高中数学复習

（三角部分）

第三分册

（初　稿）

天津市十六中学数学教研組沈希詠編

高等教育出版社

高 中 数 学 复 習

（三角部分）

第三分册

（初稿）

天津市十六中学数学教研組沈希詠編

高等教育出版社出版北京宣武門內承恩寺7号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

京华印書局印刷　新华書店發行

統一書号13010·580　開本850×1168 1/32　印張1 4/16

字數34,000　印數9,001—29,000定價(6)¥0.14

1959年2月第1版　1959年4月北京第2次印刷

第三分册　目录

第四章　三角方程

§15. 三角方程　含有未知数的三角函数的方程叫做三角方程，例如

$$3\sin^2 x-\cos x+1=0$$

$$\operatorname{tg} x-3=0$$

等都是三角方程。解三角方程就是求出未知数的一切能适合于方程的值或者証明这个方程无解。解三角方程和解代数方程相类似，而且代数方程的解法都适用于三角方程；就是关于方程的同解性，增根和遺根产生的原因等也完全是一样的。下面我們把几种不同类型的三角方程的解法分别来研究。

§16. 最簡單的三角方程　形如 $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg} x=a$, $\operatorname{ctg} x=a$ 都叫最簡單的三角方程或最基本的三角方程。以后解任何方程都将归結为解这几个基本方程。所以最簡單的三角方程是解任何三角方程的基础。这样的方程有无数个解，可以先求出 0 到 2π 間的解然后再求一般解。我們分别討論如下：

1°　$\sin x=a$。在这个方程里当 $|a|>1$ 时沒有解，当 $|a|\leq 1$ 时，在 0 到 2π 間的解是 $x=\arcsin a$ 和 $x=\pi-\arcsin a$，而一般解就是 $x_1=2n\pi+\arcsin a$ 和 $x_2=2n\pi+\pi-\arcsin a=(2n+1)\pi-\arcsin a$（在这里和以后的例題中 n 都表示整数）。

2°　$\cos x=a$。在这个方程里当 $|a|>1$ 时沒有解；当 $|a|\leq 1$ 时，在 0 与 2π 間的解是 $x=\arccos a$ 和 $x=-\arccos a$，而一般解是 $x=2n\pi\pm\arccos a$。

3°　$\operatorname{tg} x=a$。在这个方程里 a 为任何实数时都有解，它的一般解是 $x=n\pi+\operatorname{arc\,tg} a$。

4°　$\operatorname{ctg} x=a$。在这个方程里 a 为任何实数时都有解，它的一

般解是 $x=n\pi+\text{arc ctg}\,a$。

例 1. 解方程 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

解: 因为 $\text{arc sin}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$,所以方程的解是:

$$x_1=2n\pi+\frac{\pi}{3},\quad x_2=(2n+1)\pi-\frac{\pi}{3} \text{ 或 } x_2=2n\pi+\frac{2\pi}{3}.$$

2. 解方程 $\cos x=-\frac{1}{2}$.

解: 因为 $\text{arc cos}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$, 所以方程的解是:

$$x_1=2n\pi+\frac{2\pi}{3},\quad x_2=2n\pi-\frac{2\pi}{3}.$$

3. 解方程 $\text{tg}\,x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解: 因为 $\text{arc tg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$, 所以方程的解是:

$$x=n\pi+\frac{\pi}{6}.$$

4. 解方程 $\text{ctg}\,x+1=0$.

解: 由方程得: $\text{ctg}\,x=-1$,

因为 $\text{arc ctg}(-1)=\frac{3\pi}{4}$。所以方程的解是:

$$x=n\pi+\frac{3\pi}{4}.$$

5. 解方程 $\sin 2x=1$.

解: 因为 $\text{arc sin}\,1=\frac{\pi}{2}$, 所以得到

$$2x_1=2n\pi+\frac{\pi}{2} \text{ 和 } 2x_2=2n\pi+\pi-\frac{\pi}{2},$$

于是得出方程的解就是:

$$x_1=n\pi+\frac{\pi}{4},\quad x_2=n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

6. 解方程 $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

解: 因为 $\text{arc cos}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, 所以

$$x+\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3},$$

于是得出方程的解是:

$$x_1=2n\pi+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=2n\pi+\frac{\pi}{12},$$

$$x_2=2n\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=2n\pi-\frac{7\pi}{12}.$$

7. 解方程 $\operatorname{tg}\frac{x}{3}=-1$.

