大学数学系列教材

复变函数与积分变换

主　编　朱传喜　刘二根
副主编　刘龙章　吴阔华

FUBIAN HANSHU YU JIFEN BIANHUAN

江西高校出版社

大学数学系列教材

复变函数 变换

主　编 朱传喜 刘二根
副主编 刘龙章 吴阔华

江西高校出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/朱传喜,刘二根主编.—南昌:江西高校出版社,2005.5

ISBN 7-81075-640-0

Ⅰ.复… Ⅱ.①朱… ②刘… Ⅲ.①复变函数-高等学校-教材 ②积分变换-高等学校-教材 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 024357 号

江西高校出版社出版发行

(江西省南昌市洪都北大道 96 号)

邮编:330046 电话:(0791)8591695、8504319

江西太元科技有限公司照排部照排

江西教育印刷厂印刷

各地新华书店经销

*

2005 年 6 月第 1 版 2005 年 6 月第 1 次印刷

850mm×1168mm 1/32 7.625 印张 205 千字

印数:1~5000 册

定价:15.00 元

前 言

《复变函数与积分变换》是高等学校工科类本科生必须具备的工程数学知识，也是高等数学的重要后继课程之一．它的理论与方法被广泛地应用于自然科学的许多领域，如电子工程、控制工程、理论物理、流体力学、弹性力学、热力学等，是专业理论研究和实际应用方面不可缺少的有力的数学工具．

本书在教学内容的深度和广度方面按照教育部《面向21世纪高等工程教育教学内容改革计划》的总体要求，根据原国家教委颁布的工科本科《工程数学课程教学基本要求》编写，全面、系统地介绍了复变函数与积分变换的基础知识．内容包括复数与复变函数、解析函数基础、复变函数积分、级数、留数、共形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换．每章配有习题，书末附习题参考答案．标*号的内容供选用．

参加本书编写的有刘二根、聂龙云、董秋仙、任飞正、乐励华、刘龙章、朱传喜、吴阔华．朱传喜、刘二根对全书进行了审稿和统稿．

由于编者水平有限，编写时间有限，缺点错误在所难免，恳请读者批评指正．

编 者

2004年12月

目　录

第一章　复数与复变函数

复变函数就是自变量为复数的函数，它是本课程的主要研究对象．关于复数，在初等数学中已有讨论，本章将在原有的基础上对复数的概念及运算作简要的复习与补充，然后再介绍复平面上的点集、区域、曲线以及复变函数的极限与连续性等概念，为进一步研究解析函数理论和方法奠定理论基础．

第一节　复数及其运算

一、复数概念

设 x,y 为实数，$i=\sqrt{-1}$，我们称

$$z=x+iy \text{ 或 } z=x+yi$$

为复数．其中 i 称为虚数单位；x,y 分别称为复数 z 的实部和虚部，记作

$$x=\operatorname{Re}(z),y=\operatorname{Im}(z).$$

例如，对复数 $z=\sqrt{3}-2i$，有

$$\operatorname{Re}(z)=\sqrt{3},\operatorname{Im}(z)=-2.$$

当 $y=0$ 时，$z=x+iy=x+i0$，我们把它看作实数 x；当 $x=0,y\neq0$ 时，$z=x+iy=0+iy$，我们称它为纯虚数，并且就写作 $z=iy$．例如 $3+i0$ 就是实数 3；$0-4i$ 是纯虚数，可以写成 $-4i$；而 $0+0i$ 既可看作实数 0，也可看作纯虚数 $0i$．

设 $z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2$ 是两个复数，如果 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$，则称 z_1 与 z_2 相等．由此得出，一个复数 z 等于0，当且仅当它的实部和虚部同时等于 0．

与实数不同,一般来说,任意两个复数不能比较大小.

二、复数的四则运算

由于实数是复数的特例,因此规定复数运算的一个基本要求是:复数的运算法则应用于实数特例时,能够和实数的运算结果相符合,同时也要求复数运算能够满足实数运算的一般规律.

