学习指导

高中数学

第二册(上)

(必修)

重庆出版社

编写说明

中学生教辅读物是学生获取知识，形成能力和正确的态度、情感、价值观的重要载体．编写出版体现新的课程理念的教辅读物，是推进基础教育课程改革、全面实施素质教育的需要．

为了帮助学生掌握学科基础知识和学习方法，提高学习能力，以适应中学全面实施素质教育、提高教育质量的需要，我们特聘请我市中学政治、语文、数学、英语、物理、化学、生物、历史、地理等学科的教学专家和特级教师分别担任主编，编写了这套《中学生学习指导》丛书．

本丛书依据修订的初中各科教学大纲及教材和新的高中各科教学大纲及教材，贯彻以学生全面发展为本的思想，按章节（课）分别就学科有关学习内容的知识结构、学习目标、重点难点以及学习方法进行了具体的指导，并提供了多种题型的基本训练及解题思路．

本丛书从不同学科的特点和内容出发，立足帮助学生掌握基础知识和基本技能，培养学生的创新意识、创新能力和综合能力，努力引导学生将所学知识与生活经验、现实生活相联系．丛书还突出了对学生学习过程和学习方法的指导，重视转变学生的学习方式，重视学生的思维训练．

这套丛书的中学数学学科的主编是梁显政，副主编是董安东、杨祖旺、张晓斌、张斌．参加编写的有曹黎枫、封贞琴、郑黎、张晓斌、梁显政、董安东、杨祖旺、张斌．

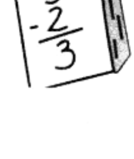
编写一套适应素质教育要求的学习指导丛书，对我们来说还只是一种探索，疏漏之处在所难免，恳请广大师生在使用中提出宝贵意见，以便不断修改，使之日臻完善．

重庆市《中学生学习指导》编写委员会

2006 年 5 月 18 日

目录

目录



在未来十年中领导世界的国家将是在科学的知识解释和运用方面起领导作用的国家.整个科学的基础又是一个不断增长的数学知识总体.我们越来越多地用数学模型指导我们探索未知的工作.

——H. F. Fehr

第六章 不等式

6.1 不等式的性质(3课时)

学习导航

1. 不等式是用不等号表示两个数量间的关系的,那么如何准确地应用符号“$>$”(“$\geqslant$”)或“$<$”(“$\leqslant$”)来表示两个不等的量 a,b 之间的关系呢?它的几何意义是什么?

2. 不等式的基本性质:对于任意两个实数 a 与 b,有 $a>b \Leftrightarrow a-b>0$;$a<b \Leftrightarrow a-b<0$;$a=b \Leftrightarrow a-b=0$.它揭示了 a 与 b 的运算性质及大小顺序之间的关系,是本章内容的基础,是不等式性质的证明和证明不等式及解不等式的主要依据.

3. 由不等式的基本性质推导的不等式的其他性质分别有:反身性(定理1)、传递性(定理2)、可加减性(定理3、推论及例3)、可乘除性(定理4、推论及例4)、可乘方性(定理4的推论2、定理5),应用时一定要严格掌握它们成立的条件,各性质中“$\Leftrightarrow$”与“$\Rightarrow$”符号的正确使用.

4. 用不等式的性质求变量的取值范围时,是通过同向不等式相加或相乘完成的.如果是有等号的,还应注意两端能否取“$=$”号.

基础训练

训练一

1. 设 $m=2x^2-x+3$,$n=x^2-x-4$,则 m 与 n 的大小关系是(　　)

(A) $m>n$.　　(B) $m<n$.　　(C) $m=n$.　　(D)不能确定.

2. 若 $a,b,c\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq b$,则下列不等式中恒成立的是(　　)

(A) $a^2+3ab>2b^2$.　　(B) $a^5+b^5>a^3b^2+a^2b^3$.

(C) $a^2+b^2\geqslant 2(a-b-1)$.　　(D) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$.

3. 设 $a>b>0$,则 $\frac{b}{a}$ 与 $\frac{b+1}{a+1}$ 的大小关系是(　　)

(A) $\frac{b}{a}>\frac{b+1}{a+1}$.　　(B) $\frac{b}{a}<\frac{b+1}{a+1}$.　　(C) $\frac{b}{a}=\frac{b+1}{a+1}$.　　(D)不能确定.

