贾长虹 叶留青 范开元 编著

初等数学选讲

chudeng shuxue xuanjiang

西安地图出版社

初等数学选讲

贾长虹　叶留青　范开元　编著

西安地图出版社

图书在版编目(CIP)数据

初等数学选讲/贾长虹,叶留青,范开元编著.—西安:西安地图出版社,2006.2

ISBN 7-80670-919-3

Ⅰ.初… Ⅱ.①贾…②叶…③范… Ⅲ.初等数学 Ⅳ.012

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 016262 号

初等数学选讲

贾长虹 叶留青 范开元 编著

西安地图出版社出版发行

(西安市友谊东路 334 号 邮政编码:710054)

新华书店经销 黄委会设计院印刷厂印刷

890 毫米×1240 毫米 1/32 开本 11.625 印张 335 千字

2006 年 2 月第 1 版 2006 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-80670-919-3/O·20

定价:22.00 元

前　言

数学专业师范生从教素质的培养和中学数学教师职后教育是一个长期的系统工程。多年来，我们承担着为基础教育培养和培训合格的数学师资的双重任务，在这过程中，我们按照学校提出的“厚基础，宽口径，高素质，全技能”的办学指导思想，进行了“中学数学教师职前职后教育一体化试验研究”（全国教育科学“十五”规划课题子课题[FIB030837]），本书正是在此试验研究的实践过程中孕育而生的。

本书是专门为高等师范院校数学教育专业和中学数学教师继续教育而编写的，具有较强的针对性和实用性，分上篇和下篇。上篇为竞赛数学，主要介绍了数学竞赛活动、整数的基本知识、代数式的恒等变形、方程、同余式与不定方程、高斯函数、数的进位制、面积与面积法、抽屉原理、逻辑推理、枚举归纳与猜想、类比与联想、分类讨论、覆盖问题、极端原理与从反面思考等问题；下篇为基本图形分析法，研究了平行线、等腰三角形、直角三角形斜边上的中线、全等三角形、相似三角形、圆、圆和圆的组合图形、特殊三角形等平面几何图形的基本性质，这些知识都是作为一个合格中学数学教师应具有的基本数学素养。我们在多年的教育教学实践中，对该课程讲义进行了多次修改与补充，通过讲授，力求培养学生（员）扎实的数学基本功底，为他们从事中学数学教育奠定牢固的基础。本书也可作为中学数学教师开展数学课外活动的参考教材以及中学生进行探究性学习的数学资料。

本书在编写过程中曾得到郑州大学数学系教授、博士导师、河南省数学会理事长陈绍春先生的审阅和指导，河南教育学院数学系主任、教授齐建华女士对本书的最后定稿提出了许多宝贵意见，在此表示深切谢意！

限于编者学识水平，本书错误之处在所难免，恳请读者在使用过程中予以指正。

编者

2005 年 10 月

目　　录

上篇　竞赛数学

下篇　基本图形分析法

上　篇

竞赛数学

数学是一种精神，一种理性的精神。正是这种精神，激发、促进、鼓舞并驱使人类的思想得以用到最完善的程度，亦正是这种精神，试图决定性地影响人类的物质、道德和社会生活；试图回答有关人类自身生存提出的问题；努力去理解和控制自然；尽力去探求、确立、确定已经获得知识的、最深刻的和最完美的内涵。

——M·克莱因(Morris，Kline)

一门科学只有在成功地运用数学时，才算达到真正完善的地步。

——马克思

数学中优美的公式，犹如但丁神曲中的诗句，仿佛普朗克的钢琴协奏曲.

——周义澄

数学是这样一种东西：她提醒你有无形的灵魂，她赋予她所发现的真理以生命；她唤起心神，澄净智慧；她给我们内心思想添辉；她涤尽我们有生以来的蒙昧与无知.

哪里有数学，哪里就有美.

——普络克拉斯(Proclus，古希腊哲学家)

第一讲 数学竞赛活动

一、数学竞赛的产生

数学活动与数学解题紧密相关,掌握数学的一个标志就是善于解题.在解题活动中有意识或无意识的竞争则由来已久.古代希腊就有解答几何难题比赛的悠久历史记载,16 世纪在意大利有关于塔塔利亚与他人比赛解三次方程的激烈竞争,18 世纪,法国曾进行过独立的数学比赛,所有这些,都只具有局部性且限于成人间进行.专门以中学生为对象的数学竞赛却是现代的时尚,现代意义上的中学生数学竞赛起源于匈牙利.

1894 年,匈牙利数学物理协会通过了在全国举办中学数学竞赛的决议,首开中学数学竞赛活动之先河.自 1894 年起,每年 10 月举办一届,每届 3 道题,限 4 小时完成,试题常以高等数学为背景,解法却完全是初等方法.匈牙利的数学竞赛活动造就了一大批与其国土面积及人口比例都不相称的数学大师.