两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ 的加法、减法及乘法定义如下:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2); \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2); \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2). \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

并分别称以上三式右端的复数为 z_1 与 z_2 的和,差与积.

显然,当 z_1 与 z_2 为实数(即当 $y_1 = y_2 = 0$)时,以上三式与实数的运算法则一致.

我们又称满足

$$z_2 z = z_1 \quad (z_2 \neq 0)$$

的复数 $z = x + iy$ 为 z_1 除以 z_2 的商,记作 $z = \frac{z_1}{z_2}$. 从这个规定(或约定),我们立即可推得

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{1.1.4}$$

根据以上定义,我们不难证明,与实数的情形一样,复数的加法、乘法也满足交换律、结合律和分配律:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1;$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3;$$

$$z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3;$$
$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3.$$

三、复数的共轭运算

把实部相同而虚部互为相反数的两个复数称为共轭复数，与 z 共轭的复数记作 $\overline{z}$. 如果 $z = x + iy$, 那么 $\overline{z} = x - iy$.

共轭复数具有如下性质：

(1) $\overline{\overline{z}} = z$;

(2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}, \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0)$;

(3) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\,(z), z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}\,(z)i$;

(4) $z\overline{z} = [\mathrm{Re}\,(z)]^2 + [\mathrm{Im}\,(z)]^2$.

这些性质作为练习，由读者自己去证明.

在计算 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 时，可以利用共轭复数的性质(4) 把分子与分母同乘以 $\overline{z_2}$，可得到所求的商，即(1.1.4) 式.

例 1 设 $z = \dfrac{1-2i}{3-4i} - \overline{\left(\dfrac{2+i}{-5i}\right)}$，求 $\mathrm{Re}\,(z), \mathrm{Im}\,(z), z\overline{z}$.

解
$$\begin{aligned} z &= \frac{1-2i}{3-4i} - \frac{\overline{2+i}}{\overline{-5i}} = \frac{1-2i}{3-4i} - \frac{2-i}{5i} \\ &= \frac{(1-2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} - \frac{(2-i)(-5i)}{(5i)(-5i)} \\ &= \frac{11-2i}{25} - \frac{-5-10i}{25} = \frac{16}{25} + \frac{8}{25}i, \end{aligned}$$

所以
$$\mathrm{Re}\,(z) = \frac{16}{25}, \mathrm{Im}\,(z) = \frac{8}{25},$$
$$z\overline{z} = \left(\frac{16}{25}\right)^2 + \left(\frac{8}{25}\right)^2 = \frac{64}{125}.$$

例 2 设 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ 为任意两个复数，证明：
$$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 2\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) = 2\mathrm{Re}\,(\overline{z_1}z_2).$$

证
$$\begin{aligned} & z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 \\ &= (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) + (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2) \\
&\quad + (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_1y_2 - x_2y_1) \\
&= 2(x_1x_2 + y_1y_2) = 2\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}).
\end{aligned}
$$

或

$$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = 2\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}),$$

$$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = \overline{\overline{z_1}z_2} + \overline{z_1}z_2 = 2\mathrm{Re}\,(\overline{z_1}z_2).$$

所以 $$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 2\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) = 2\mathrm{Re}\,(\overline{z_1}z_2).$$

第二节　复数的几何表示

一、复平面

实数的几何表示是数轴上的点,那么复数的几何表示是什么呢?

由于一个复数 $z = x + iy$ 由一对有序实数(x,y)唯一确定,所以对于平面上给定的直角坐标系,复数的全体与该平面上点的全体构成一一对应关系,从而可以把平面上点(x,y)看做是复数 $z = x + iy$ 的一种几何表示. 这是复数的一个常用表示方法,通常称为点表示,并且把“点 z”作为“数 z”的同义词,从而使我们能借助于几何语言和方法研究复变函数的问题,也为复变函数应用于实际奠定了基础.

