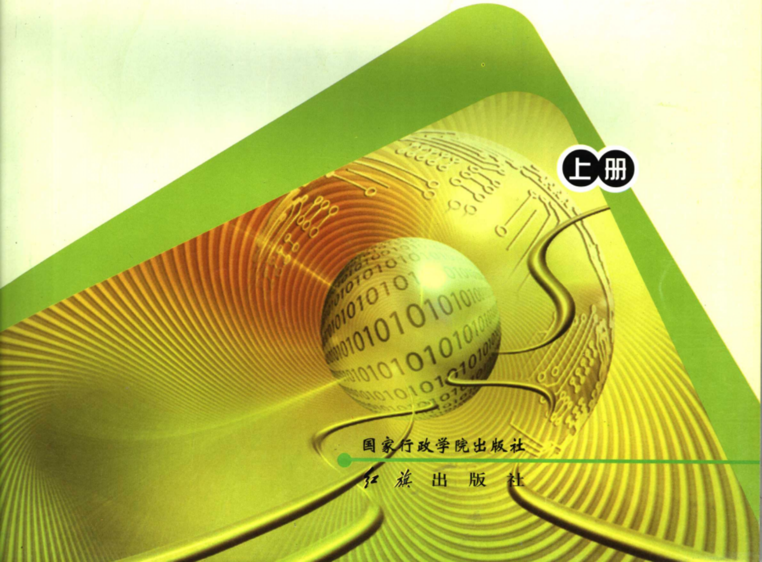
少数民族高层次骨干人才
硕士研究生基础强化培训教材（试用）

高等数学练习册

教育部少数民族高层次骨干人才
硕士研究生基础强化培训教材编写委员会 编



上册

国家行政学院出版社
红旗出版社

责任编辑／李锦慧
封面设计／赵孝艳

SHAOSHU MINZU
GAOCENGCI GUGAN RENCAI
SHUOSHI YANJIUSHENG
JICHU QIANGHUA PEIXUN JIAOCAI
(SHIYONG)

高等数学练习册

ISBN 7-80140-519-6

9 787801 405197 >

ISBN 7-80140-519-6/0 · 45
定价：43.20元（全二册）

少数民族高层次骨干人才硕士研究生基础强化培训教材（试用）

高等数学练习册

（上 册）

教育部少数民族高层次骨干人才硕士研究生基础强化培训教材编写委员会 编

主 编 罗 群

编写人员 罗 群 卓新建 余翊华 樊 玲

国家行政学院出版社

红旗出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·练习册.上册/教育部少数民族高层次骨干人才硕士研究生基础强化培训教材编写委员会编.
-北京：国家行政学院出版社，2006
ISBN 7-80140-519-6

Ⅰ.高... Ⅱ.教... Ⅲ.高等数学-研究生教育：少数民族教育-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第082074号

高等数学练习册

（上 册）

教育部少数民族高层次骨干人才
硕士研究生基础强化培训教材编写委员会 编

*

国家行政学院出版社
红 旗 出 版 社 出版
北京市海淀区长春桥路6号(100089)
新华书店总经销
开封市第一印刷厂印刷
880×1230毫米 1/16开本 26.75印张 535千字
2006年8月第1版 2006年8月第1次印刷
印数：1-1000
ISBN 7-80140-519-6/0·45 定价：43.20元（全二册）

教育部“少数民族高层次骨干人才”
硕士研究生基础强化培训
教材编写委员会

主 任 委 员　阿布都

副主任委员　次仁多布杰　张英海

编　　　委　（按姓氏笔画为序）

朱建平　李　山　邱树森　宋太成

张连江　张　澍　林家儒　林　锋

金炳镐　罗　群　钟义信　蒋原伦

韩俊梅　赖辉亮

前言

大力培养少数民族高层次骨干人才是实践“三个代表”重要思想、落实科学发展观、全面建设小康社会的迫切需要，是贯彻党的民族政策、增强民族团结、维护祖国统一的现实需要，是贯彻科教兴国战略、推进西部大开发战略的重大举措，是内地高校责无旁贷的政治任务。