解：因为 $\operatorname{arc}\ \operatorname{tg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$，所以

$$\frac{x}{3}=n\pi+\left(-\frac{\pi}{4}\right)=n\pi-\frac{\pi}{4},$$

于是得出方程的解是：

$$x=3\left(n\pi-\frac{\pi}{4}\right).$$

8. 解方程 $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解：
$$\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

因为 $\operatorname{arc}\sin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$，所以得出

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=2n\pi+\left(-\frac{\pi}{4}\right) \text{ 和 } \frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=(2n+1)\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right),$$

于是得出方程的解是：

$$x_1=2\left(2n\pi-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=2\left(2n\pi+\frac{\pi}{12}\right)=4n\pi+\frac{\pi}{6},$$

$$x_2=2\left[(2n+1)\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right]=2\left[(2n+1)\pi+\frac{7\pi}{12}\right]=2(2n+1)\pi+\frac{7\pi}{6}.$$

§17. 含有同一未知数的同一个三角函数的三角方程 要解这样的方程，我們首先可以用代数方法把这个三角方程化成最簡單的三角方程。然后再用上面所說的方法来解得出来的这个最簡單的三角方程，这样，就能得出原方程的解了。

例 1. $2\sin x-\sqrt{2}=0$.

解：将方程化成

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

的形状；因为 $\operatorname{arc}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$，所以得原方程的解是：

$$x_1=2n\pi+\frac{\pi}{4},$$

$$x_2=(2n+1)\pi-\frac{\pi}{4}.$$

2. $3\operatorname{tg}3x-\sqrt{3}=0$.

解：将方程化成
$$\operatorname{tg}3x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

的形状，因为 $\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$，所以得出

$$3x=n\pi+\frac{\pi}{6},$$

于是方程的解是:
$$x=\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{18}.$$

3. $2\cos^2 x-3\cos x-2=0$.

解: 設 $\cos x=y$, 代入方程則得

$$2y^2-3y-2=0,$$

分解因式得
$$(y-2)(2y+1)=0.$$

若 $y-2=0$, 則 $y=2$, 得出

$$\cos x=2,$$

因为余弦函数的值不能大于 1, 因此, $\cos x=2$ 没有意义。

若 $2y+1=0$, 則 $y=-\frac{1}{2}$, 这时我們得出

$$\cos x=-\frac{1}{2},$$

于是得出方程的解是
$$x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}.$$

§18. 含有同一未知数的几种不同三角函数的三角方程

对于这种三角方程，我們可以把这些不同的三角函数用同角的同一函数来表示，使变成含有同一未知数的同一个三角函数的方程，这样，我們就可用上面所說的方法来解了。

例 1. $2\cos^2 x+3\sin x=0$.

解: 我們将方程里的 $\cos x$ 化成 $\sin x$, 由 $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ 得

$$2(1-\sin^2 x)+3\sin x=0,$$

整理以后得
$$2\sin^2 x-3\sin x-2=0,$$

分解因式
$$(2\sin x+1)(\sin x-2)=0.$$

这里若 $2\sin x+1=0$, 則 $\sin x=-\frac{1}{2}$,

于是得出方程的解是:
$$x_1=2n\pi-\frac{\pi}{6},$$

$$x_2=(2n+1)\pi+\frac{\pi}{6}.$$

若 $\sin x-2=0$ 則 $\sin x=2$,

因为 $\sin x=2$ 不可能, 所以这时方程没有解。

2. $2\sin^2 x+3\cos 2x+4\sin x=0$.

解: 由 $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ 得

$$2\sin^2 x+3(1-2\sin^2 x)+4\sin x=0,$$

整理以后得
$$4\sin^2 x-4\sin x-3=0,$$

分解因式: $$(2\sin x-3)(2\sin x+1)=0.$$

若 $2\sin x-3=0$, 則 $\sin x=\frac{3}{2}$, 这时方程无解.

