2006年普通高等学校专升本招生考试大纲配套用书

专科起点升本科

应试专用教材

高等数学

组编／普通高等学校招生考试专升本应试专用教材编委会
主编／白水周　方建印　李万军

ZHUANSHENGBEN
YINGSHI ZHUANYONG JIAOCAI

中央民族大学出版社

应试专用教材

高等数学

普通高等学校招生考试专升本应试专用教材

普通高等学校专升本招生考试大纲配套用书

高等数学

组　编　普通高等学校招生考试专升本应试专用教材编委会

主　编　白水周　方建印　李万军

副主编　辛自力　拜云胜　和慧民

中央民族大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/白水周　方建印　李万军主编.　—北京:中央民族大学出版社,2005.10
普通高等学校招生考试应试专用教材.专科起点升本科
ISBN 7-81108-041-9

Ⅰ.高…　Ⅱ.①白…②方…③李…　Ⅲ.高等数学—成人教育:高等教育—教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 111658 号

高等数学

出 版 者:中央民族大学出版社
北京市海淀区中关村南大街 27 号　　邮编:100081
电话:(发行部)68472815　68933837　　传真:68472751
电话:(总编室)68932218　　传真:68932447

印 刷 者:宏达印务有限公司

发 行 者:全国各地新华书店

开　　本:787×1092(mm)　1/16

字　　数:3373 千字　　印张:146

版　　次:2005 年 10 月第 1 版　2005 年 10 月第 1 次印刷

书　　号:ISBN 7-81108-041-9/G・367

定　　价:220.00 元(全七册)

出版说明

知识成就一个民族的未来，知识成就一个考生的未来！

普通高校专升本为众多拥有高等教育基础文凭并有志再提高自己知识、学历的莘莘学子，提供了一个充分证明自我、提升自我的良好平台。

考试多得一分，人生道路不同。一套好的教材便可以使考生多得一分，多一种人生之路的选择。

本套丛书在2005年成功发行的基础上，由中央民族大学出版社和“天一文化”教育集团严格按照2006年《普通高校优秀在校生专升本招生考试大纲》，并在认真研究分析2005年普通高校专升本招生考试真题的基础上精心组织编写的。这套《2006年普通高等学校招生考试专升本应试专用教材》《2006年普通高等学校专升本招生考试考前冲刺模拟试卷》丛书，共分为《英语》《高等数学》《大学语文》《教育理论》《管理学》《计算机基础》《政治理论》等，该系列丛书充分体现如下特点：

1. **名师主笔，紧扣大纲**：本丛书由多所高等院校长期从事专升本考试辅导、命题及评卷的著名教授、一线教师亲自执笔编写，并且在内容编排方面严格遵从最新“大纲”的知识系统要求，使考生能够在复习时总领知识脉络，重点难点清晰，真正做到事半功倍，有的放矢。

2. **专家解析简明透彻，实战性强**：书中不仅对每一道考题给出了标准答案，而且详细分析了解题的思路、方法、技巧，使考生不仅知其然，且知其所以然，同时本丛书采用最新模式的考试题型，使考生的每一次复习都身临其境，充分锻炼了实际作战能力。

3. **联盟专业教育网络和专业培训机构**：本套丛书携手专升本专业培训机构“诺亚教育”及“大河教育网”，共同为考生提供高质量的面授及网上精讲、串讲。凡购买本套丛书者到“大河教育网”（edu. dahew. com）上“普通高校专升本专区”注册，凭图书防伪码免费获取价值20元的“大河币”，在线视听专升本精讲，相信定会让你轻松过关。

一分耕耘，一分收获，祝每一位考生成功！

本套丛书在编写的过程中受到了几十所高等院校各相关专业老师的鼎力支持，在此一并致谢！

前　　言

大力发展教育事业是实施科教兴国战略和人才强国战略的根本保证，党和政府把发展教育事业，加强人才培养工作作为重要工作来抓，不断进行教育创新，不拘一格地促进人才的培养。

在充分分析和把握教育改革与发展新形势的同时，按照“发展要有新思路，改革要有新突破，开放要有新局面，各项工作要有新举措”的要求，近几年来，各省、直辖市教育主管部门相继推出了选拔优秀专科生进入本科院校学习深造的措施，进一步促进了人才的培养，这一举措受到了人们的普遍欢迎。