为顺利实施国家“少数民族高层次骨干人才”培养计划，适应“少数民族高层次骨干人才”硕士研究生基础强化培训教学的需要，教育部民族教育司组织编写了《古典文学》、《高等数学》、《线性代数》、《信息技术》、《英语》、《马克思主义理论》、《民族理论与民族政策》等“少数民族高层次骨干人才”硕士研究生基础强化培训系列教材。本套教材的使用对象为参加“少数民族高层次骨干人才”硕士研究生基础强化培训的学生。

按照教育部对硕士研究生基础强化培训的教学要求，本套教材参照近年来少数民族本科毕业生的普遍水平，以及少数民族学生在研究生入学考试中的重点难点，遵循强化基础、突出重点的原则进行编写，使这套教材的基础课程综合水平达到攻读硕士研究生课程的基本要求，从而全面提高学生的科学和人文素养，增强学生的实践能力和科研创新能力，为在西部大开发和民族地区发展中的骨干打下坚实的知识基础。

由于时间仓促，教材中难免有疏漏或不足之处，希望各地有关学校在试用中提出宝贵意见，以待今后进一步修订。

编写说明

《高等数学》是理工科与经济管理各专业的一门重要基础课,它的基本内容与思想方法，在数学的各个分支以及科学技术的各个领域都有广泛应用。

要掌握好高等数学的基本理论、基本概念和基本方法，并能准确、灵活的运用，有效的方法之一就是归纳知识要点，解析典型、综合的例题，独立思考、演算一定量的题目。

本书是为少数民族硕士研究生在高等数学方面作基础强化培训而编写的辅导练习，与相应《高等数学（上)》教材配套，分为上、下两册。上册内容为极限与连续、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数共7章，每一章分为4个部分：内容提要、综合举例、同步训练（A级、B级）以及教材各节的习题解答与提示。其中综合举例也可以作为练习，同步训练也可以作为教材每章的总习题。给出解答是为了方便学生自学、参考。

参加本书编写工作的有：余翊华（第一、二章)、罗群（第三、四章)、卓新建（第五、六章)、樊玲（第七章)。

在编写的过程中，我们得到了教育部民族教育司、北京邮电大学、北京邮电大学民族教育学院和信息工程学院以及红旗出版社的大力支持,得到了阮传概、陆传赉、钮心忻教授和朱建平老师的大力帮助。在此，我们表示衷心感谢。

限于编者水平，同时编写时间也非常仓促，书中一定存在不妥之处，诚恳希望广大读者批评指正，以便进一步修改完善。

编　者

目 录

第一章

极限与连续

内容提要

一、数列极限

1. 数列极限的定义

$\forall \varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，就有

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a, \text{或 } x_n\to a(n\to\infty).$$

2. 根据定义证明数列极限的存在性

根据定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，常用的两种方法：

(1)直接解不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

得 $n>N(\varepsilon)$. 从而令 $N=N(\varepsilon)$，则 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

(2)放大法. 先将表达式 $|x_n-a|$ 简化，放大

$$|x_n-a|<H(n),$$

其中 $H(n)$ 的表达式比较简单. 然后，通过解不等式 $H(n)<\varepsilon$，求出 $n>N(\varepsilon)$. 从而令 $N=N(\varepsilon)$，则 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

3. 数列 $\{x_n\}$ 的极限不是 a 的肯定描述

$\exists \varepsilon_0>0$，$\forall N>0$，$\exists n>N$，使得 $|x_n-a|\geqslant\varepsilon_0$.

4. 数列极限的性质

(1)唯一性

若数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，则极限值是唯一的.

(2)有界性

若数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，则 $\{x_n\}$ 有界.

(3)保序性

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，且 $a<b$，那么存在 $N>0$，当 $n>N$，有 $x_n<y_n$.

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，且存在 $N_0>0$，当 $n>N_0$，有 $x_n\leqslant y_n$，则 $a\leqslant b$.

(4)子数列的收敛性

数列$\{x_n\}$收敛于 a 的充要条件是$\{x_n\}$的任一子数列$\{x_{n_k}\}$收敛于 a.

