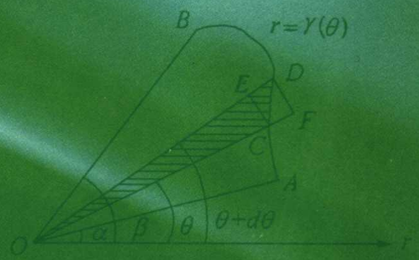
大学数学系列丛书

微积分辅导(下)

Weijifen Fudao

龚漫奇　吴灵敏　缪克英　编著



清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
北京交通大学出版社
http://press.bjtu.edu.cn

大学数学系列丛书

微积分辅导(下)

龚漫奇　吴灵敏　缪克英　编著

清华大学出版社
北京交通大学出版社
·北京·

内容简介

本书共分5章，主要内容包括：多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程。此外，本书后附有模拟试卷及其参考答案。

本书可作为高等院校的理工科专业和经济管理类专业各微积分课程的辅导教材，也可供各类成人教育和自学考试人员使用。

图书在版编目（CIP）数据

微积分辅导．下/龚漫奇，吴灵敏，缪克英编著．—北京：清华大学出版社；北京交通大学出版社，2007.4

（大学数学系列丛书）

ISBN 978－7－81082－956－4

Ⅰ．微…　Ⅱ．①龚…　②吴…　③缪…　Ⅲ．微积分-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第023614号

责任编辑：黎　丹
出版发行：清华大学出版社　邮编：100084　电话：010－62776969
　　　　　北京交通大学出版社　邮编：100044　电话：010－51686414
印 刷 者：北京瑞达方舟印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　印张：20.25　字数：454千字
版　　次：2007年3月第1版　2007年3月第1次印刷
书　　号：ISBN 978－7－81082－956－4/O・44
印　　数：1～5 000册　定价：29.00元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢。
投诉电话：010－51686043，51686008；传真：010－62225406；E-mail：press@bjtu.edu.cn。

“大学数学系列丛书”
编写委员会成员名单

总序

随着人类进入 21 世纪，科学技术的发展日益迅猛。在当今这个信息时代中，各种竞争的关键就是科学技术的竞争，科学技术的竞争突出地体现在人才的竞争上，而人才的竞争其实就是教育的竞争。当前的知识经济时代，将对人类知识和科学技术的发展、经济增长因素和方式乃至社会生活，引发新的、深刻的变化。在知识经济时代，国家的竞争能力和综合国力的强弱，不仅取决于其拥有的自然资源，更重要的是取决于科学技术和知识更新的发展水平，尤其是知识创新与技术创新的能力。知识经济的第一资源是智力资源，拥有智力资源的是人才，人才来自教育。要提高民族的创新能力，归根到底要提高全体民众的教育水平，培养大批具有创新意识、创新精神和创新能力的人才。

在我国的高等教育中，数学教育可以说起着举足轻重的作用。许多专家指出，数学教育在人类的精神营养中，确实有“精神钙质”的作用，因为数学对一个人的思想方法、知识结构与创造能力的形成起着不可缺少的作用。很难想像，一个数学知识贫乏的人，会在科学上有所建树。因此，全面提高我国理工科大学中非数学专业大学生的数学水平，将关系到我国各行各业中高级专门人才的素质和能力，关系到我国未来科学技术的发展水平和在世界上的竞争力，是国家百年树人基业中的重要一环。

正是基于以上的考虑，我们借鉴了我国近几年高等学校教学改革，特别是数学教学改革的经验，借鉴近几年我校数学教学改革的一些实践与做法，组织一批在大学数学公共课教学中有丰富教学经验的教师，在精心筹划、多方面研讨的基础上，编写了这一套“大学数学系列丛书”。

