大学物理权威教材精华700题解

DAXUE WULI QUANWEI JIAOCAI

JINGHUA 700 TIJIE

万方 刘丽敏 等编著

中国建材工业出版社

大学物理权威教材精华 700题解

万　方　刘丽敏　等编著

中国建材工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

大学物理权威教材精华 700 题解/万方，刘丽敏等编著. --北京：中国建材工业出版社，2007.4

ISBN 978-7-80227-187-6

Ⅰ. 大… Ⅱ. ①万… ②刘… Ⅲ. 物理学—高等学校—题解
Ⅳ. 04-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 140524 号

大学物理权威教材精华 700 题解

万　方　刘丽敏　等编著

出版发行：中国建材工业出版社
地　　址：北京市西城区车公庄大街 6 号
邮　　编：100044
经　　销：全国各地新华书店
印　　刷：北京鑫正大印刷有限公司
开　　本：787mm × 1092mm　1/16
印　　张：22
字　　数：551 千字
版　　次：2007 年 4 月第 1 版
印　　次：2007 年 4 月第 1 次
书　　号：ISBN 978-7-80227-187-6
定　　价：33.00 元

本社网址：www.jccbs.com.cn

前　　言

学习大学物理这一门重要的基础课程，解题是重要的学习环节之一，通过做一定数量的习题，有助于加深对基本概念和定律的理解，从而提高学生分析问题和解决问题的能力。本书参考了张三慧教授主编的《大学物理学》（第二版），吴百诗教授主编的《大学物理》（新版），马文蔚教授主编的《物理学》（第四版）和张达宋教授主编的《物理学基本教程》（第二版）等教材，其内容涵盖大学物理课程教学基本要求的全部基础知识，包括力学、热学、电磁学、波动与光学和量子物理基础五篇，全书共收入七百多道习题。在解题过程中，力求做到思路清晰、简捷。希望本书能对学习大学物理的同学提供较大的帮助。

本书由万方、刘丽敏、刘漪、孔炎、邱菊合作编写，限于编者水平，错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2007 年 3 月

目 录

第1篇 力　　学

第1章　质点运动学

1-1　质点做直线运动,运动方程为 $x=12t-6t^2$. 其中 t 以 s 为单位,x 以 m 为单位,求:(1)$t=4$s 时,质点的位置、速度和加速度;(2)质点通过原点时的速度;(3)质点速度为零时的位置;(4)做出 x-t 图、v-t 图和 a-t 图.

解:(1)根据直线运动定义,可得质点的位置、速度和加速度分别为

$$x = 12t - 6t^2 \tag{1}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 12 - 12t \tag{2}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -12\text{m}\cdot\text{s}^{-2} \tag{3}$$

当 $t=4$s 时,代入数字后得

$$x = 12\times4 - 6\times4^2 = -48\text{m}$$
$$v = 12 - 12\times4 = -36\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$
$$a = -12\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

(2)当质点通过原点时,$x=0$,代入(1)式,得

$$12t - 6t^2 = 0$$

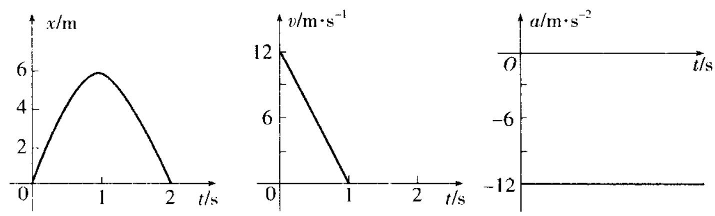
得质点通过原点的时间分别为 $t_1=0$,$t_2=2$s,代入(2)式后得 $v_1=12\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$,$v_2=-12\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

(3)将 $v=0$ 代入(2)式,得 $12-12t=0$

即质点速度为零时 $t=1$s,再代入(1)式,得其位置为

$$x = 12 - 6\times1 = 6\text{m}$$

(4)根据(1)式、(2)式和(3)式,描述该质点运动的 $x-t$ 图、$v-t$ 图和 $a-t$ 图如题 1-1 图所示.

