从小到大的顺序来排列多项式，叫做按这个字母的升幂排列.

6. 幂的运算法则

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$($m$、$n$ 均为整数，$a\neq 0$)

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$($m$、$n$ 均为整数，$a\neq 0$)

(3) $(ab)^m = a^m \cdot b^m$($m$ 为整数，$a\neq 0, b\neq 0$)

(4) $a^m \div a^n = a^{m-n}$($m$、$n$ 均为整数，$a\neq 0$)

7. 乘法公式

(1) 平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(2) 完全平方公式：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

## 例题剖析

**例 2**　下列计算正确的是　(　　)

A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

B. $(-a^2)^3 = a^6$

C. $(ab)^2 = ab^2$

D. $(-a)^6 \div (-a)^3 = -a^3$

**解**　选 D

**【评注】**　整式运算中，各运算法则一定要扎实掌握.

**例 2**　填空题.

(1) 若 $7x^my^4 - 13x^2y^n = -6x^2y^4$，则 $m=$______，$n=$______.

(2) 多项式 $-5xy^2+4x^2y+2y^3-x^3$ 是____次____项式，按 $x$ 的降幂排列是______.

(3) $x^3+x^3=$______；$x^8\div x^2=$______；$(-x^5)^4=$______；$6xy-(x^2-2xy)=$______；$3a^2b \cdot 4ab^4=$______；

(4) 有一个多项式为 $a^8-a^7b+a^6b^2-a^5b^3+\cdots$，按照此规律写下去，这个多项式的第八项是______.

**解**　(1) $m=2$，$n=4$

(2) 三，四，$-x^3+4x^2y-5xy^2+2y^3$

(3) $2x^3$，$x^6$，$x^{20}$，$8xy-x^2$，$12a^3b^5$

(4) $-ab^7$

**【评注】**　1. 同类项满足两个条件：字母相同，并且相同字母的指数也分别相同.

2. 按某一字母升幂或降幂排列时要连带前面的符号.

**例 2**　已知 $a+b=7$，$ab=12$，求 $a^2+b^2$ 和 $(a-b)^2$ 的值.

**【分析】**　设法将所给式子进行适当变形，使变形后的式子含 $a+b$ 与 $ab$ 项，求值将很方便.

**解**　$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=7^2-2\times 12=25$

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=7^2-4\times 12=1$

**【评注】**　这种方法比通过由方程组求出 $a$，$b$ 的值，再代入所给式子求代数式的值简便得多. 常见的代数式变形有：

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=(a+b)^2-2ab$

$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

$a^2+b^2=\frac{1}{2}[(a+b)^2+(a-b)^2]$

$ab=\frac{1}{4}[(a+b)^2-(a-b)^2]$

**例 4**　计算：

(1) $5(a+b)-2(a+b)-7(a+b)+6$

(2) $(-2xy^2)^3\div(-xy)^2-4xy(2x^3-2y^3)$

(3) $(9x+2)(x-2)+(-3x+5)(3x-5)$

**解**　(1) 原式 $=(5-2-7)(a+b)+6$

$=-4(a+b)+6$

$=-4a-4b+6$

(2) 原式 $=-8x^3y^6\div x^2y^2-8x^4y+8xy^4$

$=-8xy^4-8x^4y+8xy^4$

$=-8x^4y$

(3) 原式 $=9x^2-18x+2x-4-(3x-5)^2$

$=9x^2-16x-4-9x^2+30x-25$

$=14x-29$

**例 5**　求代数式 $2(2a-b)^2-[3(2a-b)-8(b-2a)^2]-3(b-2a)$ 的值，其中 $a=-\frac{3}{4}$，$b=-\frac{1}{2}$.

**解**　原式 $=2(2a-b)^2-[3(2a-b)-8(2a-b)^2]+3(2a-b)$

$=2(2a-b)^2-3(2a-b)+8(2a-b)^2+3(2a-b)$

$=10(2a-b)^2$

当 $a=-\frac{3}{4}$，$b=-\frac{1}{2}$ 时，$2a-b=-1$

∴ 原式 $=10\times(-1)^2=10$

**【评注】**　1. 求代数式的值时，先化简再代入数值计算比较简便.

2. 题中只包含 $2a-b$，$b-2a$ 与常数的加、减、乘的混合运算，而 $b-2a=-(2a-b)$，因此，化简代数式时，可把 $2a-b$ 看作一个整体，以简化运算过程.

