自然科學家與工程師的數學

第五卷

變分法

柏恩哈德·鮑萊博士著

科學出版社

Dr. Bernhard Baule
DIE MATHEMATIK DES NATURFORSCHERS
UND INGENIEURS
BAND V
Variationsrechnung
S. Hirzel Verlag Leipzig
1954

內容提要

本書爲"自然科學家與工程師的數學"中的第五卷，內容包括平面中最簡單的變分問題(歐拉微分方程)、空間的變分問題、等周問題、附帶條件的變分問題(測地綫)、幾個特殊的變分問題、邊界條件（橫交條件)、測地圓與測地球、黎曼空間（高斯曲度、黎曼曲度張量、常曲度的空間)、較高級的變分問題、哈密頓原則、典型運動等式、雅谷比原理與哈-雅微分方程等.

本書主要特點是把物理與工程技術上的理論與實際問題密切聯系起來，使讀者在掌握了變分法後遇到物理與工程技術上的問題易於應用與計算.

變分法

柏恩哈德·鮑萊博士著
魏嗣鑾譯

*

科學出版社出版(北京朝陽門大街117號)
北京市書刊出版業營業許可證出字第061號
科學出版社上海印刷廠印刷 新華書店總經售

*

1958年5月第一版 書號：1153 字數：63,000
1958年5月第一次印刷 開本：850×1168 1/32
(滬)0001—2,275 印張：2 5/8

定價：(10) 0.50元

第四版序言

因爲最後一版已經售完，而全書的改作又進行遲緩，我同意了書局的建議，再使這大體上無所變更的第五卷重新出版．

在附錄內，增入了一些補充與說明的例．

鮑　萊

(於格納慈，1954)

目　錄

變 分 法

§1. 問題的提出

變分法的基本問題是極大值與極小值的問題．但與微分學所研究的有些不同．以前我們所予的是一個函數，其自變數爲一個或爲幾個；所求的是自變數的某些值，二重值或三重值，它們使所予的函數，對於其鄰近的值而言，恰恰取得一個極大值或一個極小值．在變分法中，居於函數的位置的是一個具有定限的積分；居於自變數的位置的是被積函數中的函數；積分的值便隨着這些函數變．變分法的問題即是求某些函數，使所予的積分恰恰取得一個極大值或一個極小值．舉例來說，設若光的傳播速度在一種介質中不是處處相等，而是隨地變易，$v = v\ (x,\ y,\ z)$，則光從空間某一定點 $\mathfrak{r}_1$ 到另一定點 $\mathfrak{r}_2$ 所費的時間，將必隨其所經歷的路綫 $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\,(t)$而異．變分法的問題即爲：在那條路綫上，光才能最快地達到目的？而這條路綫，也就是光選取的． 若用數學來敍述這個問題，則爲：在那條路綫 $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\,(t)$上，積分$\int_{\mathfrak{r}_1}^{\mathfrak{r}_2} \frac{ds}{v}$ 爲一個極小值？因爲速度是時間除路程的商，故反過來講，所費的時間即是速度除路程的商．若用坐標來表示，我們的要求爲

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}{v\ (x,\ y,\ z)}\, dt = \mathrm{Min!}$$

所求的函數爲

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

在此，參數 t 不一定是時間．任何一個參數，只要它在 $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(t)$ 的形式內，能解析地表出參加競選而復經過 $\mathfrak{x}_1$ 與 $\mathfrak{x}_2$ 兩點的曲綫，我們都可以使用． 因爲參數的選擇可以任意，而對於問題也不關重要，所以我們可以把界限 0 與 1 代替界限 t_1 與 t_2． 如此，不管競選曲綫的表達式 $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(t)$ 爲何，參數的選擇只受在 $\mathfrak{x}_1$ 點的 t 標誌爲 0，在 $\mathfrak{x}_2$ 點的 t 標誌爲 1 的限制。

假如我們想避免這由參數表達所引起的不定性，我們隨時都可以用 x (或 y 或 z)爲獨立的參數．上面的問題就變爲

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v\,(x,y,z)}\,dx=\text{Min}!$$