4. 用符号“>”、“<”或“=”连接下列各式：

(1) $\sqrt{c+1}-\sqrt{c}$ ____ $\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$ $(c>1)$；

(2)若 $a>b$ 且 $ab>0$，则$\frac{1}{a}$____$\frac{1}{b}$；

(3) $\log_a(1+a)$____$\log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$；

(4)若 $a<-1$，$-1<b<0$，则 a^2b ____ ab^2.

训练二

1. 若 $a<b<0$，则下列各式中恒成立的是(　　)

(A) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.　(B) $0<\frac{a}{b}<1$.　(C) $\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$.　(D) $ab>b^2$.

2. 已知 $x<a<0$，则一定成立的不等式是(　　)

(A) $x^2<ax<a^2$.　(B) $x^2>ax>a^2$.　(C) $x^2<a^2<ax$.　(D) $x^2>a^2>ax$.

3. 下列命题中，假命题是(　　)

(A) $\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}\Rightarrow a>b$.　(B) $a>b,c>d\Rightarrow a-d>b-c$.

(C) $a>b>0,ac>bd\Rightarrow c>d$.　(D) $a>b>0,c>d>0\Rightarrow\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$.

4. 下列命题中正确命题的个数是(　　)

(1)若 $a,b,c\in\mathbf{R}$ 且 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$；

(2)若 $a^2>b^2$ 且 $ab>0$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

(3)若 $a>1,b>1$，则 $a+b>2$ 且 $ab>1$；

(4)若 $a>b$，则 $|a|>b$.

(A)1.　(B)2.　(C)3.　(D)4.

训练三

1. $a<b$ 且 $c<d$ 成立的必要条件是(　　)

(A) $ac<bd$.　(B) $a-c<b-d$.　(C) $a+c<b+d$.　(D) $\frac{a}{d}<\frac{b}{c}$.

2. 已知 $a>b>c$，则下列不等式中一定成立的是(　　)

(A) $ac>bc$.　(B) $|ac|>|bc|$.

(C) $ac^2>bc^2$.　(D) $b(a-b)>c(a-b)$.

3. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，则使 $a>b$，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$都成立的充要条件是(　　)

(A) $a<0,b<0$.　(B) $a<0,b>0$.　(C) $a>0,b<0$.　(D) $a>0,b>0$.

4. “$\alpha+\beta>4$ 且 $\alpha\beta>4$”是“$\alpha>2$ 且 $\beta>2$”成立的(　　)

(A)充分非必要条件.　(B)必要非充分条件.

(C)充要条件.　(D)既不充分又不必要条件.

探索与联想

问题1　不等式 $1\leqslant2$ 和 $3\leqslant3$ 成立吗？为什么？

解答：成立. 如果你能正确理解不等号“≥”和“≤”的含义，这个问题就不难回答了. 不等号“≥”（“≤”）也是表示两个实数间的一种关系的，即“不小于”关系（“不大于”关系）. 从逻辑上来说，$a\geqslant b$ 是表示 $a>b$ 或 $a=b$ 中必有一个成立，但它们不可能同时成立，当且仅当 $a<b$ 时，这个式子才不成立. 因此必须明确：$a>b$，$a<b$，$a\geqslant b$，$a\leqslant b$ 都叫做不等式.

问题2　设 $f(x)=ax^2+bx$，且 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2\leqslant f(1)\leqslant 4$，则（　　）

(A) $3\leqslant f(-2)\leqslant 12$.　　(B) $5\leqslant f(-2)\leqslant 10$.

(C) $3\leqslant f(-2)\leqslant 10$.　　(D) $5\leqslant f(-2)\leqslant 12$.

解法一：依题意得 $\begin{cases}1\leqslant a-b\leqslant 2\\ 2\leqslant a+b\leqslant 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{3}{2}\leqslant a\leqslant 3\\ 0\leqslant b\leqslant\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow 3\leqslant 4a-2b\leqslant 12$，即 $3\leqslant f(-2)\leqslant 12$，故选 A.

解法二：依题意得 $f(-2)=4a-2b=3f(-1)+f(1)$，

又 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2\leqslant f(1)\leqslant 4$，

$\therefore 3\leqslant 3f(-1)\leqslant 6$，$2\leqslant f(1)\leqslant 4$.

$\therefore 5\leqslant f(-2)\leqslant 10$. 故选 B.

点评：两种方法都是利用不等式的性质求解，为何得出两种不同的结果？正确解法是其中的哪一个？错误解法错误的原因在何处？解法二是正确的，解法一是错误的. 导致错误的原因是多次运用同向不等式相加这一性质使 $f(-2)$ 的取值范围扩大了，而正确的取值范围应为它的子集.

问题3　观察下列四个题的解法.

