



21世纪数学系列教材

# 模糊数学方法及其应用

第三版

谢季坚 刘承平



华中科技大学出版社  
<http://www.hustp.com>

- 强调“数学概念、方法”，重视“应用技术、模型”
- 严谨、适度地阐述基本原理，通俗、直观地介绍背景知识
- 联系实际，突出应用，典型实例结合软件计算
- 反复锤炼，精益求精，特点鲜明，多年长销不衰

21 世纪数学系列教材

# 模糊数学方法及其应用

第三版

谢季坚 刘承平

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

模糊数学方法及其应用 第三版/谢季坚 刘承平  
武汉:华中科技大学出版社,2006年8月  
ISBN 7-5609-3795-0

- I. 模…
- II. ①谢… ②刘…
- III. 模糊数学-方法-应用
- IV. O159

模糊数学方法及其应用 第三版

谢季坚 刘承平

责任编辑:徐正达  
责任校对:刘 竣

封面设计:刘 卉  
责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社  
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司  
印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:787×960 1/16 印张:16.25 字数:280 000  
版次:2006年8月第3版 印次:2006年8月第10次印刷 定价:22.80元  
ISBN 7-5609-3795-0/O·393

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

## 内 容 简 介

本书讲述了模糊数学方法及其应用,主要包括模糊集合及其运算、模糊统计方法、模糊聚类分析、模糊模型识别、模糊决策(含层次分析法)、模糊线性规划、模糊控制以及它们在科学技术与经济管理中的应用等.

本书的编写兼顾了“数学概念、方法”与“应用技术、模型”两个方面,本书的特点是具有较好的通俗性、应用性和可操作性.

本书可作为大学本科生、研究生的教材或参考书,也可供广大科技工作者使用.

## 第三版前言

本书第二版自2000年出版以来,印刷多次,受到读者的欢迎.根据读者的建议和社会需求,这次修订工作增加了层次分析法(4.4.4节)、模糊控制(第6章)和模糊聚类分析及本书中部分算法的MATLAB源程序(附录B)等内容,同时更新了一些模糊数学联系实际例子.编者在引用这些公开发表的论文时作了适当的加工处理,并注明了论文的出处,在此向论文的作者致谢.

本书具有如下特点:

1. 通俗性强. 在编写时注重问题的实际背景与概念的直观描述,解释多于推导,逻辑推理做到适可而止,行文流畅,通俗易懂.
2. 应用性强. 讲求实效,注重理论联系实际,特别是模糊数学理论在科学技术和经济管理中的应用.
3. 可操作性强. 当对每个数学模型有了初步了解时,参照一个实际应用例子,就可以联系实际去操作了,方法明确,步骤具体.

本书中所有的计算机程序均由编者本人在普通计算机上运行通过,其中MATLAB程序使用的是MATLAB6.5软件包,lindo程序使用的是lindo6.0注册版,lingo程序使用的是lingo8.0注册版.

本书第三版仍由谢季坚主编,谢季坚教授编写第1、2、3、4章,刘承平副教授编写第5、6章,4.4.4节及附录B,最后由谢季坚教授整合、统稿.

本书的出版,得到华中科技大学出版社的热心支持和大力帮助,在此表示衷心的感谢.

由于作者水平所限,书中难免存在缺点和错误,恳请读者批评指正.

编 者

2005年12月于武汉

## 第二版前言

本书是作者在为研究生编写的《农业科学中的模糊数学方法》(华中理工大学出版社,1993年版)的基础上,结合多年的教学与科研工作实践修订而成的.之所以更名为《模糊数学方法及其应用》是为了兼顾“数学概念、方法”与“应用技术、模型”这两个方面,这也正是本书的特点.

作者在编写本书时,注重模糊数学概念与定理的直观描述,以启迪学生的思维;对模糊数学方法在科学技术与经济管理中的应用,给予了特别关注.每一章都有一节专门讲授模糊数学方法应用的内容,以培养学生应用数学的能力.全书叙述简明流畅,方法与过程思路清晰,步骤具体,可操作性强.

本书由谢季坚主编.谢季坚教授负责编写前4章,刘承平副教授负责编写第5章并开发了与本书配套使用的“模糊数学模型CAC”应用软件,为学习提供了很大方便.

在本书出版的时候,我们要感谢华中农业大学副校长邓秀新教授、李忠云教授以及研究生处、教务处、基础课部所给予的支持与帮助,还要感谢华中理工大学出版社的领导和编辑为本书出版所付出的辛勤劳动.