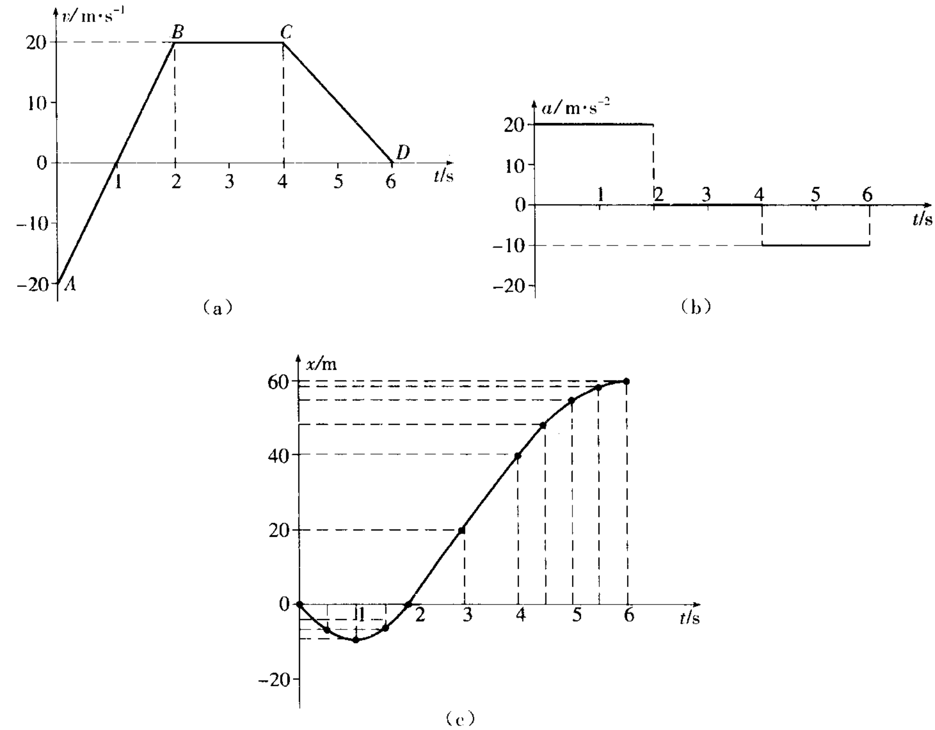


题 1-1 图

此题还可以求:(1)质点在运动开始后 4.0s 内位移的大小;(2)质点在 4.0s 内所通过的路程. 求解时位移大小 $\Delta x = x_4 - x_0 = x_4$;而路程 $S = |\Delta x_1| + |\Delta x_2|$,$\Delta x_1 = x_1 - x_0$,$\Delta x_2 = x_4 - x_1$.

若再问在哪个时间间隔它沿 x 轴正向运动? 哪个时间间隔沿 x 轴负向运动? 哪个时间间隔加速? 哪个时间减速? 只要分别分析 $v=v(t)$ 和 $a=a(t)$,当 $v>0$ 对应的时间为质点沿 x 轴正向运动,$v<0$ 对应的时间质点沿 x 轴负向运动;$a>0$ 的时间加速,$a<0$ 的时间减速.

1-2　一质点沿 x 轴方向作直线运动，其速度与时间的关系如题 1-2(a)图所示. 设 $t=0$ 时，$x=0$. 试根据已知的 v-t 图，画出 a-t 图以及 x-t 图.



题 1-2 图

解：由题 1-2(a)图 AB、BC、CD 三个过程，求得加速度值分别为

$$a_{AB}=\frac{v_B-v_A}{t_B-t_A}=20\mathrm{m\cdot s^{-2}}\qquad（匀加速直线运动）$$

$$a_{BC}=0\qquad（匀速直线运动）$$

$$a_{CD}=\frac{v_D-v_C}{t_D-t_C}=-10\mathrm{m\cdot s^{-2}}\qquad（匀减速直线运动）$$

根据上述结果即可作出质点的 a-t 图[见题 1-2(b)图].

由匀变速直线运动公式

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

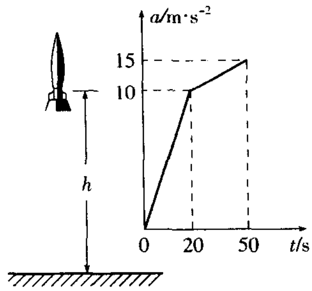
计算在 0 ~ 2s 和 4 ~ 6s 时间间隔内各时刻的位置分别为

t/s	0	0.5	1	1.5	2	4	4.5	5	5.5	6
x/m	0	−7.5	−10	−7.5	0	40	48.7	55	58.7	60

用描数据点的作图方法，由表中数据可作 0 ~ 2s 和 4 ~ 6s 时间内的 x-t 图. 在 2 ~ 4s 时间内，质点是作 $v=20\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的匀速直线运动，其 x-t 图是斜率 $k=20$ 的一段直线[见题 1-2(c)图].