题1：解不等式 $3x+\dfrac{1}{x-2}<8+\dfrac{1}{x-2}$.

解：移项，得 $3x<8$，$x<\dfrac{8}{3}$.

所以原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x<\dfrac{8}{3}\right\}$.

题2：解不等式 $(x+1)(2x-3)>2(x+1)$.

解：不等式两边同除以 $(x+1)$，得 $2x>5$，$x>\dfrac{5}{2}$.

所以原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x>\dfrac{5}{2}\right\}$.

题3：解不等式 $x>\dfrac{1}{x}$.

解：去分母，得 $x^2>1$，$x<-1$ 或 $x>1$.

所以原不等式的解集为 $\{x\mid x<-1$ 或 $x>1\}$.

题4：解不等式 $x-2<\sqrt{x^2+3}$.

解：原不等式两边平方，得 $x^2-4x+4<x^2+3\Rightarrow x>\dfrac{1}{4}$.

所以原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x>\dfrac{1}{4}\right\}$.

以上各题的解法是否正确？错误产生的原因何在？以上解答提醒我们在对不等式的变形中，千万要牢记不等式的性质中的条件. 今后我们在解不等式中，不能再犯同种类型的错误.

课时训练

训练一

1. 已知命题“$a\geqslant b\Rightarrow c\geqslant d$”和“$a<b\Rightarrow e\leqslant f$”，则下列命题中正确的是(　　)

(A) $e\geqslant f\Rightarrow c>d$.　(B) $c\leqslant d\Rightarrow e>f$.　(C) $c<d\Rightarrow e\leqslant f$.　(D) $e<f\Rightarrow c<d$.

2. 已知 $a>b>c$ 且 $a+b+c=0$，则 b^2-4ac(　　)

(A)恒正.　(B)恒负.　(C)恒非正.　(D)恒非负.

3. 已知 $a=2-\sqrt{5}$，$b=\sqrt{5}-2$，$c=5-2\sqrt{5}$，那么(　　)

(A) $a<c<b$.　(B) $a<b<c$.　(C) $b<a<c$.　(D) $c<a<b$.

4. 某种商品计划提价，现有四种方案：方案一先提价 $m\%$，再提价 $n\%$；方案二先提价 $n\%$，再提价 $m\%$；方案三分两次提价，每次提价 $\left(\frac{m+n}{2}\right)\%$；方案四一次性提价 $(m+n)\%$. 已知 $m>n>0$，那么四种提价方案中，提价最多的是方案(　　)

(A)一.　(B)二.　(C)三.　(D)四.

*5. 若 $x\neq 2$ 或 $y\neq -1$，$M=x^2+y^2-4x+2y$，$N=-5$，则 M 与 N 的大小关系是(　　)

(A) $M>N$.　(B) $M<N$.　(C) $M=N$.　(D)不能确定.

训练二

1. “$a>|b|$”是“$\frac{1}{a}<\frac{1}{|b|}$”的(　　)

(A)充分不必要条件.　(B)必要不充分条件.

(C)充要条件.　(D)既不充分又不必要条件.

2. 条件 p：$|x|>1$，条件 q：$x<-2$，则 $\neg P$ 是 $\neg q$ 的(　　)

(A)充分不必要条件.　(B)必要不充分条件.

(C)充要条件.　(D)既不充分又不必要条件.

3. 条件 p：关于 x 的不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 与不等式 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 的解集相同；条件 q：$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$. 条件 q 是条件 p 的(　　)

(A)充分不必要条件.　(B)必要不充分条件.

(C)充要条件.　(D)既不充分又不必要条件.

*4. 若不等式 $x^2+2x+a\geqslant -y^2-2y$ 对任意实数 x、y 都成立，则 a 的取值范围是________.

*5. 若 $0<a<\frac{1}{4}$，则 a^2，a，$\sqrt{a}$，$2a$ 从小到大的顺序是________.

训练三

1. 设 $m=a^2(a-b)$，$n=b(2a-b)(a-b)$，试比较 m，n 的大小.

2. 在某段时间内我国手机用户收费标准有三种，参考数据如下表：

	月租费	每分钟通话费
中国电信卡	30 元	0.40 元
中国联通卡	12.50 元	0.36 元
神州行卡	/	0.60 元

现有甲、乙、丙三个手机用户分别使用上述三种卡，设定他们的月通话时间均为 x(分)，试比较他们每月缴纳话费 y(元)的大小.(注：每月话费 = 月租费 + 通话费.)