因实数 x 对应x轴上的点,所以称 x 轴为实轴;纯虚数 iy 对应y轴上的点,所以称 y 轴为虚轴,这样表示复数的平面称为复平面或 z 平面.

在复平面上,复数 z 还与从原点$O(0,0)$指向点 $P(x,y)$ 的平面向量$\overrightarrow{OP}$一一对应,因此复数 z 也能用向量$\overrightarrow{OP}$来表示(图 1 - 1). 特别,复数 0 对应零向量. 向量的长度称为 z 的模,记作 $|z|$ 或 r,即

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.2.1}$$

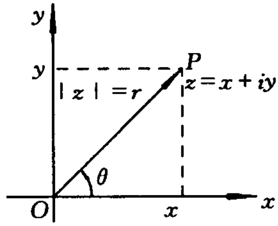

图 1－1

显然,下列各式成立:

$$|x| \leqslant |z|, \quad |y| \leqslant |z|,$$
$$|z| \leqslant |x| + |y|,$$
$$z\bar{z} = |z|^2 = |z^2|.$$

在 $z \neq 0$ 的情况,以正实轴为始边,以表示 z 的向量$\overrightarrow{OP}$ 为终边的角的弧度 θ 称为 z 的辐角,记作

$$\operatorname{Arg} z = \theta.$$

其满足

$$\tan(\operatorname{Arg} z) = \tan\theta = \frac{y}{x}. \tag{1.2.2}$$

显然任何一个复数 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个,彼此两个辐角之间相差 2π 的整数倍,即如果 θ_1 是其中的一个辐角,则

$$\operatorname{Arg} z = \theta_1 + 2k\pi (k \text{ 为任意整数}) \tag{1.2.3}$$

就给出了复数 z 的全部辐角. 在 $z(\neq 0)$ 的辐角中,我们把满足 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的 θ_0 称为辐角 $\operatorname{Arg} z$ 的主值,记作 $\theta_0 = \arg z$.

当 $z = 0$ 时,其模 $|z| = 0$,而辐角不确定.

当 $z \neq 0$ 时,由三角函数知识可知,辐角主值 $\arg z$ 可由 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 按如下关系来确定:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & (x > 0), \\ \dfrac{\pi}{2}, & (x = 0, y > 0), \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & (x < 0, y \geqslant 0), \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi, & (x < 0, y < 0), \\ -\dfrac{\pi}{2}, & (x = 0, y < 0). \end{cases} \tag{1.2.4}$$

由复数的向量表示法及运算法则可知,两个复数 z_1 和 z_2 的加、减运算和相应向量的加、减法运算一致(图 1 - 2),这样力学、物理学中的向量如力、速度、加速度等物理量,都可以用复数来表示. 这说明复数不仅只是实数在形式上的扩充,而且具有很强的实际背景的.

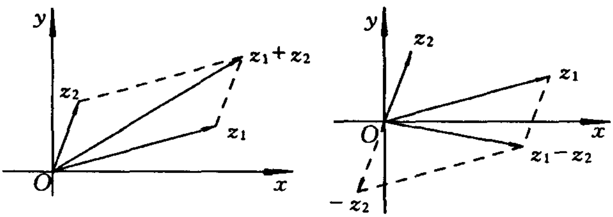

图 1-2

我们知道,$|z|$ 表示向量 z 的长度,$|z_1 - z_2|$ 表示点 z_1 与 z_2 之间的距离(图 1 - 3),因此由图 1 - 2 和图 1 - 3,易知下面两个不等式成立:

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \quad (\text{三角不等式}); \tag{1.2.5}$$

$$|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||. \tag{1.2.6}$$

一对共轭复数 z 和 $\bar{z}$ 在复平面内的位置是关于实轴对称的(图 1 - 4),因而有 $|z| = |\bar{z}|$,而且如果 z 不在负实轴和原点上时,有 $\arg z = -\arg \bar{z}$.