为帮助更多的优秀专科生顺利通过考试，我们特组织有丰富教学经验，多年从事“专升本”辅导，熟知“专升本”考试题型及考试范围的教师，编写了这本《高等数学》专升本辅导书。该书在把考试知识点进行系统归纳的基础上，详细总结了考试中涉及的考题类型并系统讲解了每类考试题型的求解方法，精心组织了每讲同步强化练习题，八套全真模拟题和六套历年专升本真卷及一套样卷，将考试的知识点、考点融于其中，既能充分体现考题特点，又能让考生系统、准确地把握数学考试的题型、题量、试题涉及的知识点及难易程度，从而方便考生复习和掌握。

该书可作为各专科院校进行“专升本”考试辅导用书，也可作为考生强化训练，自我复习用书，它将是每一位“专升本”考生的良师益友，相信它的出版，将会进一步促进人才的培养，为社会培养人才做出贡献。

全书具体分工如下：白水周：第一讲、全真模拟（1～3）；方建印：第二讲、第四讲；李万军：第三讲、第五讲；拜云胜：第六讲、全真模拟（4～5）；辛自力：第八讲、全真模拟（6～8）；和慧民：第七讲、第九讲、第十讲。

编　者

目　录

第一讲　一元函数及其极限、连续性

考试知识点归纳

1. 函数的两个决定性要素 —— 定义域与对应关系.

2. 函数的奇偶性 —— 设 $y = f(x)$ 的定义域关于坐标原点对称，则：

① 若 $f(-x) = f(x)$，那么 $f(x)$ 为偶函数；

② 若 $f(-x) = -f(x)$，那么 $f(x)$ 为奇函数.

3. 函数的有界性 —— 设 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，若存在正数 M，使任意的 $x \in (a,b)$，总有：$|f(x)| \leqslant M$，则称 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

4. 无穷小的概念及其比较

如果 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，函数 $f(x)$ 趋于 0，那么称 $f(x)$ 是 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷小.

设 $\alpha(x)$、$\beta(x)$ 皆为 $x \to x_0$ 时的无穷小（$\beta(x) \neq 0$），则：

① 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$，那么，称 $x \to x_0$ 时，$\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小，记作：$\alpha(x) = o(\beta(x))$.

② 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$，那么，称 $x \to x_0$ 时，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小，当 $C = 1$ 时，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的等价无穷小，此时记作：$\alpha(x) \sim \beta(x)$，$(x \to x_0)$.

③ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$，那么，称 $x \to x_0$ 时，$\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小.

5. 两个重要极限

① $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$，其模式：$\lim\limits_{\square \to 0} \dfrac{\sin\square}{\square} = 1$，（“□”中的表达式需一致）

② $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$，其模式：$(1+\text{“无穷小”})^{\text{“无穷大”}} \longrightarrow \mathrm{e}$.

6. 分式的极限

$$① \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \xrightarrow{\text{若 } Q(x_0) \neq 0} \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}; \\ \xrightarrow{\text{若 } Q(x_0) = 0} \begin{cases} \xrightarrow{\text{若 } P(x_0) = 0} \text{因式分解或有理化后求极限;} \\ \xrightarrow{\text{若 } P(x_0) \neq 0} \infty. \end{cases} \end{cases}$$

② $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0},n=m\text{ 时};\\0,n<m\text{ 时};\\\infty,n>m\text{ 时}.\end{cases}$

(其中,$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$)

7. 函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续的条件

下列三条必须同时满足:

$\begin{cases}\text{①}f(x)\text{ 在 }x=x_0\text{ 处有定义};\\\text{②}\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\text{ 极限存在};\\\text{③}\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).\end{cases}$

8. 函数 $y=f(x)$ 的间断点分类

设 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处间断,则:

① 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 皆存在,那么称 $x=x_0$ 点为 $y=f(x)$ 的第一类间断点.

特别地:若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$,称点 $x=x_0$ 为 $y=f(x)$ 的可去间断点;若二者不等,称点 $x=x_0$ 为 $y=f(x)$ 的跳跃间断点.

② 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 至少有一个不存在,称 $x=x_0$ 点为 $y=f(x)$ 的第二类间断点.

9. 闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 的性质

① 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,那么 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必存在最大值与最小值.

② 零点定理:如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,那么在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使得 $f(\xi)=0$.

典型考题类型及解题指导

Ⅰ.确定函数的定义域

函数定义域的确定,是"专升本"考试中几乎每年必考的题型.

(一) 解题指导

函数的定义域通常是使函数关系式有意义的自变量的取值范围. 在具体确定函数的定义域时,要注意下列关系式存在的条件:

(1) 分式的分母不能为零;

(2) 负数不能开偶次方;

(3) 负数和零不能取对数;

(4) 反正弦、反余弦函数的自变量的绝对值不能大于 1;

(5) 正切函数的自变量不能等于 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}$;余切函数的自变量不能等于 $k\pi$.