所求的函數爲

$$\begin{cases} y=y(x), \\ z=z(x). \end{cases}$$

這兩種表達的方法我們都將使用，有時用這種，有時用那種．假如從問題的本質來看，我們能假定 $y\,(x)$ 與 $z\,(x)$ 爲唯一的函數，這時，我們才能用題式 $y=y(x)$，$z=z(x)$ 來表達曲綫．在其他的情况，尤其是在曲綫自交時，我們應當採取參數表達的方法。

另一個問題也是屬於變分法的． 有一個質點在一個力場內；假如我們想將這個質點由力場內的某一點 $\mathfrak{x}_1$ 轉移到另一點 $\mathfrak{x}_2$，則我們可問：質點所經歷的路綫必須如何選擇，而能使我們所作的功爲最小，這便是一個變分法的問題．在此，我們自然要假定，這個力場沒有勢函數——如有勢函數，則功將與路綫無關——並且確有一個極小值存在．

按照前面的定義，只有積分沿着某一特殊曲綫 $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}_0(t)$ 有一個穩定的極小值，我們才能說有一個極小值．這就是說，假如我們將那條特殊的綫輕微地撓曲，則在第一度的接近中，積分的值將毫無變易；在第二度的接近中積分的值將必增大；其撓曲的細節皆無

庸計(當撓曲時,那條特殊的綫可以延長,也可以縮短,只有在附帶條件"路長應爲 l cm" 時,綫長才必須固定不變). 此外,我們還要假定, 將來出現的函數都具有我們所需要的一切連續的與微分的條件.

這後一問題的數學敍述爲: 對於何種連接 $\mathfrak{x}_1$ 與 $\mathfrak{x}_2$ 的綫 $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$, 積分 $\int_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{x}_2} \mathfrak{k}\, d\mathfrak{x}$ 爲一個極小值?

較詳地寫出來,我們的要求爲

$$\int_{t_1}^{t_2} (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z})\, dt = \text{Min!}$$

或

$$\int_{x_1}^{x_2} (X + Yy' + Zz')\, dx = \text{Min!}$$

在此, 力的分量 $X, Y, Z,$ 是 x, y, z 的已知函數; 如果力場是隨時間爲變易的, 它們將還含有 t; 如果我們引入阻尼與磨擦, 它們還會含有 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

假如我們只允許具有一定長度 l 的綫才能競選, 則我們將有一個在積分形式中的附帶條件,它是

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\mathfrak{x}}^2}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt = l$$

或

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx = l.$$

假如我們只允許在一個已予曲面上的綫才能競選, 則我們將有一個在等式形式中的附帶條件,它是

$$G(\mathfrak{x}) \equiv G(x,y,z) = 0.$$

微分方程 $G(\mathfrak{x},\dot{\mathfrak{x}}) = 0$ 也可以作爲附帶條件. 這時,能參加競選的自然只有這個微分方程的解. 我們知道,在通常的情況下,這些解的數量是無窮多的. 自然,這些數量還須受某些邊界條件的限制. 但無論條件的情況如何,我們必須假定,對於問題的答案,

它們還有一定活動的餘地,否則變分問題將失其意義.

附帶條件同時可以有兩個,甚或有更多個,只有把所求的曲綫限制到毫無活動的餘地時,才不能容許.

爲研究變分問題求得一個普遍的方法,我們暫且假定,問題的形式爲

$$\int_{t_1}^{t_2} F(\mathfrak{x},\dot{\mathfrak{x}})\,dt = \text{Extremum}!$$ [1)]

所求的函數爲

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t).$$

以後我們還將見到,我們該怎樣顧及某些附帶條件,其形式爲

a) $$\int_{t_1}^{t_2} G(\mathfrak{x},\dot{\mathfrak{x}})\,dt = a$$

及

b) $$G(\mathfrak{x}) = 0 \quad \text{或} \quad G(\mathfrak{x},\dot{\mathfrak{x}}) = 0.$$

所有形如 $F(\mathfrak{x},\dot{\mathfrak{x}})$, $G(\mathfrak{x},\dot{\mathfrak{x}})$, $G(\mathfrak{x})$ 的函數都應是連續的,並應有連續的一階的與二階的偏導數.