1-3　火箭沿竖直方向由静止向上发射，加速度随时间的变化规律如图所示. 试求火箭在

$t=50\text{s}$ 时燃料用完那一瞬间所能达到的高度及该时刻火箭的速度.



题 1-3 图

解:第一阶段由图得　　$a=\dfrac{1}{2}t$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}t,\qquad \mathrm{d}v=\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

积分

$$\int_0^v \mathrm{d}v=\int_0^t \frac{1}{2}t\mathrm{d}t,\qquad v=\frac{1}{4}t^2$$

当 $t=20\text{s}$,　　$v=100\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

由 $v=\dfrac{1}{4}t^2$ 得　　$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{4}t^2$

$$\int_0^x \mathrm{d}x=\int_0^t \frac{1}{4}t^2\mathrm{d}t$$

$$x=\frac{1}{12}t^3,t=20\text{s}\quad x=\frac{2000}{3}\text{m}$$

第二阶段由图得

$$a=\frac{1}{6}t+\frac{20}{3}$$

$$\mathrm{d}v=\left(\frac{1}{6}t+\frac{20}{3}\right)\mathrm{d}t$$

积分

$$\int_{100}^v \mathrm{d}v=\int_{20}^t\left(\frac{1}{6}t+\frac{20}{3}\right)\mathrm{d}t$$

$$v=\frac{1}{12}t^2+\frac{20}{3}t-\frac{200}{3}$$

再积分

$$\int_{\frac{2000}{3}}^x \mathrm{d}x=\int_{20}^t\left(\frac{1}{12}t^2+\frac{20}{3}t-\frac{200}{3}\right)\mathrm{d}t$$

可得

$$x=\frac{1}{36}t^3+\frac{20}{6}t^2-66.6t+444.4$$

当 $t=50\text{s}$ 时,$v=475\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$,$h=8918.0\text{m}$.

1-4　质点沿直线运动,其速度 $v=t^3+3t^2+2$,如果 $t=2$ 时,$x=4$,求 $t=3$ 时质点的位置、速度和加速度.(其中 v 以 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$为单位,$t$ 以 s 为单位,x 以 m 为单位)

解:速度表示式对 t 积分,得

$$x=\int v\mathrm{d}t=\frac{1}{4}t^4+t^3+2t+x_0$$

将 $t=2\text{s}$ 时,$x=4\text{m}$ 代入上式,得积分常量 $x_0=-12\text{m}$,则

$$x=\frac{1}{4}t^4+t^3+2t-12$$

速度表示式对 t 求导数,得

$$a = \frac{dv}{dt} = 3t^2 + 6t$$

因此 $t=3s$ 时质点的位置、速度和加速度分别为

$$x = \frac{1}{4} \times 3^4 + 3^3 + 2 \times 3 - 12 = 41.25\text{m}$$

$$v = 3^3 + 3 \times 3^2 + 2 = 56\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a = 3 \times 3^2 + 6 \times 3 = 45\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

1-5 质点沿直线运动,加速度 $a=4-t^2$,如果当 $t=3$ 时,$x=9$,$v=2$,求质点的运动方程.(其中 a 以 $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$为单位,$t$ 以 s 为单位,x 以 m 为单位,v 以 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$为单位)

解:由 $a=\frac{dv}{dt}$得

$$v = \int a dt = -\frac{1}{3}t^3 + 4t + v_0$$

$$x = \int v dt = -\frac{1}{12}t^4 + 2t^2 + v_0 t + x_0$$

将 $t=3s$ 时,$x=9m$,$v=2m \cdot s^{-1}$代入以上二式,得积分常数 $v_0 = -1m \cdot s^{-1}$,$x_0=0.75m$,则

$$v = -\frac{1}{3}t^3 + 4t - 1$$

$$x = -\frac{1}{12}t^4 + 2t^2 - t + 0.75$$

1-6 跳伞运动员从 1200m 高空下跳,起初不打开降落伞作加速运动.由于空气阻力的作用,会加速到一"终极速率"$200\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$而开始匀速下降.下降到离地面 50m 处时打开降落伞,很快速率会变为 $18\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$而匀速下降着地.若起初加速运动阶段的平均加速度按 $g/2$ 计,此跳伞运动员在空中一共经历了多长时间?