3. 证明下列不等式：

(1)若 $a>b>0,c>d>0$，则$\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$；

(2)若 $a>b>0,c<d<0,e<0$，则$\frac{e}{a-c}>\frac{e}{b-d}$.

*4. 已知 $a\leqslant 0$，比较式子$\frac{1}{1+a}$与 $1-a$ 的值的大小.

研究性习作

已知 $0<x<1,0<a<1$，试比较 $|\log_a(1-x)|$与 $|\log_a(1+x)|$的大小.(用四种或四种以上的方法进行比较.)

6.2 算术平均数与几何平均数(2 课时)

学习导航

1. $\frac{a+b}{2}$与 $\sqrt{ab}(a>0,b>0)$分别称为 a,b 的算术平均数和几何平均数. 在公式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 及平均值不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a>0,b>0)$中，当且仅当 $a=b$ 时等号才成立，且前一个公式中的 $a,b\in\mathbf{R}$，后一个公式中的 $a,b\in\mathbf{R}^+$，必须牢记清楚.

2. 两个正数，若它们的积为常数，则当且仅当这两个数相等时，它们的和有最小值；若它们的和为常数，则当且仅当这两个数相等时，它们的积有最大值. 于是用均值不等式求最值，成为不等式应用的一个重要内容.

3. 利用均值不等式求最值时，必须注意以下三点：

(1)所求最值的代数式要满足定理中的数的取值范围；

(2)应用一定的技巧，使不等式的一端为定值，当“和”为常数时，则“积”为最大值；当“积”为常数时，则“和”为最小值；

(3)必须验证等号成立的条件，这个条件一定要在题设的允许值范围内.

4. 当把实际问题抽象为函数的最值问题时，函数的定义域则是不等式中变量的取值范围. 当用均值不等式求该函数的最值时，上述(1)、(3)条必须在定义域内考虑.

基础训练

训练一

1. 已知 $m=a+\frac{1}{a-2}\ (a>2)$，$n=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2}\ (x<0)$，则 m,n 之间的大小关系是(　　)

(A) $m>n$.　　(B) $m<n$.　　(C) $m=n$.　　(D) $m\leqslant n$.

2. 下列结论中，错误的是(　　)

(A)若 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\tan x+\cot x\geqslant 2$.　　(B)若 $x\in(0,+\infty)$，则 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$.

(C) $\lg x+\log_x 10\geqslant 2\ (x>0$ 且 $x\neq 1)$.　　(D)若 $a\in\mathbf{R}^+$，则 $(1+a)\left(1+\frac{1}{a}\right)\geqslant 4$.

3. 已知 $a,b,c,d,m,n\in\mathbf{R}^+$，$P=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$，$Q=\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\frac{b}{m}+\frac{d}{n}}$，那么(　　)

(A) $P\geqslant Q$.　　(B) $P\leqslant Q$.

(C) $P=Q$.　　(D) P,Q 的大小与 m,n 的取值有关.

4. 已知 a,b,c 是不全相等的正数，求证：

$$\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}>3.$$

训练二

1. 若 $a>0,b>0$ 且 $a+b=4$，则(　　)

(A) $\frac{1}{ab}\geqslant\frac{1}{2}$.　　(B) $\sqrt{ab}\geqslant 2$.　　(C) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 1$.　　(D) $\frac{1}{a^2+b^2}\leqslant\frac{1}{4}$.

2. 若 $m>1,n>1$，且 $\log_3 m\cdot\log_3 n=4$，则 $m+n$ 的最小值是(　　)

(A) 9.　　(B) 18.　　(C) 27.　　(D) 81.

3. 如果 $a>1,b>1$，且 $ab-(a+b)=1$，那么(　　)

(A) ab 有最大值 $\sqrt{2}+1$.　　(B) ab 有最小值 $2(\sqrt{2}+1)$.

(C) $a+b$ 有最大值 $\sqrt{2}+1$.　　(D) $a+b$ 有最小值 $2(\sqrt{2}+1)$.

4. 已知正数 x,y 满足 $x+2y=1$，求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值及此时相应的 x 和 y 的值.

探索与联想

1. 先看如下两例的解法.

例 1　若 $0<x<2$，求函数 $y=2x(2-x)$ 的最大值.

解：由 $0<x<2$，得 $2-x>0$.

于是 $y=2x(2-x)\leqslant\left(\frac{2x+2-x}{2}\right)^2=\left(\frac{x+2}{2}\right)^2$.

当且仅当 $2x=2-x$，即 $x=\frac{2}{3}\in(0,2)$ 时，$y_{\max}=\frac{16}{9}$.