解決問題的曲綫 $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0(t)$ 名爲極值綫. 但所謂極值綫的綫,並不限於這條特殊的綫. 凡一條綫只要是所提的變分問題的積分,從其上的任一點沿之積分而到其上的另一任意點,所得的值爲一個穩定值者都得稱爲極值綫. 所謂穩定,是對於在其上所作的輕微撓曲而言.

§2. 平面中最簡單的變分問題

我們的要求爲

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx = \text{Extr}!$$

其中 x_1 與 x_2 是固定的. 只有經過 $\mathfrak{x}_1$ 與 $\mathfrak{x}_2$ 兩點的綫才能參加競選(圖 1). 今設 $y = y_0(x)$ 爲所求的極值綫(上面的單調的曲綫),

1) $F(\mathfrak{x},\dot{\mathfrak{x}})$ 是 $F(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ 的簡寫

又設我們加上一條綫 $y=\varepsilon\eta(x)$ 而使其變易，則沿此新綫而作的積分，其值將亦變異．假如沿 $y=y_0(x)$ 所得的積分值爲一個極小值，則沿新綫所得的值將較大．假如沿 $y=y_0(x)$ 所得的積分值爲一個極大值，則沿新綫所得的值將較小． 其中 $\eta(x)$（下面的曲綫）在 $x=x_1$ 與 $x=x_2$ 兩處皆必爲零，否則兩綫相加所構成的合綫將不經過 $\mathfrak{P}_1$ 與 $\mathfrak{P}_2$ 兩點而不能參加競選．

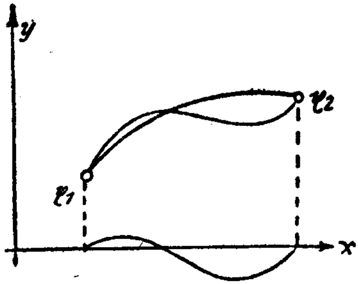

圖 1

$y=y_0(x)+\varepsilon\eta(x)$所表達的是一個幾何綫羣，其中 ε 是一個自由的參數；所求的極值綫即居其中，其參數 $\varepsilon=0$．假如我們將這個綫羣代入被積函數，則積分就變爲一個 ε 的函數

$$J(\varepsilon)=\int_{x_1}^{x_2}F(x,\underbrace{y_0+\varepsilon\eta}_{y},\underbrace{y_0'+\varepsilon\eta'}_{y'})\,dx.$$

這個函數$J(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=0$ 時將取得一個極端值，故其導數在 $\varepsilon=0$ 時將必爲零． 因爲積分的上下限都是固定的，故微分可在積分號下進行．由是得

$$J'(\varepsilon)=\int_{x_1}^{x_2}\{F_y(x,y_0+\varepsilon\eta,y_0'+\varepsilon\eta')\,\eta+F_{y'}(x,y_0+ +\varepsilon\eta,y_0'+\varepsilon\eta')\eta'\}\,dx$$

及

$$J'(0)=\int_{x_1}^{x_2}\{F_y(x,y_0,y_0')\,\eta+F_{y'}(x,y_0,y_0')\eta'\}\,dx\equiv 0,$$

其中 $\eta(x)$ 對任意區間 x_1 到 x_2 內爲一可以連續微分的和在x_1 與 x_2 兩處都等於零的函數．

今設應用部分積分法於上列積分的第二項，我們就得

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right\}\eta(x)\,dx+\left|F_{y'}\,\eta(x)\right|_{x_1}^{x_2}=0.$$

其中末項的值必為零,因為邊界條件為 $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$. 其剩餘的項,若對於所有獲選的函數 $\eta(x)$ 皆為零,則由括弧中的表達式必恆為零. 不然我們可以選擇 $\eta(x)$, 使其在任何處的符號,皆與此處括弧表達式的符號相同. 如是,被積函數的值,除在個別點上可為零外,在其餘在 x_1 與 x_2 之間的各點皆必為正, 積分的值顯然也將為正.