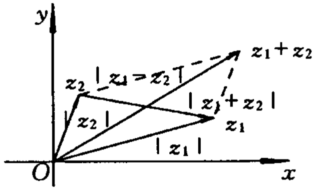

图 1－3

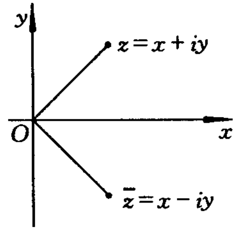

图 1－4

由复数的直角坐标与极坐标的关系(图 1 - 1) 可知:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,$$

因此复数 z 还可表示为

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{1.2.7}$$

表示式(1.2.7) 称为复数 z 的三角表示式.

如果再利用欧拉(Euler) 公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

则复数 z 又可表示为

$$z = re^{i\theta}. \tag{1.2.8}$$

表示式(1.2.8) 称为复数 z 的指数表示式.

复数的各种表示法可以相互转化,根据讨论问题的需要而选择.

例 1 将下列复数化为三角表示式与指数表示式.

(1) $z = -2\sqrt{3} + 2i$;(2) $z = \sin\frac{\pi}{7} + i\cos\frac{\pi}{7}$.

解 (1) $r = |z| = \sqrt{12+4} = 4$,

又由于 z 在第二象限,由(1.2.4) 式得

$$\theta = \arctan\frac{2}{-2\sqrt{3}} + \pi = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi$$

$$= -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}.$$

所以 z 的三角表示式为

$$z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

z 的指数表示式为

$$z = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

(2) $r = |z| = 1$,又

$$\sin\frac{\pi}{7} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = \cos\frac{5\pi}{14},$$

$$\cos\frac{\pi}{7} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = \sin\frac{5\pi}{14},$$

所以 z 的三角表示式为

$$z = \cos\frac{5\pi}{14} + i\sin\frac{5\pi}{14}.$$

z 的指数表示式为

$$z = e^{i\frac{5\pi}{14}}.$$

例 2 设 z_1、z_2 为两个复数,证明:

(1) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$;

(2) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

证 (1)
$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2,\end{aligned}$$

由第一节例 2 可知

$$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}),$$

因此 $$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2});$$

(2) 因为

$$\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \leqslant |z_1\overline{z_2}| = |z_1||\overline{z_2}| = |z_1||z_2|,$$

所以

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &\leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2,\end{aligned}$$

两边开方得 $$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

下面举例说明,平面图形可用复数形式的方程或不等式表示,也可以由给定的复数形式的方程或不等式确定它表示的图形.

例 3 用复数形式的方程表示下列曲线.

(1) 连接两点 $1-i$ 与 $2-3i$ 的直线段;

(2) 以原点为中心,焦点在实轴上,长半轴为 a,短半轴为 b 的椭圆.

解 (1) 因为连接点 $(1,-1)$ 与 $(2,-3)$ 的直线段的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1+t, \\ y = -1-2t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

故其复数形式的方程为

$$z = 1+t+i(-1-2t) = 1-i+(1-2i)t \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

(2) 因为椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

所以其复数形式的方程为

$$z = a\cos t + ib\sin t \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

例 4 将在直角坐标系下的直线方程 $ax+by+c=0$ 化为在 C 内的复变量表示式.

解 因为 $z = x+iy$,所以

$$x = \frac{1}{2}(z+\overline{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z-\overline{z}).$$

将上式代入 $ax+by+c=0$ 得:

$$a(z+\overline{z}) - ib(z-\overline{z}) + 2c = 0,$$

即
$$(a-ib)z + (a+ib)\overline{z} + 2c = 0,$$

令 $A = a+ib, B = 2c$,则有

$$\overline{A}z + A\overline{z} + B = 0.$$

例 5 求下列方程所表示的曲线.