例2　设 $x,y\in\mathbf{R}^{+}$，常数 $a,b\in\mathbf{R}^{+}$，则当 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$ 时，求 $u=x+y$ 的最小值.

解：$\because x,y,a,b\in\mathbf{R}^{+}$，$\therefore 1=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\geqslant 2\sqrt{\frac{ab}{xy}}$.

$\therefore xy\geqslant 4ab$. 于是 $u=x+y\geqslant 2\sqrt{xy}\geqslant 4\sqrt{ab}$，即 $u_{\min}=4\sqrt{ab}$.

上面两例的解法是否正确？如果正确，请说明理由；如果不正确，请给出正确解答.

点评：例1、例2的解法都是错误的. 例1中构造定值应该在验证等号成立之前，而不要用等号成立这一条件来构造定值. 例2的解法用了两次均值不等式，而这两次均值不等式等号成立的条件不同，导致最后结果的错误.

2. 均值不等式在实际问题中的应用

例3　一船由甲地逆水匀速行驶至乙地，甲、乙两地相距 $s$km，水速为常量 $p$km/h，船在静水中的最大速度为 $q$km/h$(q>p)$. 已知船每小时的燃料费用（以元为单位）与船在静水中的速度 $v$km/h 的平方成正比，比例系数为 k.

(1) 把全程燃料费用 y（元）表示为静水中的速度 v 的函数，并指出这个函数的定义域；

(2) 为了使全程燃料费用最少，船的实际前进的速度应为多少？

解：(1) 依题意，船由甲地匀速行驶至乙地所用时间为 $\frac{s}{v-p}$h，全程燃料费用为 $y=kv^2\cdot\frac{s}{v-p}$，定义域为 $v\in(p,q]$.

(2) 依题意，k,s,v,p,q 均为正实数，故有

$$\begin{aligned}y&=kv^2\cdot\frac{s}{v-p}=ks\cdot\frac{v^2-p^2+p^2}{v-p}\\&=ks\left[(v-p)+\frac{p^2}{v-p}+2p\right]\\&\geqslant ks(2p+2p)=4ksp.\end{aligned}$$

若 $2p\leqslant q$，则当 $v-p=\frac{p^2}{v-p}$ 即 $v=2p$ 时，全程燃料费用最少，其最小值为 $4ksp$（元）；

若 $2p>q$，则当 $v\in(p,q]$ 时，函数 $y=kv^2\cdot\frac{s}{v-p}=\frac{ks}{\left(v-\frac{p}{v^2}\right)}$ 为减函数，所以当 $v=q$ 时，全程燃料费用最少，其最小值为 $\frac{ksq^2}{q-p}$（元）.

综上述，为使全程燃料费用最少，当 $2p\leqslant q$ 时，船的实际速度应为 $p$km/h；当 $2p>q$ 时，船的实际速度应为 $(q-p)$km/h.

3. 定理的推广（参见课本中的阅读材料）

(1) 如果 $a,b,c\in\mathbf{R}^{+}$，那么 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$（当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立）.

即：三个正数的算术平均值不小于它们的几何平均值.

(2)一般地,对于 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 2)$,有 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ (当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立).

即:n 个正数的算术平均值不小于它们的几何平均值.

定理的推广使得它的应用更为广泛. 同学们不妨练习一下下面两例.

例4　已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $a+b+c=1$,求证 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9$.

例5　(1)若 $0<x<2$,则函数 $y=2x^2(2-x)$ 的最大值是________;

(2)若 $x>0$,则函数 $y=\frac{3x}{2}+\frac{8}{x^2}+\frac{x}{2}$ 的最小值是________.

课时训练

训练一

1. 若 a,b,c 都是正实数,设 $m=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$,$n=\frac{a+b}{2}$,$p=\sqrt{ab}$,$q=\frac{2ab}{a+b}$,那么 m,n,p,q 的大小顺序是(　　)

(A)$m\geqslant p\geqslant n\geqslant q$.　　(B)$m\geqslant n\geqslant p\geqslant q$.

(C)$m\geqslant n\geqslant q\geqslant p$.　　(D)$n\geqslant p\geqslant m\geqslant q$.

2. 在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上,函数 $f(x)=x^2+bx+c(b,c\in\mathbf{R})$ 与 $g(x)=\frac{x^2+x+1}{x}$ 在同一点取得相同的最小值,那么,$f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上的最大值是(　　)

(A)$\frac{5}{4}$.　　(B)$\frac{13}{4}$.　　(C)4.　　(D)8.