解:$h_0=1200\text{m}$,$v_1=200\text{km} \cdot \text{h}^{-1}=55.6\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$,$v_2=18\text{km} \cdot \text{h}^{-1}=5\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$,$h_2=50\text{m}$

运动员加速下落的时间

$$t_1 = \frac{v_1}{g/2} = \frac{2 \times 55.6}{9.8} = 11.3\text{s}$$

加速下落的距离

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g/2} = \frac{v_1^2}{g} = \frac{55.6^2}{9.8} = 315\text{m}$$

以速率 v_1 匀速下落的时间

$$t_2 = \frac{h_0 - h_1 - h_2}{v_1} = \frac{1200 - 315 - 50}{55.6} = 15.0\text{s}$$

以 v_2 匀速下落的时间 $t_3 = \frac{h_2}{v_2} = \frac{50}{5} = 10\text{s}$

所以 $t = t_1 + t_2 + t_3 = 36.3\text{s}$

"终极速率"是指物体不再加速下落.当给出 $a=a(v)$时,令 $a=0$ 可求终极速率.

1-7 当物体以非常高的速度穿过空气时,由空气阻力产生的反向加速度大小与物体速度

的平方成正比，即 $a=-kv^2$，其中 k 为常量. 若物体不受其他力作用沿 x 方向运动，通过原点时的速度为 v_0，试证明在此后的任意位置 x 处其速度为

$$v=v_0e^{-kx}$$

证：根据加速度的定义，得

$$\frac{dv}{dt}=a=-kv^2$$

因 $a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$，代入上式，分离变量，整理后得

$$\frac{1}{v}dv=-kdx$$

应用初始条件 $x=0$ 时，$v=v_0$，上式两边分别对 v 和 x 积分

$$\int_{v_0}^{v}\frac{1}{v}dv=-\int_0^x kdx$$

得

$$\ln\frac{v}{v_0}=-kx$$

即有

$$v=v_0e^{-kx}$$

此题给出 $a=a(v)$ 关系，若加速度是位置函数 $a=a(x)$，求 $v=v(x)$ 时，同样用到积分变量的替换，即 $a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$. 这种方法在许多问题中都有应用.

1-8 一支气枪竖直向上发射，发射速度为 $29.4\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，若发射两颗子弹的间隔时间为 4s，求两颗子弹将在距发射点多高的地方彼此相遇？

解：以发射点为原点，竖直向上为 y 坐标正向，第一颗子弹发射后的 t 时刻，其位置为

$$y_1=v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

其中 v_0 为发射速度，第二颗子弹此时（设 $t>4\text{s}$）的位置为

$$y_2=v_0(t-4)-\frac{1}{2}g(t-4)^2 \tag{2}$$

当两颗子弹相遇时，$y_1=y_2$，由(1)式和(2)式得

$$t=\frac{v_0}{g}+2=\frac{29.4}{9.8}+2=5\text{s}$$

将上式代入(1)式，得相遇点位置为

$$y_1=v_0t-\frac{1}{2}gt^2=29.4\times5-\frac{1}{2}\times9.8\times5^2=24.5\text{m}$$

1-9 A 车通过某加油站后其行驶路程 x 与时间 t 的关系可以表示为

$$x=2t+0.4t^2$$

（其中 t 以 s 为单位，x 以 m 为单位）在 A 车离开 10s 后 B 车通过该加油站时速度为 $12\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，且具有与 A 车相同的加速度. 求：(1) B 车离开加油站后追上 A 车所需时间；(2) 两车相遇时各自的速度.