故沿極值綫 $y=y_0(x)$, 下式

$$\underline{F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\equiv 0} \tag{1}$$

必成立,我們往往簡寫為

$$\underline{[F]_y\equiv 0.}$$

因為 F 是一個已知的 x, y 與 y' 的函數,故上式為一個二階的常微分方程. 它名為歐拉微分方程,其左邊名為"變分導數"或"歐拉導數",我們可用符號 $[F]_y$ 來表示. 我們所求的解即可用邊界條件,從歐拉微分方程的 ∞^2 解中選拔而得.

依據前面的約言,我們將命歐拉微分方程的每一個解,不管它是否眞能給出一個極端的積分值,皆為一條極值綫. 我們須已知道,對於每一個解,變分問題的積分值都是穩定的.

例 光在一介質中進行,其速度與介質的高度成正比,問光路的形狀如何?

因光所選取的路是它能最快地達到目的的路, 故其變分問題為

$$\int\frac{ds}{v}=a\int\frac{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{y}\,dt=\text{Minimum!}$$

光綫即是這個問題的極值綫.

在這個問題中, x 與 y 都可以作為參數. 但若我們一看歐拉導數(1),我們就會發見,如以 y 為參數而表達極值綫為 $x=x(y)$, 將更有利; 因為如此, 歐拉導數中的第一項便消失了. 今若令

$t = y$, 則我們的要求遂為

$$a\int \frac{\sqrt{x'^2+1}}{y}\,dy = \text{Min!} \quad x' = \frac{dx}{dy},$$

我們即得

$$[F]_x \equiv F_x - \frac{d}{dy}F_{x'} = -\frac{d}{dy}\frac{x'}{y\sqrt{x'^2+1}} = 0,$$

$$\frac{x'}{y\sqrt{x'^2+1}} = C_1,$$

$$x'^2 = C_1^2 y^2 (x'^2+1),$$

$$dx = \frac{C_1\,y\,dy}{\sqrt{1-C_1^2 y^2}},$$

$$(x+C_2)^2 + y^2 = \frac{1}{C_1^2}.$$

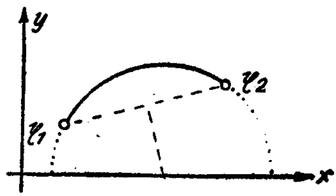

圖 2

故極值綫(即光路)為圓周,其圓心在 x 軸上(圖 2)。

§ 3. 空間的變分問題

我們現在研究空間的變分問題. 與研究平面的變分問題不同,我們在此將使用參數形式. 為節省篇幅起見,還將盡量使用矢量寫法:以 $\mathfrak{x}$ 代表 x, y, z;以 $\dot{\mathfrak{x}}$ 代表 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$。

我們的要求為

$$\int_0^1 F(\mathfrak{x}, \dot{\mathfrak{x}})\,dt = \text{Extr!}$$

邊界條件為

$$\mathfrak{x}(0) = \mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{x}(1) = \mathfrak{x}_2.$$

所求的極值綫,我們命之為 $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0(t)$.

為了變易這條極值綫,在 $t=0$ 與 $t=1$ 的區間中,我們選擇一個任意的可以微分的矢量函數 $\mathfrak{a}(t)$. 在 $t=0$ 與 $t=1$ 時,這個函數等於零. 故 $\mathfrak{a}(t)$ 是一個任意的封閉的曲綫,它的 t 標誌 0 與 t 標誌 1 都在零點. 在這兩個標誌的中間,它還可以幾次經

過零點.