若 $2\sin x+1=0$, 則 $\sin x=-\frac{1}{2}$,

于是得出方程的解: $$x_1=2n\pi-\frac{\pi}{6},$$

$$x_2=(2n+1)\pi+\frac{\pi}{6}.$$

3. $\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{tg}^2 x=2$.

解: 由 $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$得

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}+\operatorname{tg}^2 x=2,$$

即 $$\operatorname{tg}^4 x-2\operatorname{tg}^2 x+1=0,$$

分解因式: $$(\operatorname{tg}^2 x-1)^2=0.$$

若 $\operatorname{tg}^2 x-1=0$, 則 $\operatorname{tg} x=\pm 1$, 于是

$$\operatorname{tg} x=1\text{ 时}\quad x_1=n\pi+\frac{\pi}{4},$$

$$\operatorname{tg} x=-1\text{ 时}\quad x_2=n\pi-\frac{\pi}{4}.$$

4. $\sin x=\cos x$.

解: 解法一 两端各自平方,得

$$\sin^2 x=\cos^2 x.$$

用 $1-\sin^2 x$ 代替 $\cos^2 x$ 得

$$\sin^2 x=1-\sin^2 x, \text{即} \sin^2 x=\frac{1}{2}, \text{ 得出}$$

$$\sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

取 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,得出

$$x_1=2n\pi+\frac{\pi}{4},$$

$$x_2=(2n+1)\pi-\frac{\pi}{4};$$

取 $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,得出

$$x_3=2n\pi-\frac{\pi}{4},$$

$$x_4=(2n+1)\pi+\frac{\pi}{4}.$$

我們可以檢驗得知 x_2 及 x_3 是增根,所以这个方程的根是

$$x_1=2n\pi+\frac{\pi}{4},\ \ x_2=(2n+1)\pi+\frac{\pi}{4}.$$

解法二 因为 $\cos x=0$ 的解不是这个方程的解，所以可以用 $\cos x$ 来除方程的两端，得:

$$\frac{\sin x}{\cos x}=1,$$

即 $$\operatorname{tg} x=1,$$

所以这个方程的解是: $$x=n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

5. $\operatorname{ctg}(270^\circ-x)=3\operatorname{ctg} x.$

解: 由 $\operatorname{ctg}(270^\circ-x)=\operatorname{tg} x$ 和 $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$ 得

$$\operatorname{tg} x=\frac{3}{\operatorname{tg} x},\ \text{即}\ \operatorname{tg}^2 x=3,\ \text{得出}$$

$$\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{3}.$$

取 $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$，得 $$x_1=n\pi+\frac{\pi}{3},$$

取 $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$，得 $$x_2=n\pi-\frac{\pi}{3}.$$

x_1 和 x_2 都不能使 $\operatorname{tg} x=0$，所以它們都是原方程的解。

6. $\frac{\sin x}{1-\cos x}=0.$

解: 解法一 方程两端各乘以 $1-\cos x$，得

$$\sin x=0,$$

于是 $$x_1=2n\pi,\quad x_2=2n\pi+\pi.$$

因为 $x_1=2n\pi$，使分母 $1-\cos x=0$，所以这个根是增根，因而这方程的解是

$$x=(2n+1)\pi.$$

解法二 由 $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ 及 $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$，得

$$\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=0.$$

$$\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=0\ \ \text{即}\ \ \operatorname{ctg}\frac{x}{2}=0,$$

由此得出 $$\frac{x}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2},\quad x=2n\pi+\pi.$$

7. $\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}.$

解: 两端各除以 2，得

$$\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

我們将$\frac{1}{2}$看成是$\cos\frac{\pi}{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$看成是$\sin\frac{\pi}{3}$，由此得到

$$\cos\frac{\pi}{3}\sin x-\sin\frac{\pi}{3}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