由此得到判断数列极限不存在的两个方法：

方法一　如果能够找到$\{x_n\}$的某个子数列$\{x_{n_k}\}$，且 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$ 不存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

方法二　如果能够找到$\{x_n\}$的两个不同的子数列$\{x_{n_k}^1\}$，$\{x_{n_k}^2\}$，并且

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}^1=c,\lim_{k\to\infty}x_{n_k}^2=d,$$

但 $c\neq d$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

5. 数列极限的四则运算法则

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，则

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b$；

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=ab$；

(c)若 $y_n\neq0,b\neq0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{a}{b}$.

6. 收敛原理

(1)夹逼定理

设数列 x_n,y_n,z_n，满足：(a) $x_n\leqslant z_n\leqslant y_n(n=1,2,\cdots)$；(b) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$；则 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

(2)单调有界收敛定理

若数列单调上升(下降)，有上界(下界)，则数列极限存在.

(3)柯西收敛原理

数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，当 $m,n>N$ 时，有

$$|x_n-x_m|<\varepsilon.$$

二、函数极限

1. 函数极限的定义

(1) $x\to x_0$ 时 $f(x)$的极限

设 $f(x)$在 $U_0(x_0)$上定义，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 x 趋向于 x_0 时，函数 $f(x)$的极限是 A，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,\text{或 }f(x)\to A(x\to x_0).$$

(2)单侧极限

设 $f(x)$在 x_0 的某个右邻域内有定义，若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为 $f(x)$在点 x_0 的右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A\text{ 或 }f(x_0+0)=A.$$

设 $f(x)$在 x_0 的某个左邻域内有定义,若$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $0<x_0-x<\delta$ 时,有

$$|f(x)-B|<\varepsilon,$$

则称 B 为 $f(x)$在点 x_0 的左极限,记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=B \text{ 或 } f(x_0-0)=B.$$

(3)$x\to\infty$时 $f(x)$的极限

给定函数 $f(x)$和常数 A,如果$\forall\varepsilon>0$,$\exists x>0$,当$|x|>X$ 时,都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

2. 函数极限的性质

(1)唯一性

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,则极限值唯一.

(2)局部有界性

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,则函数 $f(x)$在 x_0 的某一去心邻域内有界.

(3)局部保序性

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,若$\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,都有 $f(x)\leqslant g(x)$,则$A\leqslant B$.

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,且 $A>0$(或 $A<0$),则对任何常数 $\eta(0<\eta<A)$(或 $A<\eta<0$),存在 x_0 的某个去心邻域 $U_0(x_0)$,使得$\forall x\in U_0(x_0)$,均有

$$f(x)>\eta>0,(\text{或 } f(x)<\eta<0).$$

(4)函数极限与数列极限的关系

设 $f(x)$在 $U_0(x_0)$上有定义,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是对于 $U_0(x_0)$内的任意一收敛于 x_0 的数列 $x_n(x_n\neq x_0)$,都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

由此得到证明函数在某点没有极限的两个方法:

方法一　如果在空心邻域 $U_0(x_0)$内能够找出一个趋于 x_0 的数列$\{x_n\}$,相应的函数数列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$不存在,那么函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在.

方法二　如果在 $U_0(x_0)$内能够找出两个趋于 x_0 的数列$\{x'_n\}$,$\{x''_n\}$,相应的函数数列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$,$\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n)$存在但不相等,那么函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在.

3. 函数极限的运算法则

(1)四则运算法则

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,则

(a) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

(b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=AB$;

(c) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$,其中 $g(x)\neq 0$,$B\neq 0$.