下列的一個參數的綫羣

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0(t) + \varepsilon\mathfrak{a}(t)$$

的曲綫,顯然都能滿足邊界條件,故它們都能參加競選. 屬於參數 $\varepsilon = 0$ 的曲綫即是我們所求的極值綫. 函數

$$J(\varepsilon) = \int_0^1 F(\mathfrak{x}_0(t) + \varepsilon\mathfrak{a}(t),\ \dot{\mathfrak{x}}_0(t) + \varepsilon\dot{\mathfrak{a}}(t))\,dt$$

在 $\varepsilon = 0$ 時,將取得一個極端值,故如上面一樣,

$$\begin{aligned} J'(0) &= \int_0^1 \{F_{\mathfrak{x}} \cdot \mathfrak{a} + F_{\dot{\mathfrak{x}}} \cdot \dot{\mathfrak{a}}\}\,dt \\ &= \int_0^1 \left\{F_{\mathfrak{x}} - \frac{d}{dt}F_{\dot{\mathfrak{x}}}\right\} \cdot \mathfrak{a}(t)\,dt + \left|F_{\dot{\mathfrak{x}}} \cdot \mathfrak{a}\right|_0^1 \\ &= \int_0^1 [F]_{\mathfrak{x}} \cdot \mathfrak{a}(t)\,dt = 0. \end{aligned}$$

因爲除連續的與邊界的條件外, 矢量函數 $\mathfrak{a}(t)$ 的方向與絕對值, 我們都未作任何的限制, 故設矢量 $[F]_{\mathfrak{x}}$ 不恆等於零,我們便常能選擇這個變易的矢量 $\mathfrak{a}(t)$, 使其逐處與矢量 $[F]_{\mathfrak{x}}$ 所夾的角皆爲一個銳角. 如是上列的積分值必爲一個正值. 故沿極值綫下式

$$\underline{[F]_{\mathfrak{x}} \equiv 0} \tag{2}$$

必成立,即是說,對於矢量 $\mathfrak{x}$ 的每個分量, 歐拉微分方程皆必須得到滿足. 較詳地寫出如下:

$$\underline{[F]_{\mathfrak{x}} \equiv F_{\mathfrak{x}} - \frac{d}{dt}F_{\dot{\mathfrak{x}}} \equiv} \begin{cases} F_x - \dfrac{d}{dt}F_{\dot{x}} = 0, \\ F_y - \dfrac{d}{dt}F_{\dot{y}} = 0, \\ F_z - \dfrac{d}{dt}F_{\dot{z}} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

例 有一力場爲

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}(\mathfrak{x}) = \begin{cases} X(x, y, z), \\ Y(x, y, z), \\ Z(x, y, z), \end{cases} \tag{4}$$

我們應求其功的極值綫。

我們的要求爲

$$\int_{\mathfrak{r}_1}^{\mathfrak{r}_2} \mathfrak{k}(\mathfrak{r}) \cdot d\mathfrak{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{k}(\mathfrak{r}) \cdot \dot{\mathfrak{r}}\, dt = \text{Min!}$$

在此，函數 $F(\mathfrak{r}, \dot{\mathfrak{r}}) = F^*(\mathfrak{k}(\mathfrak{r}), \dot{\mathfrak{r}}) \equiv \mathfrak{k}(\mathfrak{r}) \cdot \dot{\mathfrak{r}}$。

假如形式地計算下去，我們將得

$$F_{\mathfrak{r}} = F^*_{\mathfrak{k}} \cdot \mathfrak{k}_{\mathfrak{r}} \equiv \dot{\mathfrak{r}} \cdot \mathfrak{k}_{\mathfrak{r}} \text{ 及 } F_{\dot{\mathfrak{r}}} = \mathfrak{k}(\mathfrak{r}).$$

依據(3)，歐拉微分方程(2)就有如下形式：

$$[F]_{\mathfrak{r}} = \dot{\mathfrak{r}} \cdot \mathfrak{k}_{\mathfrak{r}} - \frac{d}{dt}\mathfrak{k}(\mathfrak{r}) = \underline{\underline{\dot{\mathfrak{r}} \cdot \mathfrak{k}_{\mathfrak{r}} - \mathfrak{k}_{\mathfrak{r}} \cdot \dot{\mathfrak{r}} = 0}}.$$