即

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

由此得出

$$x-\frac{\pi}{3}=2n\pi\pm\frac{\pi}{4},$$

取

$$x_1-\frac{\pi}{3}=2n\pi+\frac{\pi}{4}\quad 得\quad x_1=2n\pi+\frac{7\pi}{12},$$

取

$$x_2-\frac{\pi}{3}=2n\pi-\frac{\pi}{4},\quad x_2=2n\pi+\frac{\pi}{12},$$

§19. 能化为一边为零而另一边能分解因式的三角方程 对于有些三角方程我們可以把它的各項移到方程的一边，然后将这一边进行因式分解再依次使各因式等于零而得到原方程的解。

例 1. 解方程 $2\cos^2 x+3=7\cos x$.

解：将右边的 $7\cos x$ 移至左边：

$$2\cos^2 x-7\cos x+3=0,$$

分解因式：

$$(2\cos x-1)(\cos x-3)=0.$$

讓 $2\cos x-1=0$，得 $\cos x=\frac{1}{2}$，所以

$$x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

讓 $\cos x-3=0$, 得 $\cos x=3$, 这时方程无解。

2. $\sin 2x+\sin x+2\cos x+1=0$.

解：先将二倍角的 $\sin 2x$ 化成 $2\sin x\cos x$, 得

$$2\sin x\cos x+\sin x+2\cos x+1=0,$$

分解因式：

$$(\sin x+1)(2\cos x+1)=0.$$

讓 $\sin x+1=0$，得 $\sin x=-1$, 由此将

$$x_1=2n\pi-\frac{\pi}{2},$$

$$x_2=2n\pi+\pi+\frac{\pi}{2};$$

讓 $2\cos x+1=0$，得 $\cos x=-\frac{1}{2}$，由此得

$$x_3=2n\pi+\frac{2\pi}{3},$$

$$x_4=2n\pi-\frac{2\pi}{3}.$$

3. $\sin 2x=\cos x$.

解：先将二倍角的 $\sin 2x$ 化成 $2\sin x\cos x$，得

$$2\sin x\cos x=\cos x,$$

将左边移项至右边　　$$2\sin x\cos x-\cos x=0,$$

提取公因子：　　$$\cos x(2\sin x-1)=0.$$

讓 $\cos x=0$，则得　　$$x_1=2n\pi+\frac{\pi}{2},$$

$$x_2=2n\pi-\frac{\pi}{2}.$$

讓 $2\sin x-1=0$，得 $\sin x=\frac{1}{2}$，由此得

$$x_3=2n\pi+\frac{\pi}{6},$$

$$x_4=(2n+1)\pi-\frac{\pi}{6}.$$

4. $\cos x-\cos 2x\cos x+\sin 2x=0.$

解：由二倍角公式得

$$\cos x-(1-2\sin^2 x)\cos x+2\sin x\cos x=0,$$

展开括号，得

$$\cos x-\cos x+2\sin^2 x\cos x+2\sin x\cos x=0,$$

将 $\cos x$ 项消去后分解因式，得

$$2\sin x\cos x(\sin x+1)=0.$$

由 $\sin x=0$，得　　$$x_1=n\pi.$$

由 $\cos x=0$，得　　$$x_2=n\pi+\frac{\pi}{2}.$$

由 $\sin x+1=0$ 即 $\sin x=-1$，得

$$x_3=2n\pi-\frac{\pi}{2}.$$

5. $\cos 2x-\cos 4x=\sin x.$

解：用倍角公式先将余弦函数都化成正弦函数：

$$2\sin 3x\sin x=\sin x$$

移项，得　　$$2\sin 3x\sin x-\sin x=0$$

分解因式：　　$$\sin x(2\sin 3x-1)=0.$$

由 $\sin x=0$，得　　$$x=n\pi.$$

由 $2\sin 3x-1=0$，即 $\sin 3x=\frac{1}{2}$，

$$3x_1=2n\pi+\frac{\pi}{6},$$

$$3x_2=2n\pi+\frac{5\pi}{6}.$$

由此得出　　$$x_1=\frac{1}{3}\left(2n\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{18},$$

$$x_2=\frac{1}{3}\left(2n\pi+\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{2n\pi}{3}+\frac{5\pi}{18}.$$