本系列教材在大学数学的三门重要的基础课教材——《微积分》、《线性代数与解析几何》、《概率论与数理统计》上下了很大的工夫。我们不仅按照教学的基本要求仔细编写了各章的内容，而且在各章中也融入了当前教学改革的一些经验；同时注意编写了与主教材配套的辅导教材，这样可以帮助学生更好地理解主教材中的内容和学习方法。在辅导教材的编写上，我们注重对主教材内容知识的扩展，同时也帮助学生掌握好各门课程的学习方法。但是，我们反对将主教材中的习题在辅导教材中简单地给出题解的做法。我们认为，这种做法是对大学生的学习积极性和创造性的扼杀。另外，为了适应目前大学数学教学改革的需要，我们编写了《数学实验基础》和《数学建模基础》两本教材。我们认为，数学实验、数学建模与传统大学数学教学内容相结合，将会极大地丰富数学教学内容，增强大学生学习数学、

应用数学的兴趣与积极性，为他们在将来的工作中想到数学、运用数学解决实际问题打下一个良好的基础。同时，数学实验课与数学建模课的开设，将会给传统的数学教学方法带来更有意义的改革。另外，为了配合我校的“高等数学方法 ”选修课及参加北京市大学生（非数学专业）数学竞赛培训的需要，我们还编写了《高等数学方法导引》教材，使大学生中有数学天赋的同学能更进一步地掌握高等数学的解题方法。

本系列教材在编写过程中，得到了北京交通大学教务处的大力支持，在教材的出版中，得到了北京交通大学出版社的热情帮助，在此，本系列丛书的全体编委向他们表示衷心的感谢。

本系列教材适用于高等院校的理工科专业和经济管理类专业的数学教学，也可以作为相关专业学生的自学教材和培训教材。

本系列教材的编写是大学数学基础课教学中的一种探索，其中一些做法，欢迎各方读者在对教材的使用与阅读中评头论足，不吝赐教，我们将在今后的修改中使其更加完善。

“大学数学系列丛书”编写委员会
2007 年 2 月

前言

微积分是高等院校理工科各专业必修的一门学时最多的基础课，总的来说这门课有以下3个特点。

(1) 门坎高。开课伊始学的就是这门课中最难理解的“极限的 ε-δ 语言定义”。

(2) 内容多。首先微积分所涉及的初等数学几乎包括了全部的中学数学；其次微积分作为大学数学的基础课，它包含了众多其他数学课的基础内容，这些课程包括：数理逻辑、实变函数（多学时内容）、线性代数、空间解析几何、偏微分方程、线性规划、非线性规划、积分变换、复变函数等；再有，微积分需要记忆的内容较多，仅微积分下册需要记忆的定理和公式就有50多个，而且这些公式是很难在考场上凭逻辑临时推出的。

(3) 难度大。微积分的基本概念都是非常抽象的，有些甚至带有哲学色彩，所以很难理解。另外，微积分含有一些难度极大的题目。

正是基于微积分课程的以上3个特点，我们编写了《微积分辅导》（上、下册），希望能够帮助学生学好这门课。下面从两个方面介绍如何利用本书来学习微积分。

第一，为了透彻理解和灵活掌握微积分，建议在使用本书时，首先应熟知每一章的基本内容，然后再看例题。看例题时，先只看题目，不看分析与解答，自己想一想，动手算一算，尽量能自己给出结果，然后再去看例题的分析和解答。也许有人会认为这样做太浪费时间，尤其是经过较长时间的思考仍然没有得出正确的结论时。实际上经过多年的教学实践证明，在学习效果上，主动而深刻地对典型问题的思考要比被动地接受大量的解题信息好得多，而且在主动思考没有得到正确解时也是如此。这是因为在长时间思考没有得到正确解后再看正确的解答会给人留下更加深刻的印象。另外，对于不是自己独立做出的题目，应注意其解题思路，等过一段时间，已经淡忘了该题的解题过程后，再重解该题看能否想起它的解题思路并给出正确解，这是一种较好的反复学习的方法。

第二，从现实的角度，尤其是对数学基础不太好的学生，针对上面提到的学习微积分课的3个难点，下面给出具体的学习对策。对于开始上课就碰到最难理解的“极限的 ε-δ 语言定义”，首先要多从直观的角度去理解极限，然后考查严格定义是怎样从直观中抽象出来的；