由于作者水平所限,书中一定存在不少缺点与错误,恳请读者批评指正.

编者

1999 国庆 50 周年于

武汉

# 目 录

<b>第1章 模糊集的基本概念</b> .....	(1)
1.1 模糊数学概述 .....	(1)
1.2 模糊理论的数学基础 .....	(3)
1.2.1 经典集合 .....	(3)
1.2.2 映射与扩张 .....	(5)
1.2.3 二元关系 .....	(8)
1.2.4 格 .....	(12)
1.3 模糊子集及其运算 .....	(14)
1.3.1 模糊子集的概念 .....	(14)
1.3.2 模糊集的运算 .....	(17)
1.3.3 模糊集的其他运算 .....	(20)
1.4 模糊集的基本定理 .....	(22)
1.4.1 $\lambda$ -截集 .....	(22)
1.4.2 分解定理 .....	(25)
1.4.3 扩张原理 .....	(27)
1.5 隶属函数的确定 .....	(28)
1.5.1 隶属度的客观存在性 .....	(29)
1.5.2 隶属函数的确定方法 .....	(29)
1.6 模糊集的应用 .....	(37)
习题1 .....	(40)
<b>第2章 模糊聚类分析</b> .....	(44)
2.1 模糊矩阵 .....	(44)
2.1.1 模糊矩阵的概念 .....	(44)
2.1.2 模糊矩阵的运算及其性质 .....	(45)
2.1.3 模糊矩阵的基本定理 .....	(50)

• 2 • 模糊数学方法及其应用(第三版)

2.2 模糊关系 .....	(51)
2.2.1 模糊关系的定义 .....	(51)
2.2.2 模糊关系的合成 .....	(53)
2.2.3 模糊等价关系 .....	(55)
2.3 模糊等价矩阵 .....	(55)
2.3.1 模糊等价矩阵及其性质 .....	(55)
2.3.2 模糊相似矩阵及其性质 .....	(58)
2.4 模糊聚类分析方法 .....	(61)
2.4.1 模糊聚类分析的一般步骤 .....	(61)
2.4.2 最佳阈值 $\lambda$ 的确定 .....	(73)
2.5 模糊聚类分析的应用 .....	(74)
习题2 .....	(89)
<b>第3章 模糊模型识别 .....</b>	<b>(93)</b>
3.1 模糊模型识别简介 .....	(93)
3.1.1 模型识别 .....	(93)
3.1.2 模糊模型识别的概念 .....	(93)
3.2 第一类模糊模型识别 .....	(94)
3.2.1 模糊向量 .....	(94)
3.2.2 最大隶属原则 .....	(95)
3.2.3 阈值原则 .....	(101)
3.3 第二类模糊模型识别 .....	(101)
3.3.1 贴近度 .....	(102)
3.3.2 择近原则 .....	(105)
3.3.3 多个特性的择近原则 .....	(106)
3.3.4 贴近度的改进 .....	(107)
3.4 模糊模型识别的应用 .....	(113)
习题3 .....	(124)
<b>第4章 模糊决策 .....</b>	<b>(128)</b>
4.1 模糊意见集中决策 .....	(128)



4.1.1 问题的数学提法 .....	(128)
4.1.2 模糊意见集中决策的方法与步骤 .....	(128)
4.2 模糊二元对比决策 .....	(130)
4.2.1 模糊优先关系排序决策 .....	(130)
4.2.2 模糊相似优先比决策 .....	(137)
4.2.3 模糊相对比较决策 .....	(141)
4.3 模糊综合评判决策 .....	(143)
4.3.1 经典的综合评判决策 .....	(143)
4.3.2 模糊映射与模糊变换 .....	(144)
4.3.3 模糊综合评判决策的数学模型 .....	(148)
4.3.4 模糊综合评判决策模型的改进 .....	(155)
4.4 权重的确定方法 .....	(162)
4.4.1 确定权重的统计方法 .....	(162)
4.4.2 模糊协调决策法 .....	(165)
4.4.3 模糊关系方程法 .....	(168)
4.4.4 层次分析法 .....	(175)
4.5 模糊决策的应用 .....	(179)
习题4 .....	(191)
<b>第5章 模糊线性规划</b> .....	<b>(195)</b>
5.1 线性规划模型简介 .....	(195)
5.1.1 线性规划问题的数学模型 .....	(195)
5.1.2 线性规划问题的常用软件求解方法 .....	(196)
5.2 模糊环境下的条件极值 .....	(197)
5.3 模糊线性规划模型 .....	(200)
5.3.1 资源限量带有模糊性 .....	(200)
5.3.2 多目标线性规划 .....	(204)
5.3.3 价值系数带有模糊性 .....	(205)
5.4 模糊线性规划的应用 .....	(209)
习题5 .....	(211)