§20. $\sin x$ 和 $\cos x$ 的齐次方程 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的齐次方程可以先化为含 $\operatorname{tg} x$ 的方程，求出 $\operatorname{tg} x$ 的值，然后再求 x。

例 1. 解方程 $2\sin^2x-7\sin x\cos x+6\cos^2x=0$

解：因为 $\cos^2x=0$ 不是这个方程的解，所以可以用 $\cos x$ 来除方程的两边，得：

$$2\operatorname{tg}^2x-7\operatorname{tg} x+6=0,$$

将这个方程分解成：

$$(2\operatorname{tg} x+3)(\operatorname{tg} x-2)=0.$$

由 $2\operatorname{tg} x-3=0$，得 $\operatorname{tg} x=\frac{3}{2}$，由此

$$x_1=n\pi+\operatorname{arctg}\frac{3}{2}.$$

由 $\operatorname{tg} x-2=0$，得 $\operatorname{tg} x=2$，由此

$$x_2=n\pi+\operatorname{arc\,tg} 2.$$

2. $a\sin x+b\cos x=0.$

解：因为 $\cos x=0$ 不是这个方程的解，所以可以用 $\cos x$ 来除方程的两边，得·

$$a\operatorname{tg} x+b=0,$$

由此得出
$$\operatorname{tg} x=-\frac{b}{a},$$

所以
$$x=n\pi+\operatorname{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right).$$

3. $5\sin^2x+7\sin x\cos x+4\cos^2x=1.$

解：为了把方程变成正弦和余弦的齐次式，所以必须消去常数，我們由 $1=\sin^2x+\cos^2x$，得

$$5\sin^2x+7\sin x\cos x+4\cos^2x=\sin^2x+\cos^2x,$$

化简后，即
$$4\sin^2x+7\sin x\cos x+3\cos^2x=0.$$

可以用 $\cos^2x$ 来除方程的两边，得

$$4\operatorname{tg}^2x+7\operatorname{tg} x+3=0,$$

分解因式：
$$(4\operatorname{tg} x+3)(\operatorname{tg} x+1)=0.$$

由 $4\operatorname{tg} x+3=0$，得 $\operatorname{tg} x=-\frac{3}{4}$，由此

$$x_1=n\pi+\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right).$$

由 $\operatorname{tg} x+1=0$，得 $\operatorname{tg} x=-1$，由此

$$x_2=n\pi+\operatorname{arc\,tg}(-1).$$

由查表可知
$$x_1=n\pi-36°52';\quad x_2=n\pi-45°.$$

4.
$$a\sin x=b\cos^2\frac{x}{2}.\quad (a\neq 0)$$

解：这个方程我們可以化为 $\sin\frac{x}{2}$ 和 $\cos\frac{x}{2}$ 的齐次式，由 $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ 得

$$2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-b\cos^2\frac{x}{2}=0,$$

分解因式：
$$\cos\frac{x}{2}\left(2a\sin\frac{x}{2}-b\cos\frac{x}{2}\right)=0.$$

由 $\cos\frac{x}{2}=0$，立即得出

$$\frac{x_1}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}, \text{即 } x_1=2n\pi+\pi.$$

現在我們来解 $2a\sin\frac{x}{2}-b\cos\frac{x}{2}=0$，

因 $\cos\frac{x}{2}$ 来除方程的两边，得

$$2a\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}-b=0, \text{即 } \mathrm{tg}\frac{x}{2}=\frac{b}{2a}, \text{ 由此得出}$$

$$\frac{x_2}{2}=n\pi+\mathrm{arc\,tg}\frac{b}{2a}, \quad x_2=2n\pi+2\mathrm{arc\,tg}\frac{b}{2a}.$$

解同一个三角方程往往有几种不同的方法，由于所用的方法不同，因而解的过程繁簡也就不一样，并且所得解的形式也有所不同。至于用那一种方法能使解的过程更簡單些还是沒有一般法則的，但是若能多加思考，多多实踐还是能想出比較簡單的方法的。例如：解方程 $2\cos 2x=1$ 可以用如下三种方法来解：