解:(1)令 B 车通过该加油站时 $t=0$,则 A 车的运动方程为

$$x_A = 2(t+10) + 0.4(t+10)^2$$

B 车的运动方程为

$$x_B = 12t + 0.4t^2$$

两车相遇时有 $x_A = x_B$,由以上两式得

$$2(t+10) + 0.4(t+10)^2 = 12t + 0.4t^2$$

解得

$$t = 30\text{s}$$

(2)根据速度的定义,相遇时两车速度分别为

$$v_A = \frac{dx_A}{dt} = 2 + 0.8\times(t+10) = 34\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v_B = \frac{dx_B}{dt} = 12 + 0.8t = 36\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

1-10 一升降机以加速度 $1.22\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ 上升,当上升速度为 $2.44\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 时,有一螺帽自升降机的天花板松落,天花板与升降机底面相距 2.74m,计算:(1)螺帽从天花板落到底面所需的时间;(2)螺帽相对于升降机外固定柱子的下降距离.

解 1:(1)以升降机外固定柱子为参考系,竖直向上为 y 坐标轴正向,螺帽松落时升降机底面位置为原点.螺帽从 $y_0=2.74\text{m}$ 处松落,以初速度 $v_0=2.44\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 做竖直上抛运动,升降机底面则从原点以同样的初速度做向上的加速运动,加速度 $a=1.22\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$,它们的运动方程分别为

螺帽

$$y_1 = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

底面

$$y_2 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

螺帽落到底面上时,$y_1 = y_2$,由以上两式可得

$$t = \sqrt{\frac{2y_0}{g+a}} = \sqrt{\frac{2\times 2.74}{9.8+1.22}} = 0.705\text{s}$$

(2)螺帽相对于升降机外固定柱子的下降距离为

$$s = y_0 - y_1 = -v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$= -2.44\times 0.705 + \frac{1}{2}\times 9.8\times 0.705^2 = 0.715\text{m}$$

解 2:(1)取升降机为参考系,根据相对加速度合成,螺帽相对于升降机的加速度为 $a'=g+a$,方向向下,取竖直向下为 y' 坐标轴正向,升降机天花板位置为原点,升降机底面位置 $y'=2.74\text{m}$,由匀加速直线运动计算公式得

$$y' = \frac{1}{2}(g+a)t^2$$

则

$$t=\sqrt{\frac{2y'}{g+a}}=\sqrt{\frac{2\times2.74}{9.8+1.22}}=0.705\mathrm{s}$$

(2)取地面为参考系,t 时间内升降机上升的高度为

$$y=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

则螺帽相对于升降机外固定柱子的下降距离为

$$s=y'-y=y'-v_0t-\frac{1}{2}at^2=-v_0t+\frac{1}{2}gt^2$$

$$=-2.44\times0.705+\frac{1}{2}\times9.8\times0.705^2=0.715\mathrm{m}$$

1-11 质点做半径为20cm的圆周运动,其切向加速度恒为5cm·s^{-2},若该质点由静止开始运动,需要多少时间:(1)它的法向加速度等于切向加速度;(2)法向加速度等于切向加速度的二倍?

解:质点圆周运动,设 t 时刻速度 $v=a_\mathrm{t}t$,法向加速度 $a_\mathrm{n}=\frac{v^2}{r}$,因此有

$$t=\frac{v}{a_\mathrm{t}}=\frac{1}{a_\mathrm{t}}\sqrt{a_\mathrm{n}r}=\sqrt{\frac{a_\mathrm{n}}{a_\mathrm{t}^2}r}$$

(1)当 $a_\mathrm{n}=a_\mathrm{t}$ 时, $t=\sqrt{\frac{a_\mathrm{n}}{a_\mathrm{t}^2}r}=\sqrt{\frac{r}{a_\mathrm{t}}}=\sqrt{\frac{20}{5}}=2\mathrm{s}$

(2)当 $a_\mathrm{n}=2a_\mathrm{t}$ 时, $t=\sqrt{\frac{a_\mathrm{n}}{a_\mathrm{t}^2}r}=\sqrt{\frac{2r}{a_\mathrm{t}}}=\sqrt{\frac{2\times20}{5}}=2.83\mathrm{s}$

1-12 蟹状星云被认为是一次超新星爆发后的遗物. 1920年已发现它的范围正在以0.21″·a^{-1}(″为[角]秒,a为年)的速率膨胀,当时蟹状星云的范围为180″. 假定膨胀速率是恒定的,试问该超新星是哪一年爆发的?

解:所求年代为

$$1920-180/0.21=1060\text{年}$$

(计算结果与我国《宋会要》上记载的一次"客星"出现的年代1054年相符. 举世公认该记载的权威性.)