（二）例题及解析

【例 1】 函数 $y=\sqrt{16-x^2}+\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 的定义域为 （ ）

A. $[2,3]$ B. $[-3,4]$ C. $[-3,4)$ D. $(-3,4)$

［答案］ B

【解析】 由已知知，该函数是二次根式 $\sqrt{16-x^2}$ 与反正弦函数 $\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 的和，因此，函数的定义域应是使二者皆有意义的自变量的集合.

为使 $\sqrt{16-x^2}$ 有意义，令 $16-x^2\geqslant 0$，有 $-4\leqslant x\leqslant 4$；

为使 $\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 有意义，令 $\left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1$，有 $|2x-1|\leqslant 7$，进而，$-7\leqslant 2x-1\leqslant 7$，于是，$-3\leqslant x\leqslant 4$；

故综合上述两点，取二者区间的公共部分，得已知函数的定义域为：$[-3,4]$.

【例 2】 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0,4]$，则函数 $\varphi(x)=f(x+1)+f(x-1)$ 的定义域为：________.

［答案］ $[1,3]$

【解析】 该题的题型是，已知复合函数外函数的定义域，求复合函数的定义域. 方法是，让复合函数的内函数满足外函数定义域的要求，进而求出复合函数的定义域.

先令：$0\leqslant x+1\leqslant 4$，得：$-1\leqslant x\leqslant 3$；

再令：$0\leqslant x-1\leqslant 4$，得：$1\leqslant x\leqslant 5$；

于是，已知函数 $\varphi(x)$ 的定义域为：$[1,3]$

Ⅱ. 求函数的关系式

（一）解题指导

这类题型一般是：已知复合函数 $f[g(x)]$ 的表达式，在内函数 $g(x)$ 关系式已知的条件下，求外函数 $f(x)$ 的表达式.

这类题的具体解法有两种：

方法一：变换法. 令 $u=g(x)$，将所作变换代入已知复合函数中，可得到 $f(u)=f[g(x)]$ 关于 u 的表达式，从而可得 $f(x)$ 的关于 x 的函数表达式；

方法二：恒等变形法. 首先将复合函数 $f[g(x)]$ 的表达式通过恒等变形，凑成以 $g(x)$ 为自变量的表达式，最后，将 $g(x)$ 用自变量 x 代换，即得 $f(x)$ 的表达式.

（二）例题及解析

【例 3】 设 $f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{x+1}{x^2}$，$(x\neq 0)$，则 $f(x)=$ ________.

［答案］ x^2-x

【解析】 方法一：变换法.

令 $\frac{x+1}{x}=t$，于是 $x=\frac{1}{t-1}$，$(t\neq 1)$，从而代入已知关系式，有：

$$f(t)=\frac{\frac{1}{t-1}+1}{\left(\frac{1}{t-1}\right)^2}=t(t-1)=t^2-t\text{，所以，}f(x)=x^2-x.$$

方法二：恒等变形法.

因 $f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{x+1}{x^2}=\frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}\cdot\left(\frac{x+1}{x}-1\right)$；

所以，$f(x)=x\cdot(x-1)=x^2-x$.

Ⅲ. 函数的奇偶性、有界性等判定

(一) 解题指导

函数的特性常分四种，一是奇偶性，二是有界性，三是单调性，四是周期性. 其中函数的单调性可通过一阶导数的符号特征来判定，而通常不用定义判断；函数的周期性讨论往往是对三角函数讨论的更多一些，在中学阶段常常会有三角函数周期的计算题；而“专升本”的数学考试，在这方面主要是两类题：一类是奇偶性判别，另一类是有界性判定.

(1) 函数奇偶性的判定方法：

方法一：用定义，$f(-x)=f(x)\Rightarrow$ 偶函数；

$f(-x)=-f(x)\Rightarrow$ 奇函数；

方法二：利用奇偶性的运算性质.

奇 + 奇 = 奇；	偶 + 偶 = 偶；
奇 · 奇 = 偶；	偶 · 偶 = 偶；
奇 + 偶 = 非奇非偶；	奇 · 偶 = 奇.

(2) 函数有界性的判定

函数的有界，是指函数值取值的有界性，而且有界性具有区间的相对性，在这个区间上有界的函数，在另一区间上就可能无界.

函数有界性的判断，要从定义出发，按定义判断.

(二) 例题及解析

【例 4】 函数 $y=x\cdot\ln(x+\sqrt{x^2+1}),(x\in R)$ 是 ( )

A. 偶函数 B. 奇函数 C. 非奇非偶函数 D. 不能断定

[答案] A

【解析】 该题是函数奇偶性判定题. 由已知知，函数的第一因子 x 明显是奇函数，下面主要判定第二因子 $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

令 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，有：

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}$$

$$=\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$

于是知，$f(x)$ 为奇函数，进而，已知函数是两个奇函数的积，故为偶函数.