<b>第 6 章 模糊控制</b> .....	(213)
6.1 现代控制系统简介 .....	(213)
6.1.1 连续时间控制模型 .....	(213)
6.1.2 无约束最优控制问题的求解方法 .....	(215)
6.1.3 离散时间控制模型 .....	(216)
6.2 模糊控制器 .....	(219)
6.2.1 模糊量化处理 .....	(220)
6.2.2 模糊控制规则 .....	(220)
6.2.3 单输入变量的模糊判别 .....	(221)
6.2.4 多输入变量的模糊判别 .....	(222)
6.3 单输入、单输出模糊控制器的设计 .....	(222)
6.3.1 模糊控制器的设计(一) .....	(223)
6.3.2 模糊控制器的设计(二) .....	(225)
习题 6 .....	(227)
<b>附录 A 习题答案</b> .....	(228)
<b>附录 B 本书中部分算法 MATLAB 程序</b> .....	(233)
<b>参考文献</b> .....	(248)

# 第1章 模糊集的基本概念

模糊集(也称为模糊集合)是模糊数学的基础,模糊数学则是研究和处理模糊性现象的数学方法.本章着重介绍模糊集的基本概念、运算法则、基本定理及其简单的应用.

## 1.1 模糊数学概述

1965年,美国加利福尼亚大学控制论专家扎德(L. A. Zadeh)教授在《信息与控制》杂志上发表了一篇开创性论文《模糊集合》<sup>[1]</sup>,这标志着模糊数学的诞生.扎德是世界公认的系统理论及其应用领域最有贡献的人之一,被誉为“模糊集之父”<sup>[2,3]</sup>.

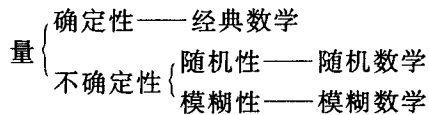
与其他学科一样,模糊数学也是因实践的需要而产生的.在日常生活中,模糊概念(或现象)处处存在,例如厚、薄,快、慢,大、小,长、短,轻、重,高、低,稀、稠,贵、贱,强、弱,软、硬,锐、钝,深、浅,美、丑,白天、黑夜,早晨、中午、傍晚,黎明、黄昏,多云、晴天、阴天、雨天,中雨、暴雨、大暴雨等.在科学技术、经济管理领域中,模糊概念(或现象)也无处不在,例如感冒、胃病、心脏病,红壤、黄壤、棕壤,蔬菜、水果,动物、植物、微生物,通货膨胀、经济繁荣、经济萧条,失业、就业,劳动密集型企业、知识密集型企业,信得过产品、合格品、次品,贫困、温饱、小康、富有等.当代科技发展的趋势之一,就是各个学科领域都要求定量化、数学化.当然也迫切要求将模糊概念(或现象)定量化、数学化,这就促使人们必须寻找一种研究和处理模糊概念(或现象)的数学方法.

众所周知,经典数学是以精确性为特征的.然而,与精确性相悖的模糊性并不完全是消极的、没有价值的.甚至可以这样说,有时模糊性比精确性还要好.例如,你要去迎接一个“大胡子、高个子、长头发、戴宽边黑色眼镜的中年男人”,尽管这里只提供了一个精确信息——男人,而其他信息——大胡子、高个子、长头发、宽边黑色眼镜、中年等都是模糊概念,但是,你将这些模糊概念经过头脑的综合分析判断,就可以找到这个人.如果这个问题用计算机精确地处理,那么就要求将此人的准确年龄与身高,胡子、头发的准确长度与根数,眼镜的边宽厘米数、黑色的程度等一一输入计算机,才可以找到这个人.如果这个人的头发中途掉了一根的话,计算机就可能找不到这个人了.由此可见,有时太精确了未必一定是好事.