**例 6**　观察下列算式的规律，把式子(4)补全，你能否用一个数学式子将你发现的规律表示出来？

(1) $3^2+4^2+12^2=13^2$；

(2) $4^2+5^2+20^2=21^2$；

(3) $5^2+6^2+30^2=31^2$；

(4) $7^2+(\quad)^2+(\quad)^2=(\quad)^2$.

**【分析】**　观察式子(1)、(2)、(3)中四个数的底数的相互关系，从左到右，第二个数比第一个数大 1，第三个数是第一个数与第二个数的积，第四个数比第三个数大 1.

**解**　$7^2+(8)^2+(56)^2=(57)^2$.

这种规律用数学式子可表示为：$n^2+(n+1)^2+[n(n+1)]^2=[n(n+1)+1]^2$

**【评注】**　本题的关键在于观察、归纳，通过归纳，可以作出一个合理的猜想. 在解决数学问题时，有时我们也常先作出一个猜想，再设法加以证明或反驳.

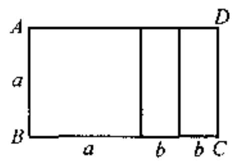
## 基础训练

1. $-\frac{2}{7}x^2y$ 的系数是______，次数是______.

2. 用代数表示 $a$ 与 $b$ 两数的平方和除以 $a$ 与 $b$ 差的平方的商式，应为______.

3. 代数式 $2x^2+3x-7$ 的值为 12，则 $4x^2+6x+10=$______.

4. 如图，由一个边长为 $a$ 的小正方形与两个长、宽分别为 $a$、$b$ 的小矩形拼接成矩形 $ABCD$，则整个图形可表达出一些有关的等式，请你写出图中任意三个等式：




(1) ______；

(2) ______

(3) ______

______.

5. 如果 $3x^4y^m$ 与 $-5x^ny^4$ 是同类项，则 $m=$______，$n=$______.

6. 化简：$(a^2-ab+2b^2)-2(b^2-a^2)=$______.

7. 每件 $a$ 元的上衣，先降价 10%后又打九折(即按标价的 90%)销售，买 $m$ 件需要______元.

8. 若 $(x-2)(x+3)=x^2+bx+c$，则 $b=$______，$c=$______.

9. 代数式 $2x-y$，$m$，$x^2-2xy+3y^2$，$\frac{1}{a}$，$-\frac{ab^2}{3}$，$\frac{x+y}{2}$，$-xy^2$，其中单项式有______，多项式有______.

10. 设 $a$ 是实数，则 $|a|-a$ 的值　　(　　)

A. 可以是负数

B. 不可能是负数

C. 必是正数

D. 可以是正数也可以是负数

11. 若$(x+3)^0-\frac{2}{3x-6}$有意义，那么 $x$ 的取值范围是　(　　)

A. $x>3$　　B. $x<2$

C. $x\neq3$ 或 $x\neq2$　　D. $x\neq-3$ 且 $x\neq2$

12. 下列运算正确的是　(　　)

A. $a^2+a^3=a^5$

B. $(-2x)^3=-2x^3$

C. $(a-b)(-a+b)=-a^2-2ab-b^2$

D. $\sqrt{2}+\sqrt{8}=3\sqrt{2}$

13. 一个三位数的百位数字是 $a$，十位数字是 2，个位数字是 $b$，这个三位数可表示为　(　　)

A. $100a+20b$　　B. $100a+b+20$

C. $100a+2b$　　D. $100a+b+2$

14. 若 $a\neq b$，$n$ 为正整数，$a$ 和 $b$ 互为相反数，则下列五个结论中，① $a^n+b^n=0$；② $(ab)^n=a^nb^n$；③ $a^{2n+1}+b^{2n+1}=0$；④ $|a^n|=|b^n|$；⑤ $a^{2n}+b^{2n}=0$，正确的是　(　　)