(1) $|z-i| = 1$;

(2) $|z-3|+|z-1|=4$;

(3) $\mathrm{Im}(i+\bar{z})=3$.

解 (1) 在几何上可以看出,方程 $|z-i|=1$ 表示所有与点 i 距离为 1 的点的轨迹,因此它的图形为以点 i 为圆心,1 为半径的圆(图 1-5(a)).

下面我们再用代数方法求出该轨迹的直角坐标方程.

设 $z=x+iy$,则方程 $|z-i|=1$ 化为

$$|x+(y-1)i|=1,$$

即
$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=1,$$

所以直角坐标方程为 $x^2+(y-1)^2=1$.

(2) 在几何上可以看出,方程 $|z-3|+|z-1|=4$ 表示到点 3 与 1 的距离之和为常数 4 的点的轨迹,因此它的图形为以点 3 和 1 为焦点,长轴为 4 的椭圆(图 1-5(b)).

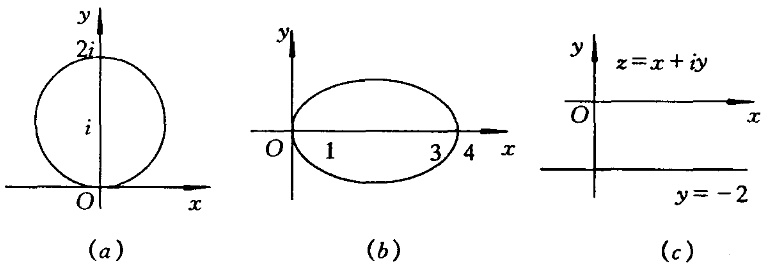

图 1-5

与(1)类似可用代数方法求出该轨迹的直角坐标方程为

$$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$$

(3) 设 $z=x+iy$,则

$$i+\bar{z}=i+x-iy=x+i(1-y),$$

由已知 $\mathrm{Im}(i+\bar{z})=3$ 得

$$1-y=3,$$

即
$$y=-2.$$

因此它的图形是一条平行 x 轴的直线(图 1-5(c)).

二、复球面与无穷远点

前面我们建立了复数与复平面上的点的一一对应关系,下面我们借助地图制图学中的将地球投影到平面上的测地投影法,建立复平面与球面上的点的一一对应关系,从而引入无穷远点的概念.

设 xOy 平面为复平面,取一个在原点 O 与复平面相切的球面,球面上的一点 S 与原点 O 重合(图 1-6),通过 S 作垂直于复平面的直线与球面相交于另一点 N,我们称 N 为北极,S 为南极.

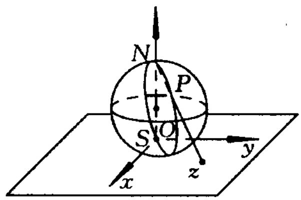

图 1-6

对于复平面内任何一点 z,如果用一条直线段把点 z 与北极 N 连接起来,则该直线段一定与球面相交于球面上异于 N 的一点 P. 反过来,对于球面上任何异于 N 的一点 P,用一条直线段把 P 与 N 连接起来,则该直线段的延长线就与复平面相交于一点 z. 这就是说明:球面上的点,除去北极 N 外,与复平面内的点之间存在一一对应关系. 前面我们已经讲过,复数可以看作是复平面内的点,因此球面上的点除去北极 N 外,与复数一一对应,于是我们就可以用球面上的点来表示复数.

现在我们考虑北极 N 和复平面上的什么点相对应?由图 1-6 容易看到,当复平面上的点 z 无限远离原点 O 时,或当复数 z 的模 $|z|$ 无限变大时,点 P 就无限地接近于点 N,因此为了使复平面与球面上的点无例外地都能一一对应起来,我们规定:复平面上有一个唯一的“无穷远点”,它与球面上的北极 N 相对应. 相应地,我们又规定:复数中有一个唯一的“无穷大”与复平面上的无穷远点相对应,