解法一　直接求出 $\cos 2x$ 的值来求 x 的值：

即
$$\cos 2x=\frac{1}{2},\ 2x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3},\quad x=n\pi\pm\frac{\pi}{6}.$$

解法二　先将倍角函数化簡，来求 x 的值：

$$2(2\cos^2 x-1)=1,$$

即
$$\cos^2 x=\frac{3}{4},$$

两边开平方：
$$\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

最后得出与上不全同的結果：

$$x_1=2n\pi\pm\frac{\pi}{6},$$

$$x_2=2n\pi\pm\frac{5\pi}{6}.$$

解法三　这种解法其实与第二种解差不多，只不过用正弦求 x 就是了，但得出的結果却不全相同，即由原方程得出

$$2(1-2\sin^2 x)=1,$$

由此得出
$$\sin^2 x=\frac{1}{4},$$

开平方得
$$\sin x=\pm\frac{1}{2},$$

最后得出
$$x_1=2n\pi+\frac{\pi}{6}\qquad x_2=(2n+1)\pi-\frac{\pi}{6}.$$
$$x_3=2n\pi-\frac{\pi}{6}\qquad x_4=(2n+1)\pi+\frac{\pi}{6}.$$

由以上三种不同的方法可以看出解法一的过程是比較簡單。所得答案的形式亦各自不同但是仍然是統一的。

§21. 增根和遺根問題　在解方程的时候往往产生增根或遺根的情形。产生的原因和解代数方程相类似，总括起来产生增根或遺根的可能性不外由于以下几种原因：

一、产生增根的原因：

1. 方程的两边乘以含有未知数的因式；

2. 方程的两边經过偶次乘方；

3. 經过恒等变换扩大了未知数允許值的范圍。

二、产生遺根的原因：

1、方程的两边除以含未知数的因式；

2. 方程的两边施行了开平方的运算；

3. 經过恒等变换，縮小了未知数的允許值的范圍。

当解三角方程时若遇到有产生增根的可能性的时候，解出根后必須进行驗算，然后把增根除去。若遇到有产生遺根的可能性的时候，就必須設法将丢的根补足。

例 1. 解方程 $\sin x-\cos x=1$.

解：将 $\cos x$ 移至右边：

$$\sin x=1+\cos x,$$

两边分别平方，得

$$\sin^2 x=1+2\cos x+\cos^2 x,$$

$$\cos^2 x+\cos x=0,$$

$$\cos x(\cos x+1)=0.$$

由 $\cos x=0$, 得 $\quad x_1=2n\pi+\frac{\pi}{2},\quad x_2=2n\pi-\frac{\pi}{2}.$

由 $\cos x+1=0$, 得

$$x_3=2n\pi+\pi,\quad x_4=2n\pi-\pi.$$

验算：把 x_1 代入原方程，得

$$\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1-0=1,$$

把 x_2 代入原方程，得

$$\sin\left(2n\pi-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(2n\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-1-0=-1\neq 1.$$

把 x_3 代入原方程，得

$$\sin(2n\pi+\pi)-\cos(2n\pi+\pi)=0-(-1)=1.$$

把 x_4 代入原方程，得

$$\sin(2n\pi-\pi)-\cos(2n\pi-\pi)=0-(-1)=1.$$

所以 x_2 是方程的增根。

2. $\sin^2 x=\cos^2 x$.

解：如果两边开方后，只取方程 $\sin x=\cos x$, 则得 $x_1=n\pi+\frac{\pi}{4}$, 这样就会失去另一个根：$x_2=n\pi-\frac{\pi}{4}$。

3. $\sin x+\operatorname{tg} x+\sec x-\cos x=0$.