A. ①④　　B. ②⑤

C. ②③④　　D. ②③④⑤

15. 计算：

(1) $x^3\div x\times\frac{1}{x}$

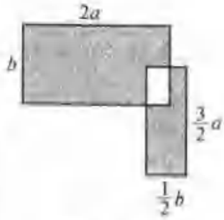
(2) $(a^2)^3\div a^3+(-2a^2)\cdot a$

(3) $(3x+2)^2-(x-1)(x+2)$

(4) $5a^2b-[3ab^2-(4ab^2-2a^2b)]$

(5) $(2+x)(x-2)-(x+1)^2+(5x+1)(2x-1)$

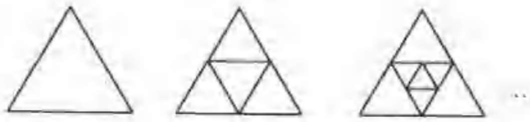
16. 如图，两个长方形的一部分重叠在一起(重叠部分也是一个长为 1，宽为 1.5 的长方形)，则阴影部分的面积为(并化简结果)________.




(第 16 题图)

17. 先化简再求值：$4(x+2)(x-2)-(2x+3)^2$，其中 $x=-0.75$.

18. 图 1 是一个三角形，分别连结这个三角形各边的中点得到图 2；再分别连结图 2 中间的小三角形的各边中点，得到图 3，按此方法继续下去，请你根据每个图中三角形个数的规律，完成下列问题：




(1) 将下表填写完整：

| 图形编号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | … |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 三角形个数 | 1 | 5 | 9 | __ | __ | … |

(2) 在第 $n$ 个图形中有________个三角形(用含 $n$ 的式子表示).

## 提高训练

19. 当 $x=1$ 时，代数式 $px^3+qx+1$ 的值为 2004，则当 $x=-1$ 时，代数式 $px^3+qx+1$ 的值为　(　　)

A. $-2002$　　B. $-2003$

C. $-2004$　　D. $2002$

20. 若 $a^2+b^2=2ab$，则 $a^{2n}+b^{2n}$($n$ 为正整数)等于　(　　)

A. $2a^{2n}$　　B. $2^na^{2n}$

C. $2^na^n$　　D. $2a^2$

21. 已知 $n(n\geqslant2)$个点 $P_1$，$P_2$，$P_3$，…，$P_n$ 在同一平面内，且其中没有任何三点在同一直线上. 设 $S_n$ 表示过这 $n$ 个点中的任意 2 个点所作的所有直线的条数，显然，$S_2=1$，$S_3=3$，$S_4=6$，$S_5=10$，…，由此推断，$S_n=$________.

22. 已知 $a-b=b-c=\frac{3}{5}$，$a^2+b^2+c^2=1$，则 $ab+bc+ca$ 的值等于________.

# 第三节 因式分解

## 知识要点

1. 基本概念

因式分解：把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做因式分解，也叫做分解因式. 因式分解与整式乘法是互逆运算.

2. 基本方法

(1) 提取公因式法：$ma+mb+mc=m(a+b+c)$

(2) 公式法：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$$

3. 因式分解的一般步骤："一提，二套"."一提"是指是否有公因式；"二套"是指能否套用公式.

**注意** 如果题目无特别注明，因式分解应在有理数范围内进行.

## 例题剖析

**例1** 把下列多项式分解因式：

(1) $2a^3b-32ab$

(2) $4ab-4a^2-b^2$

(3) $(a-b)^2-10(a-b)+25$

**解** (1) 原式 $=2ab(a^2-16)=2ab(a+4)(a-4)$

(2) 原式 $=-(4a^2-4ab+b^2)=-(2a-b)^2$

(3) 原式 $=(a-b-5)^2$

**【评注】** 1. 因式分解按一般步骤："一提、二套"，先观察能否提取公因式，然后考虑能否套用公式，且注意一定要分解到不能再分解为止.

2. 第(3)题中将 $a-b$ 看成一个整体.