3. 设 $a>0,a\neq 1,t>0$,试比较 $\frac{1}{2}\log_a t$ 与 $\log_a\frac{t+1}{2}$ 的大小,并证明你的结论.

4. 若 a,b,c 为正实数,且 $a+b+c=1$,求证 $\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)\geqslant 8$.

*5. 当 $x>0$ 时,求 $\frac{2x}{x^2+1}$ 的最大值,并求出相应的 x 的值.

训练二

1. 设 $a>b>c$,求证 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{4}{a-c}$.

2. 已知 $a>0,b>0,c>0$,求证:

(1)$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant a+b+c$;

(2)$\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a+b+c}\geqslant abc$.

3. 某工厂有旧墙一面长 14m,现准备利用这面旧墙建造平面图形为矩形,面积为 126m^2

的厂房. 工程条件是:①建 1m 新墙的费用为 a 元;②修 1m 旧墙的费用为$\frac{a}{4}$元;③拆去 1m 旧墙用所得的材料建 1m 新墙的费用为$\frac{a}{2}$元. 经讨论,有两种方案:(1)利用旧墙的一段 $x(x<14)$m 为矩形厂房一面的边长;(2)矩形厂房的一面边长为 $x(x\geqslant 14)$m. 问:如何利用旧墙,即 x 为多少时建墙费用最省?(1)、(2)两种方案中哪种方案最好?

4. 当 $x>1$ 时,求函数 $y=\frac{2x(x+1)}{x-1}$的最小值及此时相应的 x 的值.

研究性习作

关于"n 个正数的算术平均值不小于它们的几何平均值"的应用.

问题:有甲、乙两个粮食经销商每次在同一粮食生产基地以相同价格购进粮食. 他们共购粮三次,各次的粮食价格不同,甲每次购粮 10000 千克,乙每次购粮 10000 元. 三次统计,谁购的粮食平均价格低?为什么?

6.3 不等式的证明(5 课时)

学习导航

1. 不等式的形式有多种多样,所以不等式的证明方法也因题而异. 不等式证明中最常用的方法是比较法、综合法和分析法. 各种方法的应用灵活多样,技巧性强,这是不等式证明中不同于等式变形的地方.

2. 比较法是证明不等式的最基本最重要的方法. 它可分为差值比较法和商值比较法. 差值比较法是将两个代数式的大小关系转化为它们差值的正、负号的判定,商值比较法是将两个正因式的大小关系转化为其商是大于 1 或是小于 1 的判定.

(1)差值比较法的理论依据是不等式的基本性质:$a\geqslant b$(或 $a\leqslant b$)$\Leftrightarrow a-b\geqslant 0$(或 $a-b\leqslant 0$). 其一般步骤是:作差——变形——判断符号——结论. 作差、变形是手段,判断符号才是目的. 变形的目的是便于判断差式的符号,它是用比较法证明不等式的关键. 变形的常用方法有配方法、通分法、因式分解法等.

(2)商值比较法的理论依据是:若 a,b 均为正实数,则 $a\geqslant b$(或 $a\leqslant b$)$\Leftrightarrow \frac{a}{b}\geqslant 1$(或$\frac{a}{b}\leqslant 1$). 其一般步骤是:作商——变形——判断商与数 1 的大小关系——结论.

3. 从已知条件或已知不等式出发,利用恒等变形及不等式的性质,逐步推导,直到得出所要证明的结论,这种证明方法叫做综合法. 它也是不等式证明中的常用方法,其特征和思路是"由因索果",即由"已知"推"可知",由"充分条件"推导出"必要条件",直至最后的"必要条件"是所证明的不等式为止. 逻辑关系是:$A\Rightarrow B_1\Rightarrow B_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow B_n\Rightarrow B$. 综合法的技巧性很强,要求对可以利用的已知不等式有较强的选择能力,而且对可能出现的结果有较强的组合

与分解能力.

4. 分析法是指从需证的不等式出发,分析这个不等式成立的充分条件,进而转化为判断那些条件是否具备. 其特征和思路是“执果索因”. 用分析法论证“若 A 则 B”这个命题的过程为:为了证明 B 为真,因为 $B_1 \Rightarrow B$,所以只需证明命题 B_1 为真;又因为 $B_2 \Rightarrow B_1$,所以又只需证明命题 B_2 为真;……直到证明 A 为真;而由已知 A 为真,故 B 为真. 分析法的逻辑关系是:$B \Leftarrow B_1 \Leftarrow B_2 \Leftarrow \cdots \Leftarrow B_n \Leftarrow A$. 它的优点是便于思考和寻求到解题的方向,思路自然,易于掌握. 分析法的书写表达是难点,必须引起高度重视.