1-13 观察发现:离我们越远的星系正以越大的速率远离我们飞去. 例如牧夫座内一星云离我们银河系的距离为 2.74×10^9 l. y. (l. y. 为光年,1l. y. $=9.46\times10^{15}$ m),它正以 $3.93\times10^7\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速率飞离. 假定飞离速率是恒定的,试问它是多少年前和我们的银河系分离的?

解:即该星云和我们银河系分离的时间为

$$\frac{9.46\times10^{15}\times2.74\times10^9}{3.93\times10^7}=6.59\times10^{17}\mathrm{s}=2.09\times10^{10}\mathrm{a}$$

(根据宇宙产生于一次大爆炸的学说,可以认为这一段时间就是宇宙的年龄.)

1-14 (1)地球的半径为6.37×10^6m,求地球赤道表面上一点相对于地球中心的向心加速度;(2)地球绕太阳运行的轨道半径为1.5×10^{11}m,求地球相对于太阳的向心加速度;(3)天文测量表明,太阳系以近似圆形的轨道绕银河系中心运动,半径为2.8×10^{20}m,速率为$2.5\times10^5\mathrm{m\cdot s^{-1}}$,求太阳系相对于银河系的向心加速度;(4)求这些加速度每对的比值.

解:(1)地球赤道表面一点相对于地球中心的向心加速度为

$$a_{n_1}=R_1\omega_1^2=6.37\times10^6\times\left(\frac{2\pi}{24\times60\times60}\right)^2=3.36\times10^{-2}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

(2)地球相对太阳的向心加速度为

$$a_{n_2}=R_2\omega_2^2=1.5\times10^{11}\times\left(\frac{2\pi}{365\times24\times60\times60}\right)^2=5.95\times10^{-3}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

(3)太阳系相对银河系的向心加速度为

$$a_{n_3}=\frac{v_3^2}{R_3}=\frac{(2.5\times10^5)^2}{2.8\times10^{20}}=2.23\times10^{-10}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

(4)两加速度比值为$a_{n_1}:a_{n_2}=5.65:1$,加速度比值$a_{n_2}:a_{n_3}=2.67\times10^7:1$.

1-15 一架飞机在水平地面的上方,以$174\mathrm{m\cdot s^{-1}}$的速率垂直俯冲,假定飞机以圆形路径脱离俯冲,而飞机可以承受的最大加速度为$78.4\mathrm{m\cdot s^{-2}}$,为了避免飞机撞到地面,求飞机开始脱离俯冲的最低高度.假设整个运动中速率恒定.

解:设飞机以半径为R圆形路径俯冲,其加速度为

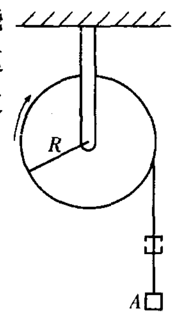
$$a_n=\frac{v^2}{R}$$

当a_n为飞机所能承受的最大加速度时,R即为最小,所以

$$78.4=\frac{174^2}{R_{\min}},\qquad R_{\min}=\frac{174^2}{78.4}=386.2\mathrm{m}$$

这就是飞机开始脱离俯冲的最低高度.

1-16 一个半径$R=1.0$m的圆盘可以绕一水平轴自由转动.一根轻绳绕在盘子的边缘,其自由端拴一物体A.在重力作用下,物体A从静止开始匀加速地下降,在$t=2.0$s内下降的距离$h=0.4$m.求物体开始下降后$t'=3$s末,轮边缘上任一点的切向加速度与法向加速度.



题1-16图

解:物体A下降的加速度为

$$a=\frac{2h}{t^2}=\frac{2\times0.4}{2^2}=0.2\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

此加速度也等于轮缘上一点在$t'=3$s时的切向加速度,即

$$a_t'=0.2\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

在$t'=3$s时的法向加速度为($v'=a_tt'$)

$$a_n=\frac{v'^2}{R}=\frac{(0.2\times3)^2}{1.0}=0.36\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

1-17 一质点沿半径为R的圆周按规律$s=v_0t-\frac{1}{2}bt^2$运动,v_0、b都是常量.(1)求t时刻

质点的总加速度;(2)t 为何值时总加速度在数值上等于 b? (3)当加速度达到 b 时,质点已沿圆周运行了多少圈?