**例2** 如图 1-2，在一块边长为 $a$ 厘米的正方形纸板四角，各剪去一个边长为 $b$ $\left(b<\frac{a}{2}\right)$ 厘米的正方形，利用因式分解计算当 $a=13.2$，$b=1.7$ 时，剩余部分的面积.

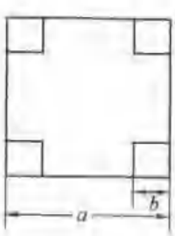



图 1-2

**解** 剩余部分面积为 $a^2-4b^2$.

当 $a=13.2$，$b=1.7$ 时，

$a^2-4b^2=13.2^2-3.4^2=(13.2+3.4)(13.2-3.4)=16.6\times 9.8=162.68$

**例3** 如图 1-3：现有正方形纸片 3 张，长方形纸片 3 张，请你将它们拼成一个长方形，并运用面积之间的关系，将多项式 $a^2+3ab+2b^2$ 因式分解.

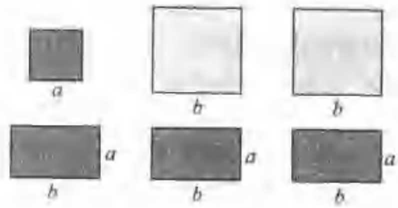
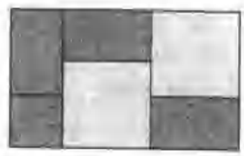



图 1-3

**解** 用这 6 张纸片可以拼成如右图所示的一个矩形，通过用不同的方法计算矩形的面积，就可以将多项式 $a^2+3ab+2b^2$ 因式分解.



$$a^2+3ab+2b^2=(a+b)(a+2b)$$

**【评注】** 数形结合思想在整式变形中也有着广泛的应用.

## 基础训练

1. 下列各式中从左到右的变形，是因式分解的是 ( )

A. $(a+3)(a-3)=a^2-9$

B. $x^2+x-5=(x-2)(x+3)+1$

C. $a^2b+ab^2=ab(a+b)$

D. $x^2+1=x\left(x+\frac{1}{x}\right)$

2. 分解因式 $2x^2-8=$__________.

3. 把多项式 $m^2(a-2)+m(2-a)$ 分解因式等于 ( )

A. $(a-2)(m^2+m)$　　B. $(a-2)(m^2-m)$

C. $m(a-2)(m-1)$　　D. $m(a-2)(m+1)$

4. 下列多项式能分解因式的是　　(　　)

A. $x^2-y$　　B. $x^2+1$

C. $x^2+y+y^2$　　D. $x^2-4x+4$

5. 下列多项式中,不能用完全平方公式分解因式的是　　(　　)

A. $m+1+\frac{m^2}{4}$　　B. $-x^2+2xy-y^2$

C. $x^2-x+1$　　D. $\frac{n^2}{9}-\frac{2}{3}n+1$

6. 多项式 $4x^2+1$ 加上一个单项式后,使它能成为一个整式的完全平方,则加上的单项式不可以是　　(　　)

A. $4x$　　B. $-4x$

C. $4x^4$　　D. $-4x^4$

7. 下列分解因式错误的是　　(　　)

A. $15a^2+5a=5a(3a+1)$

B. $-x^2-y^2=-(x^2-y^2)=-(x+y)(x-y)$

C. $k(x+y)+x+y=(k+1)(x+y)$

D. $a^3-2a^2+a=a(a-1)^2$

8. 下列多项式中,不能用平方差公式分解的是　　(　　)

A. $-a^2+b^2$　　B. $-x^2-y^2$

C. $49x^2y^2-z^2$　　D. $16m^4-25n^2p^2$

9. 下列多项式:① $16x^5-x$;　② $(x-1)^2-4(x-1)+4$;　③ $(x+1)^2-4x(x+1)+4x^2$;　④ $-4x^2-1+4x$,分解因式后,结果含有相同因式的是　　(　　)

A. ①②　　B. ①④

C. ③④　　D. ②③

10. 两个连续的奇数的平方差总可以被 $k$ 整除,则 $k$ 的最大值等于　　(　　)

A. 4　　B. 8

C. 4 或 $-4$　　D. 8 的倍数

11. 在实数范围内分解因式:$ab^2-2a=$____________.