【例 5】 设 $f(x)=g(x)\cdot\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)$，其中 $g(x)$ 为奇函数，则 $f(x)$ 为　　(　　)

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 无法确定

[答案]　B

【解析】 该题仍是函数奇偶性判断题. 因 $f(x)$ 的第一因子 $g(x)$ 是奇函数，下面主要判断第二因子的奇偶性.

令 $\varphi(x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}$

则，
$$\varphi(-x)=\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}=-\frac{a^x}{a^x-1}+\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{a^x-1+1}{a^x-1}+\frac{1}{2}=-1-\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}$$
$$=-\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)=-\varphi(x)$$

所以，$\varphi(x)$ 是奇函数，故 $f(x)$ 是两个奇函数的积，是偶函数.

【例 6】 函数 $y=1-\arctan x$ 是　　(　　)

A. 单调增加且有界函数　　B. 单调减少且有界函数

C. 奇函数　　D. 偶函数

[答案]　B

【解析】 该题是判断函数的单调性、有界性、奇偶性的题.

单调性可通过一阶导数判定. 因 $y'=-\frac{1}{1+x^2}<0$，故函数是单调减少的.

又因 $\arctan x$ 是有界函数，$-\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2}$，故 $y=1-\arctan x$ 也有界.

而 $\arctan x$ 是奇函数，前面一项“1”是偶函数，故二者的差 y 是非奇非偶的.

综上所述，函数 $y=1-\arctan x$ 是单调减少且有界的函数.

Ⅳ. 求已知函数的反函数

(一) 解题指导

求已知函数的反函数的步骤为：

(1) 从已知函数关系式 $y=f(x)$ 中，求出其反对应关系，即用含 y 的关系式表示 x，形如：$x=\varphi(y)$；

(2) 将所求关系式 $x=\varphi(y)$ 中的 x、y 的位置互换，以 y 为因变量，得 $y=\varphi(x)$.

(3) $y=\varphi(x)$ 即是已知函数的反函数关系式，最后求出其定义域.

(二) 例题及解析

【例 7】 函数 $f(x)=1-\ln(2x+1)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$ ________.

[答案]　$\frac{1}{2}(e^{1-x}-1)$，$x\in R$

【解析】 (1) 由已知 $y=1-\ln(2x+1)$，求 x 得：

$$x=\frac{1}{2}(e^{1-y}-1)$$

(2) 将上式 x、y 互换，得反函数的关系式：

$$y=\frac{1}{2}(e^{1-x}-1)$$

(3) 根据指数函数的性质，其定义域为全体实数 R.

于是，填：$\frac{1}{2}(e^{1-x}-1)$，$x\in R$.

Ⅴ. 无穷小的概念及其比较

(一) 解题指导

无穷小概念在极限理论中占有重要的位置，因此，这一概念是一元微积分学中的重要概念之一，是“专升本”考试几乎每年必考的概念.

无穷小的概念及其比较的方法，在前面有所介绍，这里不再重复. 为较好地进行无穷小的比较或利用等价无穷小的替换求极限，建议大家牢记以下一些等价无穷小.

当 $x\to 0$ 时，$x\sim\sin x$，$x\sim\tan x$，$x\sim\arcsin x$，$x\sim\arctan x$，$x\sim e^x-1$，$x\sim\ln(1+x)$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$，$(\alpha>0)$.

(二) 例题及解析

【例 8】 当 $x\to 0$ 时，无穷小 $1-\cos x^2$ 是 x^4 的 ( )

A. 等价无穷小　　B. 同阶无穷小　　C. 较高阶无穷小　　D. 较低阶无穷小

[答案] B

【解析】 方法一：$\because x\to 0$ 时，$1-\cos x^2\sim\frac{1}{2}(x^2)^2=\frac{1}{2}x^4$，而 $\frac{1}{2}x^4$ 与 x^4 是 $x\to 0$ 时的同阶无穷小.

$\therefore x\to 0$ 时，$1-\cos x^2$ 与 x^4 是同阶无穷小.

方法二：$\because$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^4}$，$\left(\frac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x^2}{2}}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$\therefore x\to 0$ 时，$1-\cos x^2$ 是与 x^4 同阶的无穷小.

方法三：$\because$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^4}$，$\left(\frac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2\cdot 2x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$\therefore x\to 0$ 时，$1-\cos x^2$ 与 x^4 是同阶的无穷小.