解:(1)质点作圆周运动的速率为

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 - bt$$

其加速度的切向分量和法向分量分别为

$$a_t = \frac{d^2 s}{dt^2} = -b, a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}$$

故加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \frac{\sqrt{R^2 b^2 + (v_0 - bt)^4}}{R}$$

其方向与切线之间的夹角为

$$\theta = \arctan \frac{a_n}{a_t} = \arctan\left[-\frac{(v_0 - bt)^2}{Rb} \right]$$

(2)要使$|\boldsymbol{a}| = b$,由$\frac{1}{R}\sqrt{R^2 b^2 + (v_0 - bt)^4} = b$ 可得

$$t = \frac{v_0}{b}$$

(3)从 $t=0$ 开始到 $t=v_0/b$ 时,质点经过的路程为

$$s = s_t - s_0 = \frac{v_0^2}{2b}$$

因此质点运行的圈数为

$$n = \frac{s}{2\pi R} = \frac{v_0^2}{4\pi bR}$$

1-18 质点以不变的速率 $5\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ 运动,速度的方向与 x 轴间夹角等于 t 弧度(t 为时间的数值),当 $t=0$ 时,$x=0$,$y=5\mathrm{m}$,求质点的运动方程及轨道的正交坐标方程,并在 xy 平面上描画出它的轨道.

解:设质点的速度为 v,与 x 轴间夹角为 t 弧度,则速度的分量为

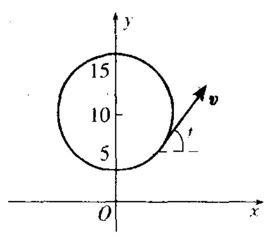
$$v_x = \frac{dx}{dt} = v\cos t, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = v\sin t$$

以上两式分别分离变量后积分,得

$$x = v\sin t + C_1, \qquad y = -v\cos t + C_2$$

初始条件为 $t=0$ 时,$x=0$,$y=5\mathrm{m}$,代入以上两式后,得

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = 10\mathrm{m}$$



题 1-18 图

因此运动方程为

$$x = 5\sin t, \qquad y = -5\cos t + 10$$

从中消去 t,得质点运动轨道的正交坐标方程为

$$x^2 + (10 - y)^2 = 25$$

这是圆心在 y 轴上 10m 处的圆,半径为 5m,如题 1-18 图所示.

讨论:(1)由运动方程可以写出质点在任意时刻的位矢 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$,并可以求出某时刻的速

度和加速度.

$$\boldsymbol{v}|_t = \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_t \boldsymbol{i} + \left.\frac{\mathrm{d}y}{dz}\right|_t \boldsymbol{j}; \qquad \boldsymbol{a}|_t = \left.\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\right|_t \boldsymbol{i} + \left.\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right|_t \boldsymbol{j}$$

(2)由$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} = v\cos t\boldsymbol{i} + v\sin t\boldsymbol{j}$,

$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} = -v\sin t\boldsymbol{i} + v\cos t\boldsymbol{j}$.

可以证明$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} = 0$,说明质点运动中$\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{a}$.

1-19 一半径为0.50m的飞轮在启动时的短时间内,其角速度与时间的平方成正比.在$t = 2.0\mathrm{s}$时测得轮边缘一点的速度值为$4.0\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.求:(1)该轮在$t' = 0.5\mathrm{s}$的角速度,轮边缘一点的切向加速度和总加速度;(2)该点在2.0s内所转过的角度.

解:(1)因$\omega R = v$,由题意$\omega \propto t^2$得比例系数

$$k = \frac{\omega}{t^2} = \frac{v}{Rt^2} = 2$$

所以

$$\omega = \omega(t) = 2t^2$$

则$t' = 0.5\mathrm{s}$时的角速度、角加速度和切向加速度分别为

$$\omega = 2t'^2 = 0.5\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 4t' = 2.0\mathrm{rad \cdot s^{-2}}$$

$$a_t = \alpha R = 1.0\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

总加速度

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n = \alpha R\boldsymbol{e}_t + \omega^2 R\boldsymbol{e}_n$$

$$a = \sqrt{(\alpha R)^2 + (\omega^2 R)^2} = 1.01\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

(2)在2.0s内该点所转过的角度

$$\theta - \theta_0 = \int_0^{2\mathrm{s}} \omega \mathrm{d}t = \int_0^{2\mathrm{s}} 2t^2 \mathrm{d}t = \left.\frac{2}{3}t^3\right|_0^{2\mathrm{s}} = 5.33\mathrm{rad}$$

1-20 一质点在半径为0.10m的圆周上运动,其角位置为$\theta = 2 + 4t^3\mathrm{rad}$.(1)求在$t = 2.0\mathrm{s}$时质点的法向加速度和切向加速度;(2)当切向加速度的大小恰等于总加速度大小的一半时,θ值为多少?(3)t为多少时,法向加速度和切向加速度的值相等?