12. 已知 $x+y=6$,$xy=4$,则 $x^2y+xy^2$ 的值为______.

13. 将 $x^n-y^n$ 分解因式的结果为 $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$,则 $n$ 的值为______.

14. 若 $ax^2-24x+b=(mx-3)^2$,则 $a=$______,$b=$______,$m=$______.

15. 分解因式:

(1) $4x^3+16x^2+20x$

(2) $12a^2(x-2a)^2-14a(2a-x)^3$

(3) $5(x-y)^3+10(y-x)^2$

(4) $(x^2-6x)^2+18(x^2-6x)+81$

(5) $-2x^{2n}-4x^n$

16. 用简便方法计算:

(1) $57.6\times1.6+28.8\times36.8-14.4\times80$

(2) $39\times37-13\times3^4$

17. 已知 $(4x-2y-1)^2+\sqrt{xy-2}=0$,求 $4x^2y-2xy^2+x^2y^2$ 的值.

18. 已知 $a=10000$,$b=9999$,求 $a^2+b^2-2ab-6a+6b+9$ 的值.

19. 写一个多项式,再把它分解因式(要求:多项式含有字母 $m$ 和 $n$,系数、次数不限,并能先用提取公因式法再用公式法分解).

## 提高训练

20. 化简算式:$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)$

21. 设 $a$ 是正奇数,则 $a^2-1$ 是________的倍数　　(　　)

A. 5　　B. 3　　C. 8　　D. 16

22. 观察下列各式:

$1^2+(1\times2)^2+2^2=9=3^2$

$2^2+(2\times3)^2+3^2=49=7^2$

$3^2+(3\times4)^2+4^2=169=13^2$

……

你发现了什么规律? 请用含有 $n$($n$ 为正整数)的等式表示出来,并说明其中的道理.

23. 在日常生活中如取款、上网等都需要密码. 有一种用"因式分解"法产生的密码,方便记忆.

原理是：如对于多项式 $x^4-y^4$，因式分解的结果是 $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$，若取 $x=9$，$y=9$ 时，则各个因式的值是：$(x-y)=0$，$(x+y)=18$，$(x^2+y^2)=162$，于是就可以把"018162"作为一个六位数的密码. 对于多项式 $4x^3-xy^2$，取 $x=10$，$y=10$ 时，用上述方法产生的密码是：________（写出一个即可）.

# 第四节 分 式

## 知识要点

1. 分式的基本概念与基本性质

(1) 基本概念：形如 $\frac{A}{B}$（$A$，$B$ 是整式，且 $B$ 中含有字母，$B\neq 0$）的式子叫分式；

(2) 基本性质：分式的分子与分母都乘以（或除以）同一个不等于零的整式，分式的值不变，这个性质叫做分式的基本性质. 用式子表示是：$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M}$，$\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}$ $(M\neq 0)$.

2. 分式的运算法则

(1) 分式的符号法则：分子、分母与分式本身的符号，改变其中任何两个，分式的值不变.

用公式表示是：$\frac{a}{b}=-\frac{a}{-b}=\frac{-a}{-b}=-\frac{-a}{b}$，$-\frac{a}{b}=\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}$；

(2) 分式的加减法：

同分母加减法：$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$，

异分母加减法：$\frac{b}{a}\pm\frac{d}{c}=\frac{bc\pm ad}{ac}$；

(3) 分式的乘除法：

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$，$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$；

(4) 分式的乘方：$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$（$n$ 为正整数）.

## 例题剖析

**例 1** 当 $x$ 为何值时，分式 $\frac{x^2-1}{x^2-x-2}$：(1) 有意义；(2) 值为零；(3) 无意义.

**解** 原式 $=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+1)}$，由 $(x-2)(x+1)=0$，得 $x=2$ 或 $x=-1$.

所以(1) 当 $x\neq 2$ 且 $x\neq -1$ 时分式有意义；

(2) 由 $(x+1)(x-1)=0$，得 $x=\pm 1$，而当 $x=-1$ 时分母为零，所以 $x=1$ 时，分式的值为零；

(3) 当 $x=2$ 或 $x=-1$ 时，分式无意义.