如果还是难于理解，可先将 ε-δ 的定义背记下来，反复默写，即使一时不能理解也没关系，只要在后面的学习中反复地对比思考，一般都会逐渐加深对 ε-δ 语言的理解。另外，即使最终还不能理解微积分中“ε-δ 语言”，也不妨碍学习微积分的基本原理和基本应用。对于学习微积分的第二个难点：内容多，其实本书的主要目的就是为了帮助学生克服这一困难的。面对众多的内容和多变的题型，最重要的就是多记、多看、多练。所谓“多记”，就是对于必须记忆的公式和定理（即本书的基础内容部分）要熟记于心。注意“多记”是指反复地记，而不是大量地记。所谓“多看”，就是要多看一些题目，多看一些典型例题的解法。最后，也是最重要的，是“多练”，因为记下了公式不等于会用公式，看懂了别人解题并不能说明自己会解题（经常出现这样的情况，考试后教师说某题我讲过，但该题的得分率却很低，学生说讲的时候都懂，一做题就不会了）。为此下面推荐一种效率较高的复习方法（即“多练”的方法），先整理好应背记的公式和定理，然后开始做历届的考题，不会做时看解答或问会做的人，找出是哪个应背的公式没有理解，做个记号，然后消化理解，学会解这类题目。这样一张一张做卷子，一次一次理解还未掌握而又应该掌握的内容，就可得到较好的复习效果。对于学习微积分的第三个难点：难度大，首先“难度”是一个相对的概念，许多题目，对于没见过该种题型的人是很难的，而对于学习过这种题型的人就不是难题了，因此适当地学习一些常见的题型对于掌握微积分这门课程是必需的。本书的例题就是由富有微积分教学经验的教师为提高学生解题能力所精选的最具代表性的题目。其次，对于学习的深度，学生要根据自身的条件量力而行，本书的例题都标有难度，“A 类”为较易，“C 类”为较难，“B 类”为中等。一般地，只要掌握 A 类、B 类题目就已经达到这门课的基本要求了。

本套书共分 11 章，上册 6 章，即预备知识、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用，下册 5 章，即多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程，每章包括 3 个部分：基本内容、例题、测验与练习。另外书后还附有北京交通大学微积分课程的期末试卷及其解答。

本书由龚漫奇主编，负责全书的统一协调、编纂和定稿，具体的编写分工为：龚漫奇编写第 8、11 章，缪克英编写第 7、10 章，吴灵敏编写第 9 章。

由于水平所限，书中缺点、错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者
2007 年 2 月

目 录

第 7 章

多元函数微分学

7.1 基本内容

1. 了解多元函数的概念

1）多元函数的概念

设 D 是 n 维空间的一个点集，如果对每个点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in D$，变量 z 按法则 f，总有唯一确定的数与之对应，则称 f 是 D 上的一个 n 元函数（或称变量 z 是变量 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 的 n 元函数），记作 $z=f(P)$ 或 $z=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$D$ 称为 f 的定义域，$W=f(D)=\{z \mid z=f(P), P\in D\}$称为 f 的值域.

2）二元函数的几何意义

二元函数 $z=f(x, y)$，$(x, y)\in D$，一般地，D 是 xOy 平面上的一个区域，其图形由空间的点集$\{(x, y, z) \mid z=f(x, y), (x, y)\in D\}$组成，是空间的一张曲面. 曲面投影到 xOy 平面上为 D，过任意点 $(x, y)\in D$，作垂直于 xOy 平面的直线与该曲面交于点$(x, y, f(x, y))$.

2. 了解二元函数极限与连续的概念，掌握有界闭区域上二元函数连续的性质

1）多元函数极限的概念

设 $z=f(P)$，$P\in D$，且在 P_0 附近（即 P_0 的某空心邻域内）总有 D 中的点，若对任意 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $0<|PP_0|<\delta$ 及 $P\in D$ 时，总有 $|f(P)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为 $P\to P_0$ 时 $f(P)$的极限，记作$\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=A$.

特别地，对二元函数记作

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)}f(x, y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x, y)$$

2）多元函数连续的概念

设 $z=f(P)$，如果 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)$，则称 $z=f(P)$ 在 P_0 点连续；又如果 $f(P)$ 在点集 X 中的每一点都连续，则称 $f(P)$ 为 X 上的连续函数.

3）多元初等函数

由常数及基本初等函数经过有限次的四则运算复合而成且由一个式子表示的多元函数，称为多元初等函数.