這個結果或許能引起一種誤解，以爲這個變分問題的歐拉微分方程，對於所有的曲綫 $\mathfrak{r}(t)$ 皆能得到滿足。如果如此，則從一點到另一點所作的功必將與路綫無關，而這只有在特殊的力場中才有可能，故上面的解釋不能成立。由此可見，$\dot{\mathfrak{r}} \cdot \mathfrak{k}_{\mathfrak{r}}$ 與 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{r}} \cdot \dot{\mathfrak{r}}$，它們的形式雖然相似，而其意義必絕不同。爲了解其中的關係，我們今可謹愼地將上面形式的計算再用分量細演一下。若用分量，則上面所用的符號具有下列意義：

$$\mathfrak{k}_{\mathfrak{r}} \cdot \dot{\mathfrak{r}} = \begin{cases} X_{\mathfrak{r}} \cdot \dot{\mathfrak{r}} \\ Y_{\mathfrak{r}} \cdot \dot{\mathfrak{r}} \\ Z_{\mathfrak{r}} \cdot \dot{\mathfrak{r}} \end{cases} = \begin{cases} X_x \dot{x} + X_y \dot{y} + X_z \dot{z} \\ Y_x \dot{x} + Y_y \dot{y} + Y_z \dot{z} \\ Z_x \dot{x} + Z_y \dot{y} + Z_z \dot{z} \end{cases} = \begin{pmatrix} X_x X_y X_z \\ Y_x Y_y Y_z \\ Z_x Z_y Z_z \end{pmatrix} \dot{\mathfrak{r}}. \quad (5)$$

上面用 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{r}}$ 所標記的二次的分量格式名爲張量(或仿射 (Affinor) 或並矢量 (Dyade))。由張量 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{r}}$ 與矢量 $\dot{\mathfrak{r}}$ 所構成的內積 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{r}} \cdot \dot{\mathfrak{r}}$ 就是上面的矢量。與此相對，我們可約定

$$\dot{\mathfrak{r}} \cdot \mathfrak{k}_{\mathfrak{r}} \equiv \bar{\mathfrak{k}}_{\mathfrak{r}} \cdot \dot{\mathfrak{r}},$$

其中 $\bar{\mathfrak{k}}_{\mathfrak{r}}$ 是 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{r}}$ 的共軛張量。如果我們將 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{r}}$ 中的行同列對掉，或將張量 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{r}}$ 在其對角綫上反映，我們即得這個共軛張量：

$$\mathfrak{k}_{\mathfrak{r}} = \begin{pmatrix} X_x X_y X_z \\ Y_x Y_y Y_z \\ Z_x Z_y Z_z \end{pmatrix}, \qquad \bar{\mathfrak{k}}_{\mathfrak{r}} = \begin{pmatrix} X_x Y_x Z_x \\ X_y Y_y Z_y \\ X_z Y_z Z_z \end{pmatrix}. \quad (6)$$

假如我們將一個純量函數 $U(\mathfrak{r})$在矢量 $\mathfrak{r}$ 上微分,我們將得一個矢量函數 $U_{\mathfrak{r}}=\begin{cases}U_x\\U_y\\U_z\end{cases}$. 假如我們將一個矢量函數 $U_{\mathfrak{r}}$ 再在矢量 $\mathfrak{r}$ 上微分,我們將得一個張量函數(第二級的) $U_{\mathfrak{r}\mathfrak{r}}=\begin{pmatrix}U_{xx}U_{xy}U_{xz}\\U_{yx}U_{yy}U_{yz}\\U_{zx}U_{zy}U_{zz}\end{pmatrix}$.
以此類推,我們可從一個第二級的張量,得出一個第三級的張量以及更高級的張量.

在這樣的序列內,並矢量是第二級的張量,矢量是第一級的張量,純量則爲零級的張量.

從一個純量函數 $U(\mathfrak{r})$所得出來的張量必然是對稱的,因爲求導數的先後可以互換. 但如我們逕從一個矢量函數 $\mathfrak{k}(\mathfrak{r})$ 出發,情形便不會如此. 只有這個矢量函數是由一個位置函數(即勢函數)產生的,才是這樣.