【评注】 由于除式不能为零，所以分式是否有意义，就看分母是否为零. 即：分式 $\frac{A}{B}$，当 $B\neq 0$ 时，分式有意义；当 $B=0$ 时，分式无意义；当 $A=0$，$B\neq 0$ 时，分式值为 0. 解答此类问题时，不能先约分.

**例 2** 计算：

(1) $\frac{x-4}{x+2}\cdot\frac{4-x^2}{16-x^2}$

(2) $\frac{1}{a-b}+\frac{2a}{a^2+b^2}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}+\frac{1}{a+b}$

(3) $a+b-\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{a-b}+1$

**解** (1) 原式 $=\frac{x-4}{x+2}\cdot\frac{(2-x)(2+x)}{(4-x)(4+x)}$

$=\frac{x-2}{x+4}$

(2) 原式 $=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}+\frac{2a}{a^2+b^2}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}$

$=\frac{2a}{a^2-b^2}+\frac{2a}{a^2+b^2}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}$

$=\frac{4a^3}{a^4-b^4}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}$

$=\frac{8a^7}{a^8-b^8}$

(3) 原式 $=a+b+1-\left(\frac{a^2}{a-b}-\frac{b^2}{a-b}\right)$

$=a+b+1-\frac{a^2-b^2}{a-b}$

$=a+b+1-\frac{(a-b)(a+b)}{a-b}$

$=a+b+1-(a+b)$

$=1$

【评注】 通过观察分母代数式的特征，找出规律，采取分组通分、分步求和的方法. 如题(2)中采取分步求和的方法，题(3)中将整式、同分母分式分组，可以使运算简便.

例3 已知$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{9}$，$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{15}$，则$\frac{xyz}{xy+yz+zx}=$______.

解 ∵ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{9}$，

$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{15}$

∴ 三式相加得$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{31}{180}$

即 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{31}{180}$

∴ $\frac{xyz}{xy+yz+zx}=\frac{180}{31}=5\frac{25}{31}$

【评注】 在分式求值中，有时出现条件或所求分式不易化简变形，可考虑把分式的分子分母颠倒，这样变形就容易了，此即倒数法求值.

例4 先化简代数式$\left(\frac{a+1}{a-1}+\frac{1}{a^2-2a+1}\right)\div\frac{a}{a-1}$，然后选取一个使原式有意义的$a$的值代入求值.

**解法一** 原式$=\left[\frac{(a+1)(a-1)}{(a-1)^2}+\frac{1}{(a-1)^2}\right]\div\frac{a}{a-1}=\frac{a^2}{(a-1)^2}\cdot\frac{a-1}{a}=\frac{a}{a-1}$

**解法二** 原式$=\frac{(a+1)(a-1)}{(a-1)^2}\cdot\frac{a-1}{a}+\frac{1}{(a-1)^2}\cdot\frac{a-1}{a}=\frac{a+1}{a}+\frac{1}{a(a-1)}=\frac{a}{a-1}$

【评注】 (1) 求代数式的值时，一般不采用直接代入法来求，而是通过先化简约分之后，把数据代入化简后的简单式子，保证结果的准确性；

(2) 本例开放性求值，学生容易走入误区：选取$a=1$或$a=0$代入求值，实际上当$a=1$或$a=0$时，原分式是无意义的，所以选取任意一个不等于0和1的数都可以. 所以此类题选取的字母的值还需要考虑该字母的值必须使得原分式有意义.