在匈牙利数学竞赛造就的大师们纷纷登台的时候,欧洲和其他国家才睁开了惊奇的目光,产生出极大的兴趣,争相效仿,此时已比匈牙利人至少晚了三四十年.

1934 年,苏联在列宁格勒大学举办了中学数学奥林匹克,首先把数学考试与公元前 776 年古希腊的奥林匹克体育活动联系起来;1935 年又由莫斯科大学主办了中学数学奥林匹克,以后逐年进行.

1949 年,保加利亚举办;

1950 年,波兰举办;

1951 年,捷克斯洛伐克举办;

1956 年,中国举办了中学生数学竞赛;

以后,各国相继举办了中学生数学竞赛.情况表明,20 世纪 50 年

代以来，世界上出现了一股举办中学数学竞赛的热潮，为国际数学奥林匹克(IMO)的诞生奠定了基础.

第一届 IMO 于 1959 年 7 月在罗马尼亚的古都布拉索拉开帷幕.这是数学竞赛跨越国界的创举.但从第一届到第五届参赛国仅限于东欧地区的几个国家，这只能是地区性而没有多少国际性.只是到 60 年代后期才逐步扩大，特别是在 1985 年中国步入 IMO 之后，参加国增加得更快，这时才能称得上真正的国际数学竞赛.到 1990 年中国成功举办第 31 届 IMO 时，已发展到 54 个国家或地区，以后逐年发展，1995 年已有 73 个国家 412 人参赛.

如今，虽然还不是世界上每一个国家每一届都参加，但由于大多数经济、文化发达国家都置身其列，因而 IMO 已成为世界上最有影响的学科竞赛，也是公认水平最高的中学数学竞赛.

二、IMO 简介

经过四十年的发展，国际中学数学竞赛虽然还未正式通过一份章程，但是已有了一整套的约定俗成的运转常规，为历届东道国所遵循.

1. 目的：(1)激励培养数学人才；

　　(2)促进各国数学教育交流与发展.

2. 时间：每年一届，定于 7 月举行.

3. 主办：由参赛国轮流主办，经费由东道国提供；各国争相主办.

4. 对象：每队由 6 名中学生组成，另派 2 名数学家任领队.

5. 试题：由各参赛国提供，经东道国精选后，提交主试委员会表决，产生 6 道试题，东道国不提供试题.试题确定之后，写成英、法、德、俄四种工作语言，由各国领队译成本国文字.

6. 考试：分两天进行，每天连续进行 4.5 小时，考 3 题；同一国家 6 名选手分配到 6 个考场、独立答题，考试中不准使用参考书和计算器.

答卷由本国领队评判，然后与组织者指定的协调员协商，如有分歧，请主试委员会仲裁.每题 7 分，满分 42 分.

7. 奖励：不设冠军，而是鼓励更多青少年成长，获奖选手约占全体选手的 1/2，设金、银、铜牌，比例为 1:2:3.获奖标准与当届考试成绩有

关,对于特别漂亮的解法,IMO设特别奖,而不管他的总分多少.IMO不设团体奖,但各国十分重视团体总分所在的名次,从近十年情况来看,实力较强的是中、俄、美、德、罗等国.

8.主试委员会:由各国正领队及主办国指定的主席组成,其职责为:(1)确定试题;(2)确定评分标准;(3)用工作语言英、法、德、俄文准确表达试题,并翻译,核准译成各国文字的试题;(4)比赛期间确定如何回答学生用书面文字提出的疑问;(5)解决个别领队与协调员在评分上的不同意见;(6)确定奖牌个数与设置.

三、中国的数学竞赛

现代意义下的数学竞赛在我国始于1956年,与IMO大体同步.由于“文化大革命”中断了13年,从1978年恢复竞赛后,逐步从成熟,走向世界.

1.早期萌芽

1956年,在老一辈数学家华罗康、苏步青、江泽涵等人的倡导下,由中国数学会发起,经当时的高等教育部和教育部同意,首次在京、津、沪、汉4城市试办中学数学竞赛.除1959年、1961年因严重经济困难中断外,每年都有一些城市举办,并有逐年扩大的势头,这种状况一直持续到1964年.这一时期,无论从竞赛方式、试题难度、选手水平,都可与国际竞赛持平,可惜中途夭折,从1965年起中断了13年.

这个时期的竞赛特点是:

(1)有教育行政部门参加,因而有组织保证和资金来源.以后的第二个时期,从1981年起是“民办公助”的性质.

(2)仅限于大城市进行,规模小、涉及面窄.

(3)各城市分别命题,独立进行,还不是全国统一的竞赛.

(4)限于高年级参加,主要是高三,参加人数少.

第二时期则是几万,乃至几十万人的大赛,不仅有高中联赛,还发展到初中甚至小学.