(2)复合函数求极限的法则

设 $y=g(u)$，$u=f(x)$. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$(在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\neq a$)，且 $\lim\limits_{u\to a}g(u)=A$，则对复合函数 $g[f(x)]$，有

$$\lim_{x\to x_0}g[f(x)]=A.$$

(3)夹逼法则

设 $f(x)$，$g(x)$和 $h(x)$在 x_0 的某个去心邻域 $U_0(x_0)$内有定义，并且满足

$$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x).$$

如果
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A=\lim_{x\to x_0}h(x),$$

那么
$$\lim_{x\to x_0}g(x)=A.$$

(4)单调有界定理

设 $f(x)$在 x_0 的某个左邻域(x_0-h,x_0)上有定义，单调上升(下降)且有上界(下界)，则 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$存在，且

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\sup_{x\in(x_0-h,x_0)}f(x),\ (\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\inf_{x\in(x_0-h,x_0)}f(x)).$$

对于函数 $f(x)$在 x_0 的右极限，$x\to+\infty$的极限，$x\to-\infty$的极限，也有类似的结论.

(5)柯西收敛原理

$f(x)$在 x_0 的某个去心邻域 $U_0(x_0)$内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的充分必要条件是 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x'-x_0|<\delta$ 与 $0<|x''-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

4. 两个重要极限

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

5. 无穷小量和无穷大量

(1)无穷小量的概念

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$($\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$)，那么称当 $x\to x_0$($x\to\infty$)时，$f(x)$是无穷小量.

(2)无穷小量的性质

(a)有限个无穷小量之和仍为无穷小量.

(b)有限个无穷小量之积仍为无穷小量.

(c)有界变量与无穷小量的乘积仍为无穷小量.

(3)等价无穷小

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$，则称当 $x\to x_0$ 时，$\beta(x)$与 $\alpha(x)$为等价无穷小，记作

$$\alpha(x)\sim\beta(x)\ (x\to x_0).$$

在求极限时，作为因子出现的无穷小量可用与其等价的无穷小量代换，这对简化计算具有明显的效果.

(4)无穷大量的概念

$\forall M>0$，$\exists\delta>0$(或 $X>0$)，当 $0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>X$)，都有

$$|f(x)|>M$$

成立,则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时为**无穷大**,记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty(\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty).$$

(5)符号 o 与 O

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$,则记为

$$f(x)=o(g(x))(x\to x_0).$$

如果存在 $\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|\leqslant M$ 成立,则记作

$$f(x)=O(g(x))(x\to x_0).$$

关于 o 和 O 的运算,有下面几条常用的规则:

(1)$o(g(x))\pm o(g(x))=o(g(x))(x\to x_0)$.

(2)$O(g_1(x))\cdot o(g_2(x))=o(g_1(x)\cdot g_2(x))(x\to x_0)$.

三、函数的连续性

1.函数连续性的定义

设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内有定义,如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续,并说 x_0 是 $f(x)$ 的连续点.

设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一个左邻域 $(x_0-\delta,x_0]$ 内有定义,若

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0),$$

则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某一个右邻域 $[x_0,x_0+\delta)$ 内有定义,若

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0),$$

则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

定理 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 既左连续又右连续.

2.间断点的定义与分类

如果 x_0 是 $f(x)$ 的间断点,则必是以下三种情形之一:

(1)$f(x)$ 在点 x_0 无定义;

(2)$f(x)$ 在点 x_0 有定义但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在;

(3)$f(x)$ 在点 x_0 有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,但是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

如果 x_0 为 $f(x)$ 的间断点,且 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限都存在,则称点 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点.

在第一类间断点中,当 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,但不等于该点的函数值时,称点 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点.当 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在时,称点 x_0 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

如果 x_0 为 $f(x)$ 的间断点,且 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 至少有一个不存在,则称点 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

性质 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内的间断点只能是第一类间断点.

3. 连续函数的运算

(1)连续函数的四则运算

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 连续，则

(a) $f(x)\pm g(x)$ 在点 x_0 连续；

(b) $f(x)g(x)$ 在点 x_0 连续；

(c) $\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$ 在点 x_0 连续.

(2)复合函数的连续性

若 $y=f(u)$ 在点 u_0 连续，$u=u(x)$ 在点 x_0 连续，且 $u_0=u(x_0)$，则复合函数 $y=f[u(x)]$ 在点 x_0 连续.