## 基础训练

1. 在代数式：$3x$，$\frac{x-1}{2}$，$\frac{3n}{m}$，$\frac{7}{a}$，$-\frac{1}{m}+1$，$\frac{y+8}{y-2}$中，属于分式的有 (　　)

A. 2个　B. 3个　C. 4个　D. 5个

2. 分式$\frac{1}{\sqrt{x}-2}$有意义，则$x$的值应满足 (　　)

A. $x\geqslant0$　B. $x\neq4$

C. $x\geqslant4$　D. $x\geqslant0$且$x\neq4$

3. 如果把分式$\frac{3a}{a-b}$中的$a$和$b$同时扩大3倍，那么分式的值 (　　)

A. 扩大3倍　B. 缩小3倍

C. 扩大9倍　D. 不变

4. 下列计算正确的是 (　　)

A. $\frac{-x-y}{x+y}=-1$　B. $\frac{x+y}{x+y}=-1$

C. $\frac{-x+y}{x-y}=-1$　D. $\frac{-x+y}{y-x}=-1$

5. 一件工作甲独做需$x$时完成，乙独做需$y$时完成，则甲、乙两人合做完成该工作需要的时间是 (　　)

A. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$　B. $\frac{1}{xy}$

C. $\frac{1}{x+y}$　D. $\frac{xy}{x+y}$

6. 当$x=$\_\_\_\_\_\_时，$\frac{x^2-1}{x+1}$的值为零；当$x=$\_\_\_\_\_\_时，分式$\frac{x}{x^2+4}$有意义.

7. 约分：$\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}=$______；$\frac{x^2-3x}{x^2-2x-3}=$______.

8. 计算：$-\frac{b}{5a}\times\left(-\frac{10a^3}{b^2c}\right)\div\left(-\frac{a^2}{2bc}\right)=$______.

9. 若$x^2-3xy-4y^2=0(y\neq0)$，则$\frac{x-2y}{x-y}=$______.

10. 已知$x:y:z=2:3:4$，则$\frac{xyz}{x^2-y^2+z^2}=$______.

11. 若$x-\frac{1}{x}=3$，则$x^2+\frac{1}{x^2}=$______.

12. 计算：$\left(x-y+\frac{4xy}{x-y}\right)\left(x+y-\frac{4xy}{x+y}\right)$.

13. 先化简后求值：$\frac{3-x}{x-2}\div\left(x+2-\frac{5}{x-2}\right)$，其中 $x=2$.

14. 计算：

(1) $\frac{x-6y}{x^2-4y^2}+\frac{2y}{x^2-2xy}$

(2) $\left(\frac{4}{a^2+2a}-\frac{a}{a+2}\right)\times\frac{a^2+4a+4}{a^2-4}$

(3) $\frac{x^3+10x^2+25x}{x^2-6x+9}\div\frac{x^2+5x}{3x^2-27}$

15. 阅读下列材料：

$\because \frac{1}{1\times3}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)$

$\frac{1}{3\times5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$,

$\frac{1}{5\times7}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right),\cdots$,

$\frac{1}{17\times19}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)$,

$\therefore \frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{17\times19}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{19}\right)$

$=\frac{9}{19}$

解答下列问题：

(1) 在和式 $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots$ 中第 5 项为________，第 $n$ 项为________；

(2) 由 $\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+\cdots$ 得第 $n$ 项为________；

(3) 用 $\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$ 编一道计算题.

## 提高训练

16. 已知 $\frac{y+z}{x}=\frac{z+x}{y}=\frac{x+y}{z}=k$，则 $k$ 等于（　　）

A. 1　　B. $-1$　　C. 2　　D. 2 或 $-1$

17. 若 $\frac{4}{x+1}$ 表示一个整数 $m$，则整数 $m$ 可取的值的个数是（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

18. 若甲 2 天加工零件 $a$ 个，则用同样的速度加工 9 个零件需________天.

19. 已知 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$，$x+y=6$，则 $xy=$______.

# 第五节　二次根式

## 知识要点

1. 二次根式的概念

式子 $\sqrt{a}(a\geqslant0)$ 叫做二次根式. 注意：$\sqrt{a}\geqslant0$ 且 $a\geqslant0$.

2. 二次根式的性质

(1) $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$；

(2) $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a>0)\\0(a=0)\\-a(a<0)\end{cases}$；

(3) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant0,b\geqslant0)$；

(4) $\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\ (b\geqslant0,a>0)$

3. 二次根式的运算

(1) 二次根式加减法的实质是合并同类根式；

(2) 二次根式的乘除法：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant 0, b\geqslant 0)$，$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{b}{a}}\ (a>0, b\geqslant 0)$.