2.走向成熟

1978年,科学的春天来了,4月,国务院批准全国和京、津、沪、陕、

皖、川、辽、粤八省市举办中学数学竞赛.由副总理方毅任全国数学竞赛委员会名誉主任,华罗庚任主任,主持命题.全国由下而上,历经地区初赛、复赛,共有20万人参加,从中选出350人参加全国统一的决赛.决赛分两试进行,第一试侧重基础,第二试侧重能力.从中选出优胜者57人,在北京举行颁奖大会,这57人可免试升入任何一所高等学校学习.

这次竞赛打破了"万马齐喑"的沉闷局面.在全国造成了轰动.1979年,竞赛规模自发膨胀.许多地区学校为了争名次,层层加码,层层选拔,集中训练,加重了学生负担,打乱了正常教学秩序.于是,教育部决定不再由官方举办全国性竞赛,这样本想一年一度的全国数学竞赛活动在1980年停止了.

这时与中国数学竞赛同时起步的国际数学竞赛已经形成规模,并向中国发出了邀请.中国的数学工作者感到有责任接受挑战,而且认为数学竞赛与教学并不存在必然的对立,之所以出现1979年的问题纯属工作的失误,而且责任也不在于数学教育工作者.于是各地区热心的数学工作者纷纷要求在官办竞赛停止以后,进行联合的"民办"竞赛.

1980年8月,中国数学会成立了一个新设的工作委员会,叫"中国数学会普及工作委员会".并在大连召开会议,各省数学界人士共商数学竞赛大计.会议提出"数学竞赛是一项群众性课外活动.中国数学会普及工作委员会是负责中国数学竞赛的一个常设学术机构".从此开始了一个冲向国际并取得光辉成果的新局面.从1981年,我国中学生数学竞赛以各省市联合竞赛方式延续下来,1985年发展到初中,1991年延伸到小学.并且逐渐明确了竞赛活动目的、工作程序,制订了数学竞赛大纲,实际上形成了一整套具有中国特色的数学奥林匹克工作方法.

3.冲向国际

早在1978年,我国就接到IMO的邀请,限于历史条件,未能参加,1980年又接到美国数学会邀请,我国拟参加1981年在华盛顿举行的22届IMO,终因故未成行.直到1985年,中国才以观察员身份参加26届IMO(赫尔辛基)以了解国际数学竞赛的基本情况,从1986年起,中国正式组队参加了自27届起的各届IMO.

从1985年至1996年的12年间,中国队共参赛62人次,得奖60人

次,其中金牌 39 个,银牌 17 个,铜牌 4 个,团体总分 5 次第一、3 次第二.我国中学生在 IMO 中屡次取得优异成绩,为国争了光,为中华民族和中国的数学教育争了光.

4.数学竞赛热的思考

国际数学竞赛已得到了全世界的承认,中国的数学竞赛亦在高潮之中,但是对开展数学竞赛活动历来存在两种不同的认识.持否定态度的人认为:(1)数学竞赛只面对少数天才儿童,会忽视大多数青少年;(2)过早的专业兴趣会影响学生的全面发展;(3)竞赛多为偏题、怪题、难题,与日常教学脱节.而赞成者认为:(1)竞赛会提高儿童的数学兴趣;(2)好学生可以带动较差的学生;(3)开展数学竞赛会引起社会公众对数学教育的关注.现在较为统一的看法是:竞赛本身不会产生问题,关键是如何组织,如何使多数人能参与其中,使竞赛推动日常数学,并且注意处理好以下问题:

(1)处理好课内课外的关系,要以课内为主,课外为辅,数学竞赛应是日常数学的有效补充;

(2)处理好普及与提高的关系,以普及为主,普及与提高相结合;

(3)处理好大多数与尖子学生的关系;

(4)坚持能力发展和趣味性相结合的原则.

四、初中数学竞赛大纲

初中数学教学大纲中所列出的内容是初中数学竞赛的基本要求,除数学大纲所列内容外,补充以下内容:

1.实数

十进制整数及表示方法,整除性,被 2、3、4、5、8、9、11 等数整除的判定;

素数与合数,最大公约数与最小公倍数;

奇数与偶数,奇偶性分析;

带余除法和利用余数分类;

完全平方数;

因数分解的表示法,约数个数的计算;

有理数的表示法,有理数四则运算的封闭性.

2.代数式

综合除法、余式定理;

拆项、添项、配方、待定系数法;

部分分式;

对称式和轮换对称式.

3.恒等式与恒等变形

恒等式、恒等变形;

整式、分式、根式的恒等变形;

恒等式的证明.