多元初等函数在其定义区域内是连续的.

4）有界闭区域上多元连续函数的性质

在有界闭区域 D 上连续的函数，在 D 上一定能够取到最大值和最小值，以及介于最大值与最小值之间的任何值.

3. 掌握多元函数偏导数的概念及其计算方法

1）多元函数的偏导数概念

多元函数 $z=f(x, y, \cdots)$ 对 x 的偏导数，就是把除 x 以外的自变量都看作常数，z 看成 x 的一元函数的导数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=z'_x=f'_x=z_x=f_x$$

例如，二元函数 $z=f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 对 x 的偏导数就是把 y 看作常数，z 看成 x 的一元函数的导数，所以有极限形式

$$f'_x(x_0, y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

2）二阶偏导数

一阶偏导数的偏导数称为二阶偏导数，如

$$z''_{xx}=(z'_x)'_x,\ z''_{xy}=(z'_x)'_y,\ z''_{yx}=(z'_y)'_x,\ z''_{yy}=(z'_y)'_y$$

在 z''_{xy} 与 z''_{yx} 连续的点处有 $z''_{xy}=z''_{yx}$.

3）偏导数的求法

由偏导数的定义可知，它的计算方法就是一元函数求导的方法（除求导变量外的其余变量看作常数）.

4. 掌握多元函数全微分的概念，了解全微分存在的必要条件和充分条件，了解连续、偏导数存在及可微之间的关系，了解全微分在近似计算中的作用

1）二元函数全微分的概念

设二元函数 $z=f(x, y)$，$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$，$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，若

$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)(\rho\to 0)$，则称 $z=f(x, y)$ 在 (x, y) 可微，称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为 $f(x, y)$的全微分，记作 $dz=A\Delta x+B\Delta y$.

2）可微的必要条件（可微与偏导数存在的关系）

若 $z=f(x, y)$ 在 (x, y) 处可微，则 $f(x, y)$ 在 (x, y) 处偏导数存在，且 $dz=z'_x\Delta x+z'_y\Delta y\overset{记}{=\!=}z'_x dx+z'_y dy$.

3）可微的必要条件（可微与连续的关系）

若 $z=f(x, y)$ 在 (x, y) 处可微，则$f(x, y)$在 (x, y) 处连续.

4）可微的充分条件（偏导数连续与可微的关系）

若 $z=f(x, y)$ 的偏导数在 (x, y) 连续，则 $f(x, y)$ 在 (x, y) 处可微.

5）连续、偏导数存在及可微之间的关系

$$\begin{array}{c}\text{偏导数连续}\Rightarrow\text{可微}\Rightarrow\text{偏导数存在}\\ \Downarrow\\ \text{连续}\end{array}$$

以上导出关系不可逆.

6）利用全微分近似计算

$z=f(x, y)$ 的偏导数在点 (x_0, y_0) 连续，则当 $|\Delta x|$，$|\Delta y|$ 较小时，有

$$\Delta z\approx dz=f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

或

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\approx f(x_0, y_0)+f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

5. 熟练掌握复合函数和隐函数求导法

1）复合函数求导法

设因变量 z 是中间变量 $u, v, \cdots, w$ 的函数，而 $u, v, \cdots, w$ 又是自变量 $x, y, \cdots, t$ 的函数，则 z 成为 $x, y, \cdots, t$ 的函数. 当 z 关于 $u, v, \cdots, w$ 可微，且 $u, v, \cdots, w$ 关于 x 可偏导时，复合函数 z 关于 x 可偏导，且

$$z'_x=z'_u u'_x+z'_v v'_x+\cdots+z'_w w'_x$$

2）一阶全微分的形式不变性

设 $z=f(u, v, \cdots, w)$ 有连续偏导数，则不论 $u, v, \cdots, w$ 是自变量还是中间变量（这时 $u, v, \cdots, w$ 也有连续偏导）都有

$$dz=z'_u du+z'_v dv+\cdots+z'_w dw$$

3）隐函数求导法

设 n 个方程，m 个变量 $(m>n)$ 的隐函数方程组确定了 n 个 $m-n$ 元函数. 首先由题设

条件选定 $m-n$ 个变量为自变量，其余 n 个变量为函数变量；其次在每个方程两边对同一个自变量求导，其他自变量看成常数，而函数变量不是常数；最后从方程组解出（一般用克莱姆法则）所求的偏导数.