解:(1)由于$\theta = 2 + 4t^3$,则角速度$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 12t^2$.角加速度$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 24t$,在$t = 2\mathrm{s}$时,法向加速度和切向加速度的数值分别为

$$a_n|_{t=2\mathrm{s}} = R\omega^2 = 2.30 \times 10^2\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$$a_t|_{t=2\mathrm{s}} = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 4.80\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

(2)当$a_t = a/2 = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + a_t^2}$时,有$3a_t^2 = a_n^2$,即

$$3(R24t)^2 = R^2(12t^2)^4$$

$$t = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0.29\mathrm{s}$$

此时刻的角位置为

$$\theta = 2 + 4t^3 = 3.15\text{rad}$$

(3)要使 $a_n = a_t$，则有

$$R(12t^2)^2 = R24t$$
$$t = 0.55\text{s}$$

1-21　一质点做半径为 $R = 10\text{m}$ 的圆周运动，其角加速度 $\alpha = \pi\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$，若质点由静止开始运动，求质点在第 1s 末的(1)角速度；(2)法向加速度和切向加速度；(3)总加速度的大小和方向.

解：(1)角速度为

$$\omega = \alpha t = \pi \times 1 = \pi\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2)根据线量与角量的关系，有

$$a_n = R\omega^2 = 10 \times \pi^2 = 10\pi^2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$
$$a_t = R\alpha = 10 \times \pi = 10\pi\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

(3)质点圆周运动的加速度大小为

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{(10 \times 3.14^2)^2 + (10 \times 3.14)^2} = 103.5\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

加速度与切线方向的夹角为

$$\varphi = \arctan\frac{a_n}{a_t} = \arctan\frac{10 \times 3.14^2}{10 \times 3.14} = 72°20'$$

1-22　一质点在半径为 R 的圆周上以恒定的速率运动，质点由位置 A 运动到位置 B，OA 和 OB 所对的圆心角为 $\Delta\theta$.(1)试证位置 A 和 B 之间的平均加速度为 $\bar{a} = \sqrt{2(1-\cos\Delta\theta)}v^2/(R\Delta\theta)$；(2)当 $\Delta\theta$ 分别等于 90°、30°、10°和 1°时，平均加速度各为多少？并对结果加以讨论.

解：(1)由图(a)可看到 $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$，故

$$|\Delta\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\Delta\theta}$$
$$= v\sqrt{2(1 - \cos\Delta\theta)}$$

而

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{R\Delta\theta}{v}$$

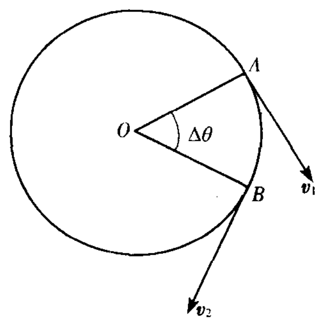
所以

$$\bar{a} = \frac{|\Delta\boldsymbol{v}|}{\Delta t} = \sqrt{2(1 - \cos\Delta\theta)}\frac{v^2}{R\Delta\theta}$$

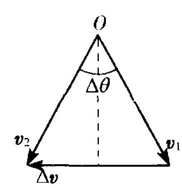
(2)将 $\Delta\theta = 90°$、$30°$、$10°$、$1°$分别代入上式，得

$$\bar{a}_1 \approx 0.9003\frac{v^2}{R}, \bar{a}_2 \approx 0.9886\frac{v^2}{R},$$
$$\bar{a}_3 \approx 0.9987\frac{v^2}{R}, \bar{a}_4 \approx 1.000\frac{v^2}{R}$$

以上结果表明，当 $\Delta\theta \to 0$ 时，匀速率圆周运动的平均加速度趋近于一极限值，该值即为法向加速度 $\frac{v^2}{R}$.



(a)



(b)

题 1-22 图