模糊数学绝不是把数学变成模模糊糊的东西,它也具有数学的共性:条理分

明,一丝不苟,即使描述模糊概念(或现象),也会描述得清清楚楚.由扎德教授创立的模糊数学是继经典数学、统计数学之后数学的一个新的发展方向.统计数学将数学的应用范围从必然现象领域扩大到偶然现象领域,模糊数学则把数学的应用范围从精确现象领域扩大到模糊现象领域.

在人类社会和各个科学领域中,人们所遇到的各种量大体上可以分成两大类:确定性的与不确定性的,而不确定性又可分为随机性和模糊性.人们正是用三种数学来分别研究客观世界中不同的量<sup>[4]</sup>,即



在这种框架内,数学模型也可以分为三大类.

第一类是确定性数学模型.这类模型研究的对象具有确定性,对象之间具有必然的关系,最典型的就是用微分法、微分方程、差分方程所建立的数学模型.

第二类是随机性数学模型.这类模型研究的对象具有随机性,对象之间具有偶然的关系,如用概率分布方法、马尔可夫(Markov)链所建立的数学模型.

第三类是模糊性数学模型.这类模型所研究的对象与对象之间的关系具有模糊性.这就是本书所要讨论的模型.

为了弄清两种不确定性,下面介绍两种不确定性之间的区别.

随机性的不确定性,也就是概率的不确定性.例如,“明天有雨”、“掷一骰子出现6点”等,它们的发生是一种偶然现象,具有不确定性.在这里,事件本身是确定的,而事件的发生不确定.只要时间过去,到了明天,“明天有雨”是否发生就变成确定的了.“掷一骰子出现6点”,只要实际做一次实验,它就变成确定的了.而模糊性的不确定性,即使时间过去了,或者实际做了一次实验,它们仍然是不确定的.这主要是因为事件本身(如“青年人”、“高个子”等)是不确定的,具有模糊性,是由概念、语言的模糊性产生的.

模糊数学从诞生至今,已经四十多年了.早在1978年,国际上第一本以模糊数学为主题的学术刊物《Fuzzy Sets and Systems》在欧洲创刊.模糊数学自1976年传入我国后得到了迅速发展:1980年成立了中国模糊数学与模糊系统学会,1981年创办了《模糊数学》(武汉,华中工学院)杂志,1987年创办了《模糊系统与数学》(长沙,国防科技大学)杂志.我国已经成为模糊数学研究的四大中心(美国、西欧、日本、中国)之一.北京师范大学汪培庄、四川大学刘应明等教授对模糊数学的研究取得了显著成绩.

模糊数学在实际中的应用几乎涉及国民经济的各个领域,尤其在科学技术、经济管理、社会科学方面得到了广泛而又成功的应用.比如,在生物学发展史上,由于科学技术的不断进步,人们发现在动物与植物之间存在着“中介状态”,于是又分出

一类微生物. 即使将生物分成三类后, 又发现还存在着“中介状态”, 于是又有人主张将生物分为五类、六类. 这一现象用模糊集合就可得到合理的解释. 再如, 对某个领域的经济发展水平的评价, 往往划分为富裕型、小康型、温饱型、贫困型, 这些都是模糊的, 只有通过模糊数学模型才能得到合乎实际的评价.

特别值得一提的是, 模糊理论在智能计算机的开发与应用上起到了重要作用. 20世纪80年代以来, 空调器、电冰箱、洗衣机、洗碗机等家用电器中已广泛采用了模糊控制技术. 日本在这方面已走在世界前列, 我国也于20世纪90年代初在杭州生产了第一台模糊控制洗衣机. 由此看来, 模糊数学已逐步进入寻常百姓家了.

## 1.2 模糊理论的数学基础

### 1.2.1 经典集合

#### 1. 集合及其表示

集合是现代数学的一个基础概念. 一些不同对象的全体称为集合, 简称为集, 常用大写英文字母  $A, B, X, Y$  等表示. 本书有时称集合为经典集合, 这是为了区别于模糊集合. 集合内的每个对象称为集合的元素, 常用小写英文字母  $a, b, c, \dots$  表示. “ $a$  属于  $A$ ”记为  $a \in A$ , “ $a$  不属于  $A$ ”记为  $a \notin A$ .

不含任何元素的集合称为空集, 记为  $\emptyset$ .

只含有限个元素的集合, 称为有限集, 有限集所含元素的个数称为集合的基数. 包含无限个元素的集合称为无限集. 以集合作为元素所组成的集合称为集合族. 所谓论域是指所论及对象的全体, 它也是一个集合, 也称为全集, 常用大写英文字母  $X, Y, U, V$  等表示.