6. 掌握方向导数和梯度的概念及其计算法

1）方向导数的概念

设 L 是以 P_0 为起点，以 $\boldsymbol{l}$ 为方向的射线、则多元函数 $z=f(P)$ 在 P_0 点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{P_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=\lim_{P\text{沿}l\to P_0}\frac{f(P)-f(P_0)}{|PP_0|}$$

它是 $z=f(P)$ 沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的变化率.

2）梯度的概念

$z=f(x,y,\cdots,t)$ 在 P_0 点的梯度为

$$\mathbf{grad}(f(P))\Big|_{P_0}=(f_x',f_y',\cdots,f_t')\Big|_{P_0}$$

3）方向导数的计算公式

设 $z=f(x,y,\cdots,t)$ 在 P_0 可微，$\boldsymbol{l}$ 为任一非零方向，与 $\boldsymbol{l}$ 同方向的单位向量为 $\boldsymbol{e}_l^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cdots,\cos r)(\alpha,\beta,\cdots,r$ 为方向角)，则

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{P_0}&=\left(\mathbf{grad}(f(P))\Big|_{P_0}\right)\cdot\boldsymbol{l}^0\\&=(f_x'\cos\alpha+f_y'\cos\beta+\cdots+f_t'\cos r)\Big|_{P_0}\end{aligned}$$

4）方向导数与梯度的关系

函数 $z=f(P)$ 在 P_0 的方向导数 $\frac{\partial z}{\partial l}$ 中，当 $\boldsymbol{l}$ 与梯度方向同向时，$\frac{\partial z}{\partial l}$ 最大，最大值为 $\left|\mathbf{grad}(f(P))\,|_{P_0}\right|$，反向时，$\frac{\partial z}{\partial l}$ 最小，最小值为 $-\left|\mathbf{grad}(f(P))\,|_{P_0}\right|$.

7. 掌握曲线的切线与法平面和曲面的切平面与法线的概念及其求法

1）曲线的切线与法平面

设空间曲线 C：$x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$，曲线上当 $t=t_0$ 时对应的点 $M_0(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$ 处切线方程为

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$$

法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+z'(t_0)(z-z(t_0))=0$$

2）曲面的切平面与法线方程

设曲面Σ：$F(x, y, z)=0$，在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处

切平面方程为

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$$

8. 理解多元函数极值与条件极值的概念，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值及相关的应用问题

1）极值的概念

设 $z=f(P)$，对于在 P_0 点附近的点 P，总有 $f(P)>$(或$<$)$f(P_0)$，称 $f(P_0)$ 为 f 的极大（或小）值，P_0 称为极大（或小）值点.

2）条件极值的概念

若 $f(P_0)$ 是满足约束等式 $\varphi_1(P)=0$，$\varphi_2(P)=0$，…，$\varphi_k(P)=0$ 的极值，则称 $f(P)$ 为条件极值.

3）多元函数极值的必要条件

设 $z=f(P)$ 在 P_0 点取极值，且 $f(P)$ 在 P_0 的一阶偏导数存在，则这些一阶偏导数在 P_0 点的取值为 0（一阶偏导数取值为 0 的点称为驻点）.

4）二元函数极值的充分条件

设 $z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)的邻域内有二阶连续偏导，且 $f'_x(x_0, y_0)=f'_y(x_0, y_0)=0$，记 $A=f''_{xx}(x_0, y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0, y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0, y_0)$，则

当 $AC-B^2>0$ 时，$\begin{cases} A>0，f(x_0, y_0) \text{ 为极小值；} \\ A<0，f(x_0, y_0) \text{ 为极大值.} \end{cases}$

当 $AC-B^2<0$ 时，$f(x_0, y_0)$ 不是极值.

当 $AC-B^2=0$ 时，$f(x_0, y_0)$ 可能是极值，也可能不是极值.