在不等式的证明中,综合法的优点在于表达的条理清晰,形式简洁,为了弥补分析法书写的烦琐,在不等式的证明中常将这两种方法结合起来应用,即先用分析法寻求解题的思路,再用综合法有条理地表达证明过程.

5. 不等式的证明除了教科书中介绍的三种方法外,还有其他一些方法,如放缩法、换元法、反证法等. 了解这些方法,可以扩大知识面,进一步提高分析问题、解决问题的能力.

基础训练

训练一

1. 设 $a>b>0$,求证$\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}>\dfrac{a-b}{a+b}$.

2. (1)若 $x<y<0$,试比较$(x^2+y^2)(x-y)$与$(x^2-y^2)(x+y)$的大小;

(2)设 $a>0,b>0$ 且 $a\neq b$,试比较 $a^a b^b$ 与 $a^b b^a$ 的大小.

3. 已知 $a>0,b>0$,求证$\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

训练二

1. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,求证 $a^4+b^4+c^4\geqslant abc(a+b+c)$.

2. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $a+b+c=2$,求证 $ab+bc+ca\leqslant\dfrac{4}{3}$.

3. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,求证 $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\geqslant 6abc$.

4. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,求证$(a+b+c)\cdot\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{c}\right)\geqslant 4$.

训练三

1. 已知 $a,b,c,d\in\mathbf{R}^+$,且 $ad>bc,m,n\in\mathbf{N}_+$,求证$\dfrac{a}{b}>\dfrac{am+cn}{bm+dn}>\dfrac{c}{d}$.

2. 已知 $a>b>0$,求证 $\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}<\dfrac{b}{\sqrt{a-b}}$.

3. 若 $a\geqslant0,b\geqslant0,2c>a+b$,求证 $c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab}$.

4. 已知 $a>b>0,c>0$,求证 $\sqrt{a+c}-\sqrt{a}<\sqrt{b+c}-\sqrt{b}$.

训练四

1. 设 $n\in\mathbf{N}_+$,求证$\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}<1$.

2. 已知$f(x)=x^2+ax+b$,求证:$|f(1)|$,$|f(2)|$,$|f(3)|$中至少有一个不小于$\frac{1}{2}$.

3. 已知$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$,求证$\frac{1}{2}\leqslant x^2-xy+y^2\leqslant 3$.

4. 若$x^2+y^2\leqslant 1$,求证$|x^2+2xy-y^2|\leqslant\sqrt{2}$.

训练五

1. 设$a>0$且$a\neq 1$,$m>n>0$,求证$a^m+\frac{1}{a^m}>a^n+\frac{1}{a^n}$.

2. 设$a,b,c\in\mathbf{R}^+$,求证$2\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)\leqslant 3\left(\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\right)$.

3. 设$f(x)=\sqrt{1+x^2}$,求证:对任意不相等的实数x_1,x_2,总有$|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$.

探索与联想

思考1　求证$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2\ (n\in\mathbf{N}_+)$.

分析:我们发现无论采用比较法、综合法、分析法中的哪一种,都不能通过常规的变形得到最后结果,于是联想到数列求和.对于$S_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$,求和很困难,但对于$S'_n=1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$,求和非常容易.

$$S'_n=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}<2.$$

由于$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}(n\geqslant 2)$,所以可将$S'_n$作为中间变量,证$S_n<S'_n<2$,问题就迎刃而解了.这就是我们证明不等式的一种重要变形技巧——放缩法:根据不等式的传递性,在证明不等式时,使不等式的一端适当地放大或缩小,从而达到证题目的的一种方法.放缩法的关键与难点是放缩要得当,技巧性很强.

练习:求证$2(\sqrt{n+1}-1)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$.

思考2　求证$-1\leqslant\sqrt{1-x^2}-x\leqslant\sqrt{2}$.

分析:经过观察,此题是可以用分析法证明的.再进一步观察,由定义域$1-x^2\geqslant 0\Rightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$,联想所学知识,可以作这样的代换:设$x=\cos\theta$,$\theta\in[0,2\pi]$.则$\sqrt{1-x^2}-x=\sqrt{1-\cos^2\theta}-\cos\theta=|\sin\theta|-\cos\theta$.

当$\theta\in[0,\pi]$时,$|\sin\theta|-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$,而$\theta-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$,所以$-1\leqslant\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$.