集合的表示法主要有两种:

1° 枚举法 如由20以内的质数组成的集合可表示为

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\},$$

自然数集可表示为

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

2° 描述法 使  $P(x)$  成立的一切  $x$  组成的集合可表示为  $\{x | P(x)\}$ . 如实数集可表示为  $\{x | -\infty < x < +\infty\}$ , 简记为  $\mathbf{R}$ ;  $B = \{x | x^2 - 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$  实际上是由元素  $-1$  与  $1$  组成的集合.

经典集合具有两条最基本的属性: 元素彼此相异, 范围边界分明. 一个元素  $x$  与集合  $A$  的关系是, 要么  $x$  属于  $A$ , 要么  $x$  不属于  $A$ , 二者必居其一.

例如, 设论域  $U = \{\text{某班学生}\}$ , 把某班男生组成的集合记为  $A$ , 即  $A = \{\text{男生}\}$ . 那么, 这个班的每个学生之间彼此不相同, 而且可以判明每个学生是否属于  $A$ . 如果以

某班“高个子”学生为元素,就不能组成一个经典集合,因为“高个子”无分明界限.

## 2. 集合的包含

集合的包含概念是集合之间的一种重要关系.

**定义 1.2.1** 设有集合  $A$  和  $B$ ,若集合  $A$  的每个元素都属于集合  $B$ ,即  $x \in A \Rightarrow x \in B$ ,则称  $A$  是  $B$  的子集,记为  $A \subseteq B$  或  $B \supseteq A$ ,读作“ $A$  包含于  $B$  中”或“ $B$  包含  $A$ ”.

显然  $A \subseteq A$ .空集  $\emptyset$  是任何集合  $A$  的子集,即  $\emptyset \subseteq A$ .若  $A \subseteq B, B \subseteq C$ ,则  $A \subseteq C$ .

**定义 1.2.2** 设有集合  $A$  和  $B$ ,若  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq A$ ,则称集合  $A$  与集合  $B$  相等,记为  $A = B$ .

**定义 1.2.3** 设有集合  $U$ ,对于任意集合  $A$ ,总有  $A \subseteq U$ ,则称  $U$  为全集.

全集是个具有相对性的概念.例如,实数集对于整数集、有理数集而言是全集,而整数集对于偶数集、奇数集而言是全集.

**定义 1.2.4** 设有集合  $A$ , $A$  的所有子集所组成的集合称为  $A$  的幂集,记为  $\mathcal{P}(A)$ ,即  $\mathcal{P}(A) = \{B | B \subseteq A\}$ .

**例 1.2.1** 设  $A = \{a, b\}$ ,则  $A$  的幂集为  $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ .

由定义 1.2.4 知,幂集是集合族.

## 3. 集合的运算

**定义 1.2.5** 设  $A, B \in \mathcal{P}(U)$ , $U$  是论域,规定:

$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ ,称为  $A$  与  $B$  的并集;

$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ ,称为  $A$  与  $B$  的交集;

$A^c \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$ ,称为  $A$  的余集\*.

## 4. 集合运算(并、交、余)的性质

**定理 1.2.1** 设  $A, B, C \in \mathcal{P}(U)$ , $U$  是论域,则有:

- 1° 幂等律  $A \cup A = A, A \cap A = A$ ;
- 2° 交换律  $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$ ;
- 3° 结合律  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ;
- 4° 吸收律  $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$ ;
- 5° 分配律  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$   
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ;
- 6° 0-1 律  $A \cup U = U, A \cap U = A, A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$ ;
- 7° 还原律  $(A^c)^c = A$ ;
- 8° 对偶律  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ ;
- 9° 排中律  $A \cup A^c = U, A \cap A^c = \emptyset$ .

这些性质均可由并、交、余的定义直接推出.上述两个集合的并、交运算可推广

\* 国家标准规定  $A$  的余集用  $\bar{A}$  表示,为了与大多数教材呼应,本书仍用  $A^c$  表示.

到任意多个集合的并、交运算.

### 5. 集合的直积

在日常生活中,有许多事物是成对出现的,且具有一定的顺序,例如上、下、左、右,平面上点的坐标等.任意两个元素  $x$  与  $y$  配成一个有序的对  $(x, y)$ ,称为  $x$  与  $y$  的序对.有序是指当  $x \neq y$  时,  $(x, y) \neq (y, x)$ ,  $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x', y = y'$ .