解：$\sin x+\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{1}{\cos x}-\cos x=0,$

两边分别乘以 $\cos x$, 得

$$\sin x\cos x+\sin x+1-\cos^2 x=0,$$

$$\sin x(\cos x+1+\sin x)=0,$$

由 $\quad \sin x=0$, 得 $x_1=n\pi$;

现在来看 $\quad \cos x+\sin x+1=0.$

将常数项移至右边：$\quad \cos x+\sin x=-1,$

两端各除以 $\sqrt{2}$, 得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

由余弦的差角公式，得

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

由此得出 $$x-\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\frac{3\pi}{4},$$

最后得 $$x_2=(2n+1)\pi,$$

$$x_3=2n\pi-\frac{\pi}{2}.$$

通过驗算知道，x_3 对原来方程来說是沒有意义的，它是由于方程两边分别乘以 $\cos x$ 而产生的增根。

4. $\sec x-\cos x=\sin x.$

解：将原方程化成

$$\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}=\sin x,$$

将 $1-\cos^2 x$ 换成 $\sin^2 x$:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x}=\sin x,$$

再将这个式子化成 $$\sin x\operatorname{tg} x-\sin x=0,$$

提取因子: $$\sin x(\operatorname{tg} x-1)=0,$$

取 $\sin x=0$，得 $x_1=n\pi.$

取 $\operatorname{tg} x-1=0$，即 $\operatorname{tg} x=1$，得

$$x_2=n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

注意，如果在方程 $\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}=\sin x$ 的两边各除以 $\sin x$，那末，就会失去方程 $\sin x=0$ 的根 x_1。这一点在解方程的时候要特别注意。

5. $\sin 2x\sec x=0.$

解：由 $\sin 2x=0$，得 $2x=n\pi$，$x=\dfrac{n\pi}{2}$，

而 $\sec x=0$ 没有意义。

我們通过驗算可以知道，当 n 为奇数的时候 $x=\dfrac{n\pi}{2}$ 不是原方程的根，是增根。原方程的解是 $x=n\pi$。增根产生的原因是因为原方程 $\sin 2x\sec x=0$ 和方程組 $\begin{cases}\sin 2x=0\\ \sec x=0\end{cases}$ 不同解，它的未知数的允許值的范圍扩大了。

6. $$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\operatorname{ctg} x. \qquad (1)$$

解：由正切的和、差角公式展开括号:

$$\frac{\operatorname{tg} x+1}{1-\operatorname{tg} x}+\frac{\operatorname{tg} x-1}{1+\operatorname{tg} x}=\frac{2}{\operatorname{tg} x}, \qquad (2)$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x+1+2\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^2 x-1}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\frac{2}{\operatorname{tg} x},$$

化簡后得
$$\frac{4\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\frac{2}{\operatorname{tg} x}.$$

两边同乘以 $\operatorname{tg} x(1-\operatorname{tg}^2 x)$，整理后得

$$\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{3},$$

两边开平方，得
$$\operatorname{tg} x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3},$$

最后得
$$x=n\pi\pm\frac{\pi}{6}.$$

由(1)到(2)的时候未知数的允許值的范圍起了变化。因为如果 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ 是原方程的根的話，經过由(1)到(2)的变化就失掉了。所以我們必須把 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$。代入原方程試試，如果是它的根就把它补进去。因此，原方程的根是

$$x_1=n\pi\pm\frac{\pi}{6} \text{ 和 } x_2=n\pi+\frac{\pi}{2}.$$

由上面的几个例題可以知道，如果我們应用 $\operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$; $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$; $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$; $\cos 2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$; $\sin 2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ 等公式的时候，往往会扩大或縮小未知数允許值的范圍，从而产生增根或遺根。关于这一点我們应該加以注意的。

習　題

解下列各方程:

1. $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;　　2. $2\cos(3x-15^\circ)+1=0$;

3. $3\operatorname{tg}\frac{x+20^\circ}{3}=\sqrt{3}$;　　4. $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4}+30^\circ\right)+1=0$;

5. $2\sin^2 x=1$;　　6. $4\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=3$;

7. $\operatorname{tg}^2 2x=1$;　　8. $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$;

9. $\frac{3}{\sin x}-\frac{6}{1-\sin x}+\frac{\sin x+5}{\sin x(1-\sin x)}=0$;

10. $\sin^2 x-\cos^2 x=\cos x$;

11. $3\operatorname{tg}(90^\circ+x)+\operatorname{tg} x=2$;