現在我們再回到我們的問題. 我們頃已求得,對於極值綫,下式

$$[F]_{\mathfrak{r}}=\dot{\mathfrak{r}}\cdot\mathfrak{k}_{\mathfrak{r}}-\mathfrak{k}_{\mathfrak{r}}\cdot\dot{\mathfrak{r}}\equiv(\bar{\mathfrak{k}}_{\mathfrak{r}}-\mathfrak{k}_{\mathfrak{r}})\cdot\dot{\mathfrak{r}}=0 \qquad (7)$$

必須成立. 它的意義是:假如 $\bar{\mathfrak{k}}_{\mathfrak{r}}\equiv\mathfrak{k}_{\mathfrak{r}}$, 詳細地寫出來爲

$Z_y\equiv Y_z,\ X_z\equiv Z_x,\ Y_x\equiv X_y$ 或爲 $\operatorname{rot}\mathfrak{k}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\X&Y&Z\end{vmatrix}\equiv 0$,也可以說,張量 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{r}}$ 是對稱的,如此也只有如此,對於所有的路綫 $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(t)$, $[F]_{\mathfrak{r}}$ 皆恆等於零. 這就是說,在這樣的情況下, 也只有在這樣的情況下,所作的功將與路綫無關.

假如上面的條件不成立,則 $[F]_{\mathfrak{r}}$ 雖然不能對於所有的路綫都等於零,而對於某些特殊的路綫仍然可以等於零. 這些路綫就是我們變分問題的極值綫.假如力只是位置函數,如像我們在上例中

所假定的，則 $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{x}} - \mathfrak{r}_{\mathfrak{x}} = 0$ 只給出一個普通方程組，而不是一個微分方程組．在這樣的情況下，我們所得的只是一些個別的曲綫，即所謂奇異的極值綫，而不是一個變分導數等於零的曲綫羣．

譬如力函數(4)爲

$$\mathfrak{r} = \frac{1}{2}\begin{cases} y^2 \\ x^2 \end{cases},$$

依據(6)可得

$$\mathfrak{r}_{\mathfrak{x}} = \begin{pmatrix} 0 & y \\ x & 0 \end{pmatrix} \quad 及 \quad \bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{x}} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix},$$

由是(7)[1]遂爲

$$[F]_{\mathfrak{x}} \equiv \begin{pmatrix} 0 & x-y \\ y-x & 0 \end{pmatrix} \cdot \dot{\mathfrak{x}} = \begin{cases} (x-y)\dot{y} \\ (y-x)\dot{x} \end{cases} = (x-y)\begin{cases} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{cases}.$$

從這個式子我們可以看出，沿着直綫 $y = x$，$[F]_{\mathfrak{x}}$ 才恆等於零，此外則更無他綫．這條直綫，就是我們的奇異極值綫． 故只有兩個定點都在這條直綫上時，我們的變分問題才有答案，對於其他的兩點都將沒有答案．

我們今可驗證此事，假如兩個定點爲(0,0)與(1,1)，則沿直綫 $\mathfrak{x} = \begin{cases} t \\ t \end{cases}$ 所作的功爲

$$A = \frac{1}{2}\int_0^1 (y^2\dot{x} + x^2\dot{y})\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (t^2\cdot 1 + t^2\cdot 1)\,dt = \frac{1}{3},$$

這就是所求的極小值．今設另用一條拋物綫 $\mathfrak{x} = \begin{cases} t \\ t^n, \end{cases} n > 0$ 爲路綫，這條拋物綫顯然也通過上述的兩個定點，則沿此綫的功爲

$$A = \frac{1}{2}\int_0^1 (t^{2n}\cdot 1 + t^2\, n t^{n-1})\,dt = \frac{n^2+n+1}{2n^2+5n+2} \geqq \frac{1}{3},$$

1) 回到(5)的分量寫法，我們易見，張量的加與減即是二次項格式中相應的元素的加與減．

當 $n=1$ 時,等號有效. 又設再用一條正弦綫加於前面所述的直綫,即令

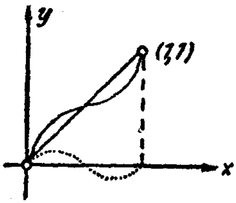

圖 3

$$\mathfrak{x}=\begin{cases} t, \\ t+\varepsilon \sin 2\pi t, \end{cases}$$

這條新綫,一部分在直綫 $y=x$ 之上,一部分在它之下(圖 3),則沿這條新綫的功爲

$$A=\frac{1}{2}\int_0^1 \{(t+\varepsilon \sin 2\pi t)^2\cdot 1+t^2(1+2\pi\varepsilon \cos 2\pi t)\}\,dt=\frac{1}{3}+\frac{\varepsilon^2}{4};$$