(3)反函数的连续性

若函数 $f(x)$ 在区间 I_x 上严格单调增加(或减少)且连续，则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在区间 $I_y=\{y\,|\,y=f(x),x\in I_x\}$ 上也严格单调增加(或减少)且连续.

4. 基本初等函数的连续性

一切基本初等函数在其定义域内是连续的.

5. 闭区间上连续函数的性质

(1)零点定理

设函数 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么 $\exists\,\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)=0.$$

(2)介值定理

设函数 $f(x)\in C[a,b]$，值 η 介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间，则 $\exists\,\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\eta.$$

(3)有界性定理

设 $f(x)\in C[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

(4)最大值最小值定理

设 $f(x)\in C[a,b]$，则 $\exists\,\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\sup_{x\in[a,b]}f(x);$$

并且 $\exists\,\eta\in[a,b]$，使得

$$f(\eta)=\inf_{x\in[a,b]}f(x).$$

(5)一致连续性

设 $f(x)$ 在区间 I 定义，$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0$，当 $|x_1-x_2|<\delta$，$x_1,x_2\in I$ 时，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 I 上一致连续.

一致连续性定理　如果函数 $f(x)\in C[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

综合举例

一、极限

例 1 根据定义证明下列各式：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=\infty(|q|>1)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-1}=1$.

解 (1) $\forall M>1$，解不等式

$$|q^n|=|q|^n>M,$$

得 $n>\dfrac{\ln M}{\ln|q|}$. 取 $N=\left[\dfrac{\ln M}{\ln|q|}\right]$，则当 $n>N$ 时，有

$$|q^n|>M,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=\infty$.

(2) 考察

$$\left|\frac{1}{x-1}-1\right|=\left|\frac{x-2}{x-1}\right|,$$

为了使 $\dfrac{1}{|x-1|}$ 有界，我们限制：$|x-2|<\dfrac{1}{2}$，于是

$$|x-1|=|1+x-2|\geqslant 1-|x-2|\geqslant\frac{1}{2},$$

所以

$$\left|\frac{1}{x-1}-1\right|=\left|\frac{x-2}{x-1}\right|<2|x-2|.$$

因此，$\forall \varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{1}{x-1}-1\right|<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-1}=1$.

例 2 求下列数列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n-1}{n^2+n+1}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{2n^2+1}$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)^n(a>0,b>0)$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n(a>0,b>0)$；　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}+\cdots+\dfrac{n}{a^n}\right)(a>1)$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n-1}{n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=3.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=0$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{2n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2}\cdot\dfrac{1}{2n^2+1}=\dfrac{1}{4}$.

(4)若 $b=1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)^n=1$.

若 $b\neq1$，设 $y_n=\left(1+\dfrac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)^n$，则

$$\lim_{n\to\infty}\ln y_n=\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)=\lim_{n\to\infty}n\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\frac{\frac{1}{n}\ln b}{a}=\frac{1}{a}\ln b=\ln b^{\frac{1}{a}},$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)^n=b^{\frac{1}{a}}.$$

(5)因为

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right]=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\ln\sqrt{ab}.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)^{\frac{1}{\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1}\cdot n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)}=e^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$.

对求极限问题，首先应根据已掌握的极限概念和已知结论，初步判断所求极限的状态.在本题中，根据 $\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\to1$，则可判断出所求极限为 1^∞ 型. 然后考虑利用标准型 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$，向这一目标构造标准型.

(6)令 $s_n=\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}+\cdots+\dfrac{n}{a^n}$，则

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)s_n=s_n-\frac{1}{a}s_n=\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{1}{a^n}-\frac{n}{a^{n+1}}=\frac{a^{-1}(1-a^{-n})}{1-a^{-1}}-\frac{n}{a^{n+1}}.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\dfrac{a^{-1}}{(1-a^{-1})^2}$.

因加法的极限运算法则只能应用在有限项之和，而现在不是有限项之和，所以不能直接应用加法的极限运算法则，需要先将无限项的和加以合并.

例3 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan(x-\sqrt{x}\cdot\cos x)$；　　(6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}(m,n\in\mathbf{N})$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$；