当 $\theta\in[\pi,2\pi]$ 时，$|\sin\theta|-\cos\theta=-\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$，而 $\theta+\dfrac{\pi}{4}\in\left[\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{9\pi}{4}\right]$，所以 $-1\leqslant -\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$.

综上，可得 $-1\leqslant\sqrt{1-x^2}-x\leqslant\sqrt{2}$.

这就是不等式证明中的换元法. 三角代换是最常见的变量代换，凡条件为 $x^2+y^2=r^2$ 或 $x^2+y^2\leqslant r^2$ 或 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 等均可用三角代换.

思考3　求证：由三个小于1的正实数 a,b,c 构成的三个乘积 $(1-a)b,(1-b)c,(1-c)a$ 不能同时大于 $\dfrac{1}{4}$.

分析：我们在寻求上述命题的解答中发现，要证的命题从正面无法下手，于是从逆向思维联想到用反证法.

假设 $(1-a)b,(1-b)c,(1-c)a$ 都大于 $\dfrac{1}{4}$.

$\because a,b,c$ 都是小于1的正实数，

$\therefore 1-a>0,1-b>0,1-c>0$.

由均值不等式，得 $\dfrac{(1-a)+b}{2}\geqslant\sqrt{(1-a)b}>\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{(1-b)+c}{2}>\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{(1-c)+a}{2}>\dfrac{1}{2}$.

三式相加，得 $\dfrac{3}{2}>\dfrac{3}{2}$，矛盾.

故 $(1-a)b,(1-b)c,(1-c)a$ 不能同时大于 $\dfrac{1}{4}$.

反证法是一种间接法，其步骤是：①作出与命题结论相反的假设；②在假设的基础上，经过合理的推理，导出矛盾的结果；③肯定原命题的正确性.

课时训练

训练一

1. 设 $n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant 2$，求证 $\log_n(n+1)>\log_{n+1}(n+2)$.

2. 已知函数 $f(x)=\lg\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$，$x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，若 $x_1,x_2\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，且 $x_1\neq x_2$，求证 $\dfrac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$.

3. 已知 $a>0$，$b=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{3}{a}\right)$，$c=\dfrac{1}{2}\left(b+\dfrac{3}{b}\right)$，试比较 a,b,c 的大小.

*4. 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$ 且 $a+b=1$，求证 $ax^2+by^2\geqslant(ax+by)^2$.

训练二

1. 已知 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$，且 $a_1a_2a_3\cdots a_n=1$，求证 $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_n)\geqslant 2^n$.

2. 若 a,b,c 是不全相等的正数，求证 $\lg\frac{a+b}{2}+\lg\frac{b+c}{2}+\lg\frac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c$.

3. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^{+}$，且 $a+b+c=1$，求证 $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\geqslant 64$.

*4. 在某两个正数 x,y 之间，若插入两个数 a_1,a_2，则 x,a_1,a_2,y 成等差数列；若另外插入两个数 b_1,b_2，则 x,b_1,b_2,y 成等比数列. 求证：$(\sqrt{b_1b_2}+1)^2\leqslant(a_1+1)(a_2+1)$.

训练三

1. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^{+}$，求证 $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$.

2. 已知 $a>b>0$，求证 $\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{a}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}$.

3. 若 $a,b,c,d,m,n\in\mathbf{R}^{+}$，求证 $\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\leqslant\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\frac{b}{m}+\frac{d}{n}}$.

训练四

1. 已知 $a,b,c,d\in\mathbf{R}^{+}$，$S=\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{c+d+b}$，求证 $1<S<2$.

2. 设 x,y,z 为不全相等的非负实数，求证 $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2}>\frac{3}{2}(x+y+z)$.

3. 已知 $a+b+c>0$，$abc>0$，$ab+bc+ca>0$，求证 $a>0$，$b>0$，$c>0$.

*4. 设 $0<a,b,c<1$，求证 $(1-a)b$，$(1-b)c$，$(1-c)a$ 不可能同时大于 $\frac{1}{4}$.

训练五

1. 当 $n\in\mathbf{N}^{*}$ 时，求证 $\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

2. 已知 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边，求证：

(1) $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geqslant 3$；

(2) $abc\geqslant(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

3. 设 $a\neq 0$，$a,b\in\mathbf{R}$，试比较 $\frac{|a^2-b^2|}{2|a|}$ 与 $\frac{|a|-|b|}{2}$ 的大小.

研究性习作

已知三个不等式 $\frac{1}{\sqrt{2}}<1$，$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}<\sqrt{2}$，$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{12}}<\sqrt{3}$，由此能得到怎样的一般不等式？证明你的结论.