**定义 1.2.6** 设  $X, Y$  是两个集合,由  $X$  的元素与  $Y$  的元素配成的全体序对组成一个集合,称为  $X$  与  $Y$  的直积(或笛卡儿(Descartes)积),记为  $X \times Y$ ,即

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}.$$

**例 1.2.2** 设  $X = \{1, 2\}, Y = \{0, 2\}$ ,则

$$X \times Y = \{(1, 0), (1, 2), (2, 0), (2, 2)\},$$

$$Y \times X = \{(0, 1), (0, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$

一般地,  $X \times Y \neq Y \times X$ .

## 1.2.2 映射与扩张

### 1. 映射

**定义 1.2.7** 设  $X$  与  $Y$  是两个非空集,如果存在一个对应规则  $f$ ,使得对于任一元素  $x \in X$ ,有唯一元素  $y \in Y$  与之对应,则称  $f$  是从  $X$  到  $Y$  的映射,记为

$$f: X \rightarrow Y,$$

$$x \mapsto f(x) = y \in Y.$$

$y$  称为  $x$  在映射  $f$  下的像,  $x$  称为原像.

集  $X$  称为映射  $f$  的定义域,记为  $D(f)$ . 集

$$f(X) = \{f(x) | x \in X\}$$

称为映射  $f$  的值域,记为  $R(f)$ .一般地,  $f(X) \subseteq Y$ .若  $f(X) = Y$ ,则称  $f$  是从  $X$  到  $Y$  上的映射或从  $X$  到  $Y$  的满映射.

映射概念是函数概念的推广.微积分中定义在区间  $[a, b] \subseteq \mathbf{R}$  上的一元函数  $f(x)$ ,就是从  $[a, b]$  到  $\mathbf{R}$  的映射,即

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R},$$

$$x \mapsto f(x) = y.$$

**定义 1.2.8** 如果映射  $f: X \rightarrow Y, \forall x_1, x_2 \in X, \text{成立 } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ,则称  $f$  是从  $X$  到  $Y$  的 1—1 映射.如果  $f: X \rightarrow Y$  是 1—1 的满映射,则称  $f$  为从  $X$  到  $Y$  的 1—1 对应.

**例 1.2.3** 设映射  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \sin x$ ,则  $f$  不是  $\mathbf{R}$  到  $\mathbf{R}$  的满映射,而是  $\mathbf{R}$  到区间  $[-1, 1]$  的满映射.

**例 1.2.4** 设  $C[a, b]$  是定义在  $[a, b]$  上的实连续函数集.定义  $C[a, b]$  到  $\mathbf{R}$  上的一个映射

$$f: \varphi(x) \rightarrow \int_a^b \varphi(x) dx, \quad \varphi(x) \in C[a, b].$$

这是一个满映射,但不是1—1映射.

**例 1.2.5** 设  $X = \{a, b, c, d\}, Y = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $f$  是从  $X$  到  $Y$  的映射,  $f = \{(a, 1), (b, 3), (c, 4), (d, 2)\}$ , 则  $f$  是满映射, 又是1—1映射, 所以  $f$  是1—1对应.

### 2. 集合的特征函数

**定义 1.2.9** 设  $A \in \mathcal{F}(U)$ ,  $U$  是论域, 具有如下性质的映射

$$\chi_A: U \rightarrow \{0, 1\},$$

$$x \mapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

$\chi_A(x)$  称为集合  $A$  的特征函数(图 1.1).

由定义 1.2.9 可知, 集合  $A$  由特征函数  $\chi_A(x)$  唯一确定. 例如, 论域  $U$  为实数集, 则集合

$$A = \{x \mid |x| \leq 1\}$$

的特征函数为

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

请读者画出此特征函数的图形.

由此看出, 特征函数与集合是互相决定的, 是一个事物从不同角度给出的描述. 下面是特征函数与集合之间的几个基本关系:

$$1^\circ A = U \Leftrightarrow \chi_A(x) = 1, A = \emptyset \Leftrightarrow \chi_A(x) = 0;$$

$$2^\circ A \subseteq B \in \mathcal{F}(U) \Leftrightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x);$$

$$3^\circ A = B \in \mathcal{F}(U) \Leftrightarrow \chi_A(x) = \chi_B(x).$$

基本关系 3° 表明,  $U$  的任一子集  $A$  完全由它的特征函数确定.