5）拉格朗日乘数法

$z=f(P)$在条件 $\varphi_1(P)=0$，$\varphi_2(P)=0$，…，$\varphi_k(P)=0$ 下的极值点 P 满足方程

$$L'_x=0，L'_y=0，\cdots，L'_t=0，L'_{\lambda_1}=0，L'_{\lambda_2}=0，\cdots，L'_{\lambda_k}=0$$

其中

$$L=f(P)+\lambda_1\varphi_1(P)+\lambda_2\varphi_2(P)+\cdots+\lambda_k\varphi_k(P)，P=(x, y, \cdots, t)$$

L 称为拉格朗日函数，λ_1，λ_2，…，λ_k 称为拉格朗日乘数.

6）函数在有界闭区域上的最值问题及最值的实际应用问题

具体见例 7-31 和例 7-34 等.

7.2 典型例题

例题及相关内容概述

例 7-1　关于多元函数求极限的例题，之后有求极限方法小结

例 7-2　关于证明极限不存在的例题，之后有证明方法小结

例 7-3、例 7-4　关于分段函数在分段点处连续、可偏导、可微、偏导数连续的例题；例 7-4 后有讨论可微的步骤小结

例 7-5 至例 7-7　关于具体函数的偏导数、全微分的例题

例 7-8　关于全微分近似计算的例题

例 7-9　关于具体函数的复合函数求导例题

例 7-10 至例 7-12　关于抽象函数的复合函数求导的例题；例 7-12 后有复合函数求导小结

例 7-13 至例 7-15　关于一个方程的隐函数求导的例题

例 7-16、例 7-17　关于方程组的隐函数求导的例题；例 7-17 后有隐函数求导小结

例 7-18　求解简单的偏微分方程的例题

例 7-19、例 7-20　关于利用复合函数求导变换偏微分方程的例题

例 7-21、例 7-22　关于曲面的切平面的例题；例 7-22 后有求法向量的方法小结

例 7-24、例 7-25　关于曲线的切线的例题；例 7-26 后有求切向量的方法小结

例 7-26、例 7-27　关于方向导数的例题

例 7-28　关于显函数极值的例题

例 7-29　关于隐函数极值的例题，之后有求无条件极值的步骤小结

例 7-30　利用极限的保号性讨论极值的例题

例 7-31、例 7-32　关于在有界闭区域上求最值的例题，之后有求最值的步骤小结

例 7-33　方向导数和最值的综合例题

例 7-34 至例 7-36　关于最值的实际应用的例题；例 7-36 后有最值应用问题解题步骤小结

例 7-37　利用最值证明不等式的例题

例 7-38、例 7-39　利用最值的证明题

【例 7-1】（B类）　求下列极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{e^{xy}-2}{\cos^2 x+\sin^2 y+1}$　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)-\arcsin(x^2y)}{x^6y^3}$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt[3]{x}+y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^4-y^4)}{x^2+y^2}$

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{\tan x^2y}$　　(6) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

分析：这是多元函数求极限的问题.

解　(1) 利用函数的连续性

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{e^{xy}-2}{\cos^2 x+\sin^2 y+1}=\frac{e^{0\times 0}-2}{\cos^2 0+\sin^2 0+1}=-\frac{1}{2}$$

(2) 利用变量代换 $t=x^2y$，化为一元函数求极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2y)-\arcsin(x^2y)}{x^6y^3}\overset{t=x^2y}{=\!=}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-\arcsin t}{t^3}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{3t^2}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t+\dfrac{1}{2}(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}(-2t)}{6t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[-\frac{\sin t}{6t}-\frac{1}{6}(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}\right]=-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}$$

(3) 利用“无穷小×有界函数=无穷小”.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt[3]{x}+y)\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt[3]{x}\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}+\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}y\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}$$
$$=0+0=0$$

(4) 利用等价代换. 因为当 $x\to 0$，$y\to 0$ 时，$x^4-y^4\to 0$，所以 $\sin(x^4-y^4)\sim x^4-y^4$，因此

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^4-y^4)}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2-y^2)=0$$

(5) 分子有理化及分母等价代换.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{\tan x^2y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y(\sqrt{x^2y^2+1}+1)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{y}{\sqrt{x^2y^2+1}+1}=0$$

(6) 利用夹逼准则. 因为