4.方程和不等式

含字母系数的一元一次、二次方程的解法,一元二次方程根的分布;

含绝对值的一元一次、二次方程的解法;

含字母系数的一元一次不等式的解法,一元二次不等式的解法;

含绝对值的一元一次不等式;

简单的一次不定方程;

列方程(组)解应用题.

5.函数 $y=|ax+b|, y=|ax^2+bx+c|$ 及 $y=ax^2+b|x|+c$ 的图像及性质

二次函数在给定区间上的最值,简单分式函数的最值,含字母系数的二次函数.

6.逻辑推理问题

抽屉原则(概念),分割图形造抽屉、按同余类造抽屉、利用染色造抽屉;

简单的组合问题;

逻辑推理问题、反证法;

简单的极端原理;

简单的枚举法.

7.几何

四种命题及其关系;

三角形的不等关系,同一个三角形的边角不等关系,不同三角形中的边角不等关系;

面积及等积变换;

三角形的心(内心、外心、垂心、重心)及其性质.

五、数学竞赛的命题要求

数学竞赛的命题是数学竞赛的重要方面,一次数学竞赛的命题水平直接反映了竞赛的水平.对数学竞赛命题的要求主要有四方面:内容的科学性、结构的新颖性、功能的选拔性、解法的灵活性.

1.内容的科学性

每一个习题都可以看作是某个数学系统的子系统,因而题目的条件与所在系统的命题体系应是相容的,同时题目本身的子系统也是和谐的.具体说来应有:

(1)条件的相容性.即条件本身不能互相矛盾.首先不能与本系统的公理定理相矛盾,其次是条件之间不能互相矛盾.

(2)条件的充分性.由于解题的实质是从条件导出结论的一系列推理,其中每一步推理都要满足充足理由.

(3)条件的独立性.即要求题目的条件既不重复又不多余,条件之间没有因果关系.这就体现了数学的严谨性.但对初中生来说,有时为了降低题目的难度,常允许存在多余的条件.

2.结构的新颖性

数学竞赛的题目常常有深刻的寓意.简明的叙述,规则的编排、精巧的数据以及年号、对称、循环、生活性、拟人拟物,使得题目本身就是一件引人入胜的艺术品,充满了美的魅力.

结构的新颖性还应该包含“避开陈题”,以保证竞赛的客观性.同时在低层次的竞赛中,更要做到浅而不俗,熟而不旧.

3.功能的选拔性

主要是指题目应具有较好的区分度和适当的难度,以体现竞赛的

人才选拔功能.知识与能力相比,应当把能力考查放在首位,即试题应属于能力型.

4.解法的灵活性

数学竞赛是聪明才智的角逐,因而试题应尽可能有较大的灵活性,让学生的聪明才智得以充分发挥.那种以固定求解公式的成题,只能是天才的陷阱.在设计试题时应没有固定的模式可套,要让学生自己去体会数学认识的过程,即自己去探索、尝试、发现、归纳、猜想,最后得出逻辑的证明.

在当今编拟竞赛题时,常通过如下途径获得:(1)高数数学的成果初等化;(2)历史名题的派生;(3)成题改编;(4)数学模型方法.其中成题改编在低层次的数学竞赛中常常使用,这里经常采用的技术手段有:(1)两道习题、两种方法的联接与综合;(2)已知题目纵向延伸,或拓广、移植与类比;(3)改变设问的方向,向反面转化;(4)引入参数;(5)增加试题的纵深层次;(6)改明显条件为隐含条件.

第二讲　整数的基本知识

一、整数的多项式表示

数的进位制有多种，如二进制、八进制、十进制、12 进制……最常用的是十进制，如 1999 表示有 1 个一千，9 个一百，9 个一十及 9 个一，可记为 $1999 = 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 9 \times 10 + 9$.

一个十进制正整数 N 可记作：

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \tag{1}$$

其中　$a_i \in \{0,1,2,\cdots,9\}$，$(i = 0,1,2,\cdots,n)$　$a_n \neq 0$

一般地，一个 P 进制整数 $N_{(p)}$（脚码 (p) 表示 p 进制，$p = 10$ 时可以省略）可以表示为：

$$N_{(p)} = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p^1 + a_0 \cdot p^0$$

其中 $a_i \in \{0,1,2,\cdots,p-1\}$，$(i = 0,1,2,\cdots,n)$，$p$ 称为进位基数，$a_n \neq 0$.

例 1　若把一个正整数的末位数字删掉后得到一个新的整数，而原整数是新整数的倍数，求所有具有这种性质的正整数 N.

解　(1) 显然，所有末位数字为零的正整数均为所求.

(2) 若末位数字不为零，设原整数为

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

其中，$a_n \cdot a_0 \neq 0$

则删掉 a_0 后，得到的新数 M 为：

$$M = a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1$$

要使 N 为 M 的倍数，即 N/M 为整数

$$\because \quad \frac{N}{M} = \frac{a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0}{a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1}$$