特征函数还具有下列运算性质:

$$\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x), \quad \chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x),$$

$$\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x).$$

此处“ $\vee$ ”、“ $\wedge$ ”分别是取大、取小运算, 即

$$a \vee b = \max(a, b), \quad a \wedge b = \min(a, b).$$

上述性质表明, 应用特征函数同样可以方便地讨论集合间的关系和运算.

### 3. 映射的扩张

上述映射概念实际上是把点  $x$  映射为点  $y = f(x)$ , 但在实际中往往需要将点映射为集合(图 1.2).

**定义 1.2.10** 设  $f: X \rightarrow Y, x \mapsto f(x)$ , 则称映射

$$f: X \rightarrow \mathcal{F}(Y),$$

$$x \mapsto f(x) = B \in \mathcal{F}(Y)$$

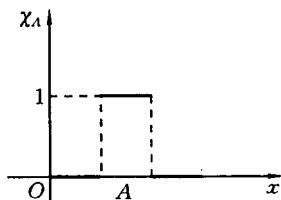


图 1.1

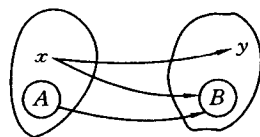


图 1.2



为  $X$  到  $Y$  的点-集映射.

定义 1.2.11 设  $T: X \rightarrow Y, x \mapsto f(x)$ , 则称映射

$$\begin{aligned} T: \mathcal{F}(X) &\rightarrow \mathcal{F}(Y), \\ A &\mapsto T(A) \end{aligned}$$

为  $X$  到  $Y$  的集合变换.

例 1.2.6 设  $X = \{a, b\}, Y = \{1, 2, 3\}$ , 则  $\mathcal{F}(X) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}, \mathcal{F}(Y) = \{\emptyset, Y, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ .

令  $f: X \rightarrow Y, a \mapsto \{1\}, b \mapsto \{2, 3\}$ ,

$T: \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y), \emptyset \mapsto \emptyset, \{a\} \mapsto \{1, 2\}, \{b\} \mapsto \{1\}, X \mapsto Y$ ,

则  $f$  是  $X$  到  $Y$  的点-集映射, 而  $T$  是  $X$  到  $Y$  的集合变换.

定义 1.2.12 (经典扩张原理) 设映射  $f: X \rightarrow Y, x \mapsto f(x) = y. \forall A \in \mathcal{F}(X)$ , 令

$$f(A) = \{y \in Y \mid y = f(x), x \in A\},$$

则集合  $f(A) \in \mathcal{F}(Y)$  称为集  $A$  在  $f$  下的像;  $\forall B \in \mathcal{F}(Y)$ , 令

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\},$$

则集合  $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}(X)$  称为集  $B$  在  $f$  下的原像 (图 1.3).

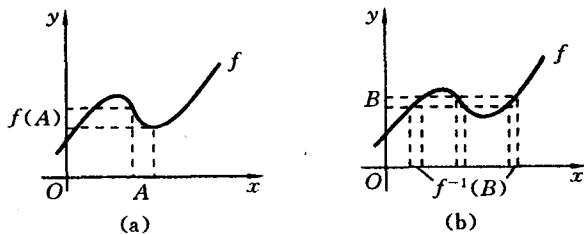


图 1.3

于是, 映射  $f: X \rightarrow Y, x \mapsto f(x) = y$  诱导出映射

$$\begin{aligned} f: \mathcal{F}(X) &\rightarrow \mathcal{F}(Y), \\ A &\mapsto f(A) \in \mathcal{F}(Y), \\ f^{-1}: \mathcal{F}(Y) &\rightarrow \mathcal{F}(X), \\ B &\mapsto f^{-1}(B) \in \mathcal{F}(X). \end{aligned}$$

其特征函数分别为

$$\chi_{f(A)}(y) = \bigvee_{f(x)=y} \chi_A(x), \quad \chi_{f^{-1}(B)}(x) = \chi_B(f(x)).$$

这就是扩张原理, 它实际上是一个定义.

例 1.2.7 设  $X = \{1, 2\}, Y = \{1, 3, 4\}$ , 映射  $f: X \rightarrow Y$  定义为  $f(x) = x^2$ , 则

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(X) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, X\}, \\ \mathcal{F}(Y) &= \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}, Y\}. \end{aligned}$$