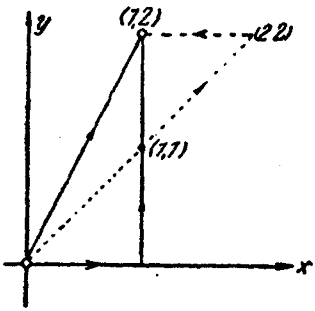

圖 4

當 $\varepsilon=0$ 時, A 就爲一個極小值.

由此可見,直綫 $y=x$ 確實給出一個極小值. 現在我們再來驗證,我們的變分問題將沒有答案, 假如兩個定點之一在直綫 $y=x$ 之外! 今設兩個定點爲 $(0,0)$ 與 $(1,2)$, 則沿其最短連結綫,即 $\mathfrak{x}=\begin{cases} t \\ 2t \end{cases}$ 的功爲(圖 4)

$$A=\frac{1}{2}\int_0^1 (4t^2\cdot 1+t^2\cdot 2)\,dt=1.$$

又設另取一綫,譬如先沿 x 軸進行,到了 $x=1$, 再平行於 y 軸進行,即

$$\text{a)}\quad \mathfrak{x}=\begin{cases} t \\ 0 \end{cases},\ t \text{ 由 } 0 \text{ 到 } 1;\quad \dot{\mathfrak{x}}=\begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases},\quad \mathfrak{f}=\frac{1}{2}\begin{cases} 0 \\ t^2 \end{cases}$$

及

$$\text{b)}\quad \mathfrak{x}=\begin{cases} 1 \\ t \end{cases},\ t \text{ 由 } 0 \text{ 到 } 2;\quad \dot{\mathfrak{x}}=\begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases},\quad \mathfrak{f}=\frac{1}{2}\begin{cases} t^2 \\ 1 \end{cases},$$

則此時的功爲

$$A=\frac{1}{2}\int_0^1 0\cdot dt+\frac{1}{2}\int_0^2 dt=1.$$

我們在此看到兩件事實. 第一件事實是:沿着後面兩條路綫的功是同樣大的. 第二件事實是:沿着直綫 $y=x$ 由(0,0)到(1,1)所作的功是最小的;因而利用這條路綫由(0,0) 到 (1,2)的功還可以減小. 假如我們將這兩件事實聯繫起來,我們或許會想到,在後面兩條路綫之間必然有一條路綫, 沿之而得的功將是一個極小值. 今設爲驗證我們的思想,我們將沿着折綫由(0,0)經 (1,1) 而達到(1,2) 的功計算出來,我們將得着一個值,它爲 $A=\frac{5}{6}$. 這個值確實比沿着後面兩條路綫所得的値爲小. 因此, 似乎確有一個極小値存在. 然而這個推論,仍然是錯誤的. 因爲假如我們選擇的路綫爲折綫 $(0,0)\to(2,2)\to(1,2)$, 則此時的功爲 $A=\frac{2}{3}$,故功較前愈變小了. 假如我們沿着直綫 $y=x$ 越過(2,2), 愈向前進, 而後折回復沿一條直綫直達(1,2),則沿此路綫所作的功將愈見綫性地下落而趨於 $-\infty$. 這時的功,一部分是力自己所作的,其值是正的; 一部分是反對力而作的,其值是負的.

由此可見,假如兩個定點爲(0,0)與(1,2),則在有盡的界域內確無連結的路綫,可以使我們的積分得着一個極端值;即使一個穩定値也不可得. 故對於這樣的邊界條件,我們的變分問題沒有答案.

§4. 等周問題

這個等周問題,原來稱之爲狄多 (Dido) 問題: 即是要用一條定長的綫圍出一個極大的面積. 今天,這個名詞的意義已擴大了.