## 例题剖析

**例 1** 选择题

(1) 已知 $x, y$ 为实数，且 $\sqrt{x-1}+3(y-2)^2=0$，则 $x-y$ 的值为　(　　)

A. 3　　B. $-3$　　C. 1　　D. $-1$

(2) 下列等式成立的是　(　　)

A. $a^0=1$

B. $\sqrt{(3-\pi)^2}=3-\pi$

C. $\sqrt{x^2+y^2}=x+y$

D. $\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}=2-\sqrt{2}$

**解**　(1) D　(2) D

**【评注】** 二次根式的化简要正确运用根式的重要性质.

**例 2** 填空题

(1) $\sqrt{26^2-10^2}=$________；

(2) 在实数范围内分解因式：$a^4-9=$________；

(3) 化简：$(2-\sqrt{5})^{2006}(2+\sqrt{5})^{2005}=$________；

(4) 函数 $y=\frac{\sqrt{1-2x}}{1+x}$ 的自变量 $x$ 的取值范围是________.

**解**　(1) 24（容易出现 $\sqrt{26^2-10^2}=26-10$ 的错误）

(2) $(a^2+3)(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})$

(3) 1

(4) $x\leqslant\frac{1}{2}$ 且 $x\neq -1$

**例 3** 计算：

(1) 已知 $\frac{|36-m^2|+8(m-3n)^2}{\sqrt{m-4}}=0$，求 $\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{m^2+n^2}$ 的值.

(2) 设 $2+\sqrt{3}$ 的整数部分是 $a$，小数部分是 $b$，求 $a+b+2$ 的值.

(3) 已知 $x=\sqrt{2}+1$，求 $x^4-2x^3+x^2-x+1$ 的值.

**解**　(1) 由题意得 $|36-m^2|+8(m-3n)^2=0$

而 $|36-m^2|\geqslant 0, 8(m-3n)^2\geqslant 0$

$\therefore m=\pm 6, m=3n$

而分母 $\sqrt{m-4}$ 中，$m-4>0$，即 $m>4$

$\therefore m=6$，$\therefore 3n=6, n=2$

当 $m=6, n=2$ 时，原式 $=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6^2+2^2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{40}$.

**【评注】** 当条件中出现一个方程两个未知数时，通常考虑整体代换或利用数的非负性来求值.

(2) $\because 1<\sqrt{3}<2$，$\therefore 1+2<\sqrt{3}+2<2+2$

即 $3<2+\sqrt{3}<4$.

$\therefore a=3, b=(2+\sqrt{3})-3=\sqrt{3}-1$

$\therefore a+b+2=3+\sqrt{3}-1+2=4+\sqrt{3}$

**【评注】** 实数＝整数部分＋小数部分，一个无理数只要明确了它的整数部分，其小数部分＝实数－整数部分.

(3) **【解法一】** $x=\sqrt{2}+1\Rightarrow x-1=\sqrt{2}\Rightarrow(x-1)^2=2$，即 $x^2-2x-1=0$

利用添项拆项法可得：$x^4-2x^3+x^2-x+1=(x^2-2x-1)(x^2+2)+3x+3$

把 $x=\sqrt{2}+1$ 及 $x^2-2x-1=0$ 代入得

原式 $=3(\sqrt{2}+1)+3=3\sqrt{2}+6$

**【解法二】** 由 $x^2-2x=1$ 得

原式 $=x^2(x^2-2x)+x^2-x+1$

$=2x^2-4x+3x+1$

$=3x+3$

$=3\sqrt{2}+6$

**【解法三】** 由 $x^2=2x+1$ 得

原式 $=(2x+1)^2-2x(2x+1)+(2x+1)-x+1$

$=3x+3$

$=3\sqrt{2}+6$

**【评注】** 若用 $x$ 的值代入直接计算，麻烦且易出错，解法一的技巧在于由 $x=\sqrt{2}+1$ 推得多项式 $x^2-2x-1=0$，在原式 $x^4-2x^